

Conceptos y Magnitudes en Física

Luciano Laroze
Nicolás Porras
Gonzalo Fuster

Reimpresión 2018

usm
editorial

Conceptos y Magnitudes en Física

Luciano Laroze
Nicolás Porras
Gonzalo Fuster



Sello Editorial USM
Universidad Técnica Federico Santa María
Avenida España 1680, Valparaíso
Fono 322654106
Correo electrónico: pedro.serrano@usm.cl

Conceptos y Magnitudes en Física
Luciano Laroze, Nicolás Porras, Gonzalo Fuster

Coordinación, corrección y preparación de los originales
Nicolás Porras y Gonzalo Fuster.

Transcripción del original
Loreto Silva

Registro Propiedad Intelectual inscripción N° 232.735
29 de agosto 2013

ISBN
978-956-7051-24-3

Créditos fotografías portada
Ola
http://www.bancodeimagenesgratis.com/2011/03/las-olas-del-mar-i-20-fotografias-muy.html
Galaxia Centauro
NASA / CXC / CFA / R.Kraft et al.; MPIfR / ESO / APEX / A.Weiss et al. ESO / WFI

Diseño portada y diagramación
Luis Bastías Castillo

Impresión
Andros Ltda.
Valparaíso, Chile, 2018

ÍNDICE

A LOS ESTUDIANTES

CONTENIDOS

BIENVENIDO



Triunfador

Los novatos suben como alumnos las escalas que conducen a la USM:

Con razón te sientes triunfador. Muchos de tus compañeros se quedaron atrás, y no lograron llegar este año a la Universidad.

Entrar es el primer paso. Es sólo el comienzo. La tarea que asumes es hermosa, grandiosa, inmensa. Para tener éxito se requiere un real compromiso personal que te mueva a sentir satisfacción en el gran esfuerzo que significa lograr ser un excelente profesional de la USM.

Emprendedor

No importa lo que te cuenten. No importa lo que hagan tus pares. Tú eres el que forja tu porvenir. De ti depende el que lleves a buen final tus sueños.

Los sueños sin decisión, sin actuar, sin esfuerzo; no son más que eso: sueños.

Los sueños con trabajo, con sacrificio, con acción, con alegría, son ansias reales, auto-promesas cumplidas, propósitos hechos realidad.

Tenaz

Tienes que reforzar la idea de que tu futura y exitosa profesión está en tus manos.

El estudiar y aprender es un trabajo intenso que exige dedicación y metodología.

No debes contentarte con estudiar para obtener notas mínimas para avanzar de curso. Tu meta debe ser “saber”.

El conocimiento superficial, confuso y la sola memorización no permiten raciocinar ni resolver situaciones problemáticas.

El proceso de comprensión es siempre más lento que el de memorización.

Metódico

Es necesario que organices tus actividades de modo que te sea posible estar siempre al día en las materias enseñadas en las distintas asignaturas. Estudiar es una actividad que debe realizarse clase a clase. Este método te significará múltiples beneficios, como poder seguir con facilidad las explicaciones dadas en clase, intervenir en las discusiones de los temas que se están desarrollando y afrontar sin ansiedades ni penosas trasnochadas los sucesivos controles y pruebas de las diferentes asignaturas, aunque estén muy cercanas unas de otras.

Responsable y leal

Para formarse como buen profesional no basta aprobar asignaturas. Tienes que adquirir cualidades que forman parte del perfil de un profesional. La lealtad es una cualidad respetada y admirada por todos.

Primero tienes que ser leal y sincero contigo mismo. Debes conocer tus potencialidades y usarlas para lograr tus ideales. También tienes que aceptar, sin disculpas, tus falencias y debilidades. Debes reconocerlas para mejorarlas o suprimirlas, a fin de que no arruinen tus proyectos y tu calidad de vida.

Debes ser leal con tus padres. Ellos están trabajando para que tengas éxito en la vida. Ellos confían que estás asistiendo a clases, que te esfuerzas por aprender. Suponen que eres responsable y que haces todo lo posible, honradamente, para aprovechar la oportunidad que con tanto sacrificio te proporcionan.

Lealtad con tu Universidad. Es tu institución que te insta y te forma a través de sus profesores y pone toda su estructura al servicio tuyo para tu progreso. La Universidad te entrega los conocimientos y tratará de formarte para que puedas realizarte profesionalmente.

Tú debes ser leal con la Universidad haciendo un gran esfuerzo para ser un alumno responsable, y más tarde, un profesional leal con la empresa en que trabajes.

La solidez y prestigio de una Universidad depende de manera notable de la conducta y seriedad de sus estudiantes y del comportamiento de sus ex alumnos.

Así como tú eres parte de una familia y cuidas con esmero los bienes de la casa aunque sepas que partirás un día, así también tú eres integrante importante de la Universidad y debes respetar sus normas y poner especial cuidado en el uso de lo que Ella pone a tu disposición para tu formación y realización.

Solidario

Debes ayudar y alentar a tus pares desanimados. Explicarles la materia, si te sientes capaz. Dar un buen consejo, si te lo piden. Indicarle los servicios que ofrece la Universidad para protegerlos, si están enfermos o si tienen dificultades de otro tipo.

No es solidario el que usa a sus compañeros para obtener notas de manera poca honrada en las pruebas o da facilidades para ello. Esto rebaja la dignidad de las personas y debilita la conciencia.

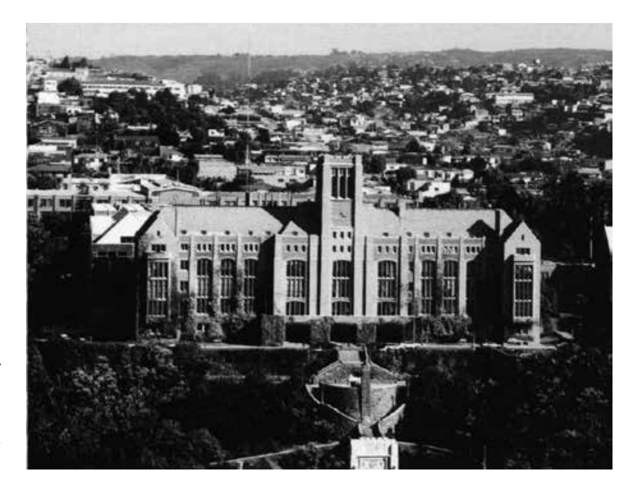
Sin perjuicio de lo anterior, tienes que actuar de manera independiente. No debes dejarte influir por conductas de compañeros que te lleven a perjudicar tu calidad de vida o tu salud o te induzcan a descuidar tus deberes como estudiante.

Satisfacción y Alegría

A medida que vayas aprendiendo tus materias, irás adquiriendo seguridad en tus quehaceres de estudiante. Esta seguridad te permitirá entender mejor al profesor y te proporcionará una enorme satisfacción. Podrás conversar con naturalidad sobre Física, Matemáticas y demás asignaturas. Tu sistema de vida mejorará notablemente. Sentirás que puedes compartir con tu familia y tus amistades; disfrutando, con alegría y sin preocupación los momentos de descanso y distracción necesarios para rehacer fuerzas.

Nicolás Porras Zúñiga

Algunas consideraciones para ayudarte en tus estudios



Queremos hacerte algunas observaciones y recomendaciones; esperando que ellas contribuyan a tu propio éxito, que es lo que realmente nos interesa.

- Trata siempre de comprender muy bien lo que debas aprender.

El "conocimiento confuso" y la sola memorización no permiten raciocinar ni resolver situaciones problemáticas. El proceso de comprensión de lo estudiado es siempre más lento que el de memorización. Por eso debes estudiar con anticipación y con calma.

Es necesario que organices tus actividades de modo que te sea posible estar siempre al día en las materias enseñadas.

Te insistimos: Estudiar es una actividad que debe realizarse clase a clase.

- Te recomendamos que no te contentes con estudiar sólo para obtener las notas mínimas necesarias para la promoción. Un conocimiento inconsistente en la base, te producirá serias dificultades más adelante y es la causa profunda de muchos abandonos.

- Es muy importante escoger los tiempos y lugares para estudiar con tranquilidad y sin distracciones. Examina, para tu caso particular, las facilidades que te proporciona tu casa habitación y la Universidad para mejor desarrollar tus actividades de aprendizaje.

- Aunque un curso te parezca de "materia sabida" e "ideas muy simples", igualmente estudia, consulta, relaciona, discute.

- Es perfectamente posible un curso de ``materias muy simples'' con un alto nivel de exigencia. De ordinario este nivel de exigencia va en aumento a medida que el curso se desarrolla. Tú podrás seguirlo si has adquirido hábitos de estudio, de análisis y de síntesis.

- Encontrarás en este texto varios tipos de ejercicios. Algunos han sido propuestos para que desarrolles habilidades y seguridad en el cálculo, otros para que te sirvan de ayuda en la comprensión de algún concepto particular; y un tercer grupo, están diseñados para que uses en conjunto varios conceptos relacionados.

Es conveniente que primero resuelvas los ejercicios tú solo. Luego puedes comparar las soluciones con las de otros compañeros, discutiendo los procedimientos tanto si los resultados obtenidos son iguales o diferentes. Esta manera de proceder te ayudará eficazmente para alcanzar las habilidades necesarias en la resolución de problemas numéricos y conceptuales.

También propondremos algunas actividades experimentales. Deberás realizarlas y así, con tus propios ojos, tus propias manos y tu propia mente, podrás ponerte en contacto, en escala modesta, con el sistema de trabajo en Física.

Es aconsejable que en el estudio y lectura comprensiva del texto, anotes o subrayes las palabras, ideas o conceptos que no te queden claros, para presentarlos a discusión en las clases siguientes. Esto no exime de la exigencia de tratar de aclarar tus dudas por medio de la reflexión y la consulta de otros textos.

Libros de apoyo y consulta:

- *Física Universitaria*: Sears - Zemansky, Vol. 1
- *Física*: Resnick – Halliday, Vol 1
- *Álgebra*: Editorial Arrayán
- *Álgebra, Geometría*: Baldor
- *Física conceptual*: Hewit

Lecturas de Física:

- *Últimas Noticias del Cosmos*: Hubert Reeves
- *Miedo a la Física*: Lawrence M. Krauss
- *La más bella historia del mundo*: Reeves, Rosemary; Cappens, Simonnet
- *A la sombra del asombro*: Francisco Claro
- *Einstein: Pasiones de un científico*: Barry Parker
- *Del carácter de las leyes físicas*: Richard Feymann

Sobre unidades de medición puedes consultar:

- Sistema internacional de unidades (SI)
- El cambio hacia el sistema internacional de unidades - Haeder
- Bases Técnicas – Hirschmann

Algunos símbolos matemáticos.

$=$	igual	$\simeq$	aproximadamente igual
$>$	mayor que	$\triangleq$	equivalente a
$<$	menor que	$\hat{\simeq}$	aprox. equiv. a
$\geq$	mayor o igual que	$\sim$	orden de magnitud de
$\leq$	menor o igual que	$\propto$	proporcional a

Algunas letras griegas.

Alfa	α	A	**Lambda**	λ	Λ
Beta	β	B	**Mu**	μ	M
Gamma	γ	Γ	**Pi**	π	Π
Delta	δ	Δ	**Rho**	ρ	P
Epsilón	ε	E	**Sigma**	σ	Σ
Eta	η	H	**Tau**	τ	T
Theta	θ	Θ	**Omega**	ω	Ω

VISIÓN DE LA FÍSICA



Muchas veces nos hemos encontrado conmovidos con los arrebatadores coloridos de una puesta de sol.

El asombro es el principio de la sabiduría, afirmaba Aristóteles.

La Sabiduría es el arte del buen pensar y discurrir, acompañada del ansia de explicarse y explicar el entorno que nos rodea, y desentrañar el qué somos y para qué somos.

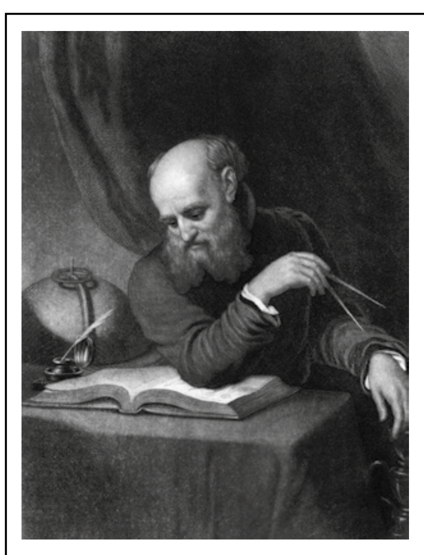
La humanidad en su devenir, con esfuerzo, trabajo y satisfacción ha ido poco a poco construyendo un enorme acopio de conocimientos, expandiendo el entorno y el objeto de nuestro asombro.

Desde muy antiguo, en el conocimiento se fueron perfilando tres líneas principales de pensamiento. La Filosofía, la Matemática y la Filosofía Natural. Estos sistemas de pensamiento no son conjuntos disjuntos. Se entrelazan unos con otros y se refuerzan mutuamente.

Las ciencias no son sólo un conjunto de saberes, más bien es el quehacer de muchos que están continuamente agregando piezas al castillo del saber.

De tiempo en tiempo surgen genios que hacen que la Ciencia dé pasos agigantados.

Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los grandes iniciadores del Método Científico y de alguna manera contribuyó a formalizar los conocimientos en la ciencia que en algún momento tomó el nombre de Física.



Galileo Galilei

El Método Experimental de la Física se basa en los siguientes momentos:

- Observación de los fenómenos de la naturaleza.

- Experimentación de hechos similares o análogos modificando adecuadamente las variables en ellos incluidos. Medición de las características de los entes involucrados o de los procesos desarrollados.

- El Momento Teórico que elabora un discurso que explica las causas del fenómeno estudiado y propone un modelo, generalmente matemático, que nos ayuda a conocer su funcionamiento, explicar el pasado y atisbar el futuro.

Estas etapas del método experimental, que en la práctica pueden darse en cualquier orden, permiten tener en continua revisión los conocimientos y teorías. Cuando nuevas realidades entran en contradicción con teorías planteadas anteriormente, éstas se analizan nuevamente, se actualizan o simplemente se desechan.

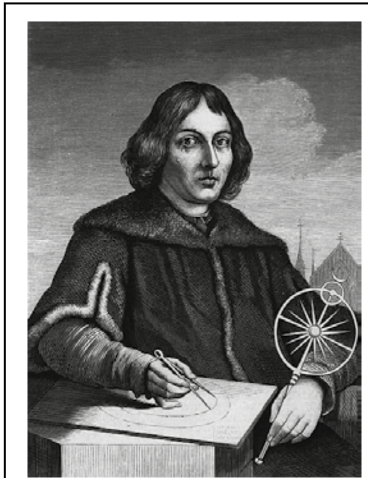
Este método llamado Método Científico, con las necesarias adaptaciones, se puede aplicar a una gran cantidad de los quehaceres en las actividades humanas.

El primer modelo ideado para explicar el Sistema Solar supone la Tierra plana y el Sol y los Planetas girando alrededor de la Tierra como centro. Este modelo permitió a los antiguos determinar el número 365 días y fracción. Para los griegos, la Tierra es esférica y sigue como centro. Pero, ya surgen voces como la de Aristarco de Samos, siglo III (A.C.), que afirma que tal vez el Sol es el centro del Universo.

En el siglo I (D.C.) Ptolomeo, griego de Alejandría, astrónomo y geógrafo, elaboró un modelo del Sistema Solar que, aunque no sostenible, era coherente matemáticamente.

Para explicar el movimiento retrógrado de los planetas, postuló que éstos describían círculos propios y los centros de estos círculos giraban alrededor de la Tierra en órbitas también circulares. Ptolomeo afirmaba, en oposición a Platón y a Aristóteles, que su teoría no daba cuenta necesariamente de la realidad, sino que era un modelo matemático que permitía en forma eficiente hacer cálculos. El modelo astronómico de Ptolomeo duró 1.400 años.

Nicolás Copérnico (1473-1543), de habla alemana, escribía en latín. Filósofo, matemático, astrónomo, médico, doctor en Teología y Derecho Canónico, cambió el centro del Universo conocido. Puso fin a la Historia Astronómica de la antigüedad y de la Edad Media. El hombre quedó eliminado del centro del Universo.



Nicolás Copérnico

Copérnico postuló que todos los planetas se movían alrededor del Sol describiendo órbitas circunferenciales. El Sol ocupaba el centro de dichas circunferencias.

Realizó, con increíble precisión para su tiempo, la medición de la distancia de los planetas al Sol, mediante un método ideado por él mismo. No existía aún el telescopio. Usó un astrolabio. Escogió como unidad de medición la distancia Tierra-Sol, que conoceremos como Unidad Astronómica [U.A.].

Aunque Copérnico afirmaba que su sistema heliocéntrico era matemático, el mundo cultural y científico pronto comprendió que el golpe que había asestado al mundo geocéntrico y antropocéntrico era definitivo.

Johanes Kepler (1571-1630), filósofo y astrónomo alemán, profundizó el sistema heliocéntrico y apoyándose en las cuantiosas mediciones astronómicas hechas por el holandés Tycho Brahe, enunció las tres leyes que rigen el movimiento de los planetas. Curiosamente, Tycho Brahe siempre rechazó la validez del Sistema Copernicano.

Los estudios y trabajos científicos en el siglo posterior a Copérnico llevaron a la conclusión que el mundo era distinto. La aceptación de la nueva realidad produjo profundos cambios metafísicos y religiosos que condujeron al bochornoso y absurdo juicio contra Galileo. El cambio de visión era imposible de detener. Muchos de los que juzgaron a Galileo estaban convencidos que el Sistema Heliocéntrico mostraba la realidad. Habían visto con el telescopio de Galileo los satélites circundando alrededor de Júpiter, y las fases del planeta Venus que sólo se podían explicar si los planetas giraban en torno al Sol.

Un nuevo gran gigante de la Física aparece en esta historia: Isaac Newton (1642-1727). En su libro Philosophieae Naturalis Principa Mathematica, aborda el movimiento de los cuerpos. Deja establecida la dinámica de los cuerpos al enunciar y explicar los conceptos de inercia, momentum, fuerza.

Basándose en los escritos de Kepler y el estudio de las fuerzas dependientes del inverso del cuadrado de la distancia estableció la ley de la Gravitación Universal, que es el modelo matemático que definitivamente explica el movimiento en el Sistema Solar. Esta ley aporta soluciones a muchos problemas del Universo. Ha sido perfeccionada por el modelo de la Relatividad General, ideado por Albert Einstein (1879-1955), uno de los más grandes de la Física.

La ciencia y la técnica están unidos estrechamente. El crecimiento científico ha incrementado el avance tecnológico. El perfeccionamiento de la tecnología ha facilitado los medios para aumentar la investigación, tanto en el Cosmos como en el microcosmos.

Registro hecho por Galileo de sus observaciones de las lunas de Júpiter

Este proceso de enriquecimiento mutuo entre la Ciencia y la Tecnología, que comenzó en los albores del ser humano, no se ha detenido nunca y continúa hoy.

Rudolf Hertz (1875-1894) encontró el modo de producir y detectar ondas electromagnéticas. Fue el comienzo definitivo de las comunicaciones inalámbricas.

Años antes, James Clerk Maxwell (1831-1879) había establecido las ecuaciones que rigen el comportamiento electromagnético. Se ha dicho que su trabajo equivale a una segunda gran unificación de la Física. Se considera que la primera gran unificación fue realizada por Newton en la mecánica.

Hasta fines del siglo XIX, muchas de las contrataciones de físicos en las universidades se hacían como profesores de “Filosofía Natural”.

Durante el siglo XIX el avance de los conocimientos en Ciencia fue espectacular. Este aumento produjo una separación neta entre Física, Química, Astronomía e Ingeniería.

En este período se hicieron grandes avances en la explicación cada vez más unificada de los fenómenos aparentemente inconexos que se observan en la naturaleza.

El modelo molecular de la materia y la Física Estadística permitieron explicar una serie de fenómenos que ocurren con los materiales, tales como la propagación del sonido en fluidos y sólidos.

La Termodinámica relaciona la energía mecánica con la energía térmica. En 1847, James Prescott Joule (1819-1889) estableció la equivalencia del trabajo mecánico con el calor, como procesos de intercambio de energía.

Los estudios de Michael Faraday (1791-1867) sobre electrólisis confirmaron la teoría corpuscular de la materia y que la electricidad está distribuida en partículas discretas, todas de igual carga eléctrica.

En Óptica se hicieron grandes avances y los fenómenos de interferencia, difracción y polarización, indujeron a confirmar el comportamiento ondulatorio de la luz. Transcendentales fueron los experimentos dedicados a medir la rapidez de la luz. El asombroso crecimiento de los conocimientos físicos fue la causa del desarrollo de las tecnologías que iniciaron la gran industria.

En la década alrededor del 1900, se realizaron notables descubrimientos que orientaron el estudio de la Física al microcosmos. Tan profundo fueron estos cambios que en adelante se habló de Física Clásica y Física Moderna.

Joseph John Thomson (1856-1940) midió el cuociente entre la masa y la carga del electrón. En 1897, Wilhelm Roentgen (1845-1923) descubrió los rayos X. La medicina hizo rápidamente uso de ellos. Antoine Hernri Becquerel (1852-1908) descubrió la radioactividad.

En 1900, Max Planck (1858-1947) formuló la hipótesis que la energía se emite en las ondas electromagnéticas en forma de pequeñas unidades separadas unas de otras y las denominó “cuantos”. Profundizando en este modelo, enunció la ley que dice que la energía de un cuantum es igual a una constante universal “h” multiplicada por la frecuencia de la onda: $E_c = h\,\nu$

Esa constante h fue llamada después la constante de Planck.

Einstein dio un paso adicional al considerar que las ondas electromagnéticas no sólo son radiadas como cuantos, sino que son constituidas por ellos. Einstein usó esta idea para explicar los resultados experimentales del efecto fotoeléctrico. El Premio Nobel le fue concedido por este trabajo. Max Planck y Einstein son los iniciadores de la Física Cuántica.

En 1924, Luis De Broglie presentó una tesis doctoral introduciendo los electrones como onda. Por primera vez se presentó la dualidad corpúsculo-onda, que es una de las características de la Mecánica Cuántica.

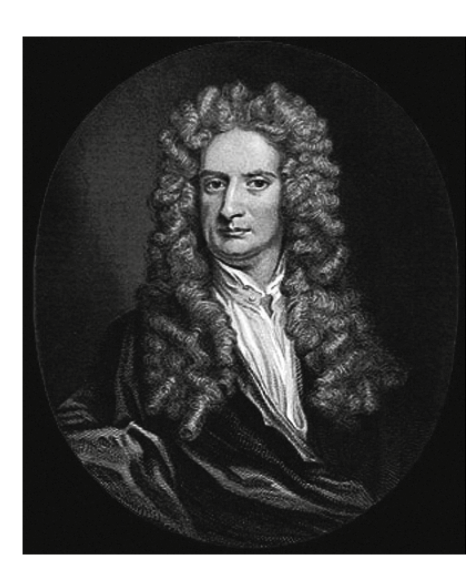
En 1905, Einstein publica su célebre memoria sobre la Relatividad Especial y reformula el espacio y el tiempo, haciéndolos interdependientes, y dando a la velocidad de la luz en el vacío un carácter absoluto.

Con la construcción de los grandes telescopios, la Astrofísica explora y explica hasta los inicios del Universo y trata de dilucidar las extraordinarias velocidades de las galaxias lejanas, los agujeros negros, la materia obscura y la energía repulsiva.

Mientras tanto, la Física de Partículas o de Altas Energías se sumerge en el microcosmos.

Los quarks estructuran el protón. Los grandes aceleradores escudriñan buscando nuevas partículas y permiten construir átomos de antimateria.

La Ciencia y la Tecnología están cimentando una nueva civilización fundamentada en las comunicaciones y la globalización.



Isaac Newton



Albert Einstein

La Ciencia nos entrega un enorme legado de conocimiento y progreso. Este legado no es gratis. Es necesario trabajar y estudiar para adquirirlo. Todos de alguna manera contribuimos a aumentar o disminuir la cultura heredada.

Aquí se ha nombrado a los principales y más importantes personajes que determinaron el progreso de la Ciencia. Pero hay un gran número de científicos que con su valiosa, y no siempre reconocida, contribución han hecho posible que los genios avanzaran espectacularmente.

Así, el estudio cuidadoso, esforzado, responsable y constante, será tu aporte al crecimiento de nuestro saber.

Nicolás Porras Zúñiga



CAPÍTULO I

TIEMPO Y DISTANCIA



Cuando alguien tiene la oportunidad de planear un encuentro, suele usar una expresión como:

"Juntémonos mañana a las 7 de la tarde en la esquina más cercana al mall."

Naturalmente, ambos no llegan a la cita simultáneamente; quien llega primero mira su reloj, se pasea y puede entretenerse contando los pasos, camina veinte metros, vuelve a mirar su reloj, se mueve en otra dirección... hasta que se produce el encuentro.

En tales situaciones, aunque de carácter "simple" y usual, ya estamos en presencia de dos elementos fundamentales que, de una u otra forma, directa o indirectamente, están siempre involucrados en todo fenómeno físico: **tiempo** y **distancia**.

Notamos que el encuentro se produjo en cierto instante en el tiempo y en cierto lugar del universo. Para que aquello ocurriera fue necesario que usted y la otra persona entendieran lo mismo sobre varias cosas, por ejemplo:

> * que debe transcurrir un determinado número de horas (7) desde cierto *instante de referencia*, el mediodía;
>
> ** que ambos deben llegar a determinado punto, la esquina más cercana, con respecto a un *lugar de referencia*, el mall.

No pretendemos **definir** tiempo ni distancia. Más aún, le advertimos de inmediato que **no** podemos definir todos los conceptos en Física en forma precisa.

Si lo intentásemos, podríamos caer en un estéril juego de palabras con el riesgo de paralizar el progreso del pensamiento.[†]

En consecuencia, para comenzar a conversar constructivamente de Física, usted y nosotros nos pondremos de acuerdo en que al hablar de tiempo y distancia nos estamos refiriendo a las mismas cosas.

Sin embargo, le damos un grito de alerta: tiempo y distancia son ideas profundas, llenas de sutilezas, que deben ser *analizadas* muy cuidadosamente en Física, lo que no es fácil de hacer. La actitud mental adoptada para tales análisis es:

Lo realmente importante no es definir, sino el dar reglas para **medir**.

Medir es **comparar** cosas del mismo tipo. Esto significa seleccionar una cosa, llamada **unidad**, y contar cuántas veces está contenida en otra cosa del mismo tipo.

[†] En cada ciencia hay ciertos conceptos básicos *indefinibles*, por ejemplo, en Matemáticas el concepto de **conjunto** y el de **punto**. Use un buen diccionario y siga las "definiciones" de: conjunto, grupo, familia, agrupación, reunión, clase, categoría, corrillo. Observe que cada una de estas palabras está definida en términos de una o más de estas mismas palabras; en casos como éstos, se usa la expresión *círculo vicioso.*

Las **unidades de medición** son en sí arbitrarias y, por lo tanto, solamente obtenibles por **acuerdo**. El acuerdo puede ser con uno mismo, con un grupo local de relaciones o internacional. En caso de acuerdo internacional se habla de **unidad patrón**. Se exige que la unidad patrón sea fácilmente reproducible y que pueda guardarse sin que prácticamente sufra alteraciones. La validez de una unidad patrón radica en que los científicos del mundo la aceptan y la usan para comunicarse.

Cuando la unidad de medida ha sido convenida, la comparación se expresa por un número, que es el cuociente entre la cosa que se mide y la unidad de medida de esa cosa; llamaremos a este número: **número de medición**.

Los físicos llamamos **cantidades físicas** a las cosas con las que tratamos, dando así a entender que son cosas que pueden ser medidas y, por lo tanto, cuantificadas.

Por ejemplo, decimos "la distancia fue veinte metros" o "el intervalo de tiempo fue 7 horas". ¡Decir "la distancia fue veinte" o "el intervalo de tiempo fue 7", **no** tiene sentido!

Medición de Tiempo

Un método de medición de tiempo consiste en utilizar algo que sucede una y otra vez en forma regular, algo que llamamos fenómeno **cíclico** o **periódico**. Este método de medir es fundamentalmente un *proceso de conteo*.

En nosotros mismos tenemos ejemplos de fenómenos cíclicos: el proceso de respiración, los latidos del corazón, el metabolismo que requiere ingerir alimentos, etc. Fuera de nosotros observamos el carácter repetitivo de la salida del Sol y de la Luna, de los cambios climáticos, de los movimientos de los planetas y las estrellas, etc. En general, en el Universo entero abundan casos de fenómenos cíclicos.

No es aventurado decir que, entre tales fenómenos, ha sido la repetitiva aparición del Sol lo que mayor influencia ha tenido en dar al hombre un sentido de medida del tiempo, lo que condujo a la unidad de tiempo: día.

Los días nos parecen distintos unos de otros cuando pensamos en el tiempo entre una salida del Sol y su puesta siguiente. Pero si consideramos el día como el "tiempo transcurrido" entre dos pasos consecutivos del sol por su punto más alto, se encuentra que este "intervalo de tiempo" no varía en *término medio*. Tal afirmación debe ser controlada. La forma natural de hacerlo es recurrir a otro fenómeno repetitivo y verificar si se establece una correspondencia entre una regularidad de cierto tipo y otra regularidad de otro tipo. Este proceso condujo a la invención de aparatos para medir el tiempo y al establecimiento de otras unidades de tiempo.

A cualquier aparato para medir el tiempo le llamamos *cronómetro* (reloj). Existen relojes de sol, de agua, de arena, de péndulo, de resorte, eléctricos, electrónicos, atómicos y de diversos otros tipos.

Unidades de Tiempo

Varias unidades de tiempo que usamos en nuestra vida "diaria" como hora, minuto y segundo; así como la subdivisión del día en 24 horas, de la hora en 60 minutos y del minuto en 60 segundos, provienen de Babilonia; de allí se extendieron a Egipto, Fenicia, Grecia, al Imperio Romano... hasta nosotros.

Para medir el paso de las horas se usó en Babilonia un reloj de sol en la forma rudimentaria de un estilete vertical.

Es muy probable que haya sido la observación del corrimiento cíclico de la salida del sol en el horizonte con respecto a un punto dado, lo que permitió a los babilonios considerar otra unidad de tiempo: el año. Determinaron hace unos 4.500 años, comparando la unidad "día" con el corrimiento de la salida del sol sobre el horizonte, que el año tenía 360 días. Dividieron el año en 12 meses de 30 días cada uno. Luego se dieron cuenta que el año no tenía exactamente 360 días y por lo tanto agregaban, de vez en cuando, meses extras para evitar que se corrieran mucho las estaciones.

> **Divertimento**: Observe que en Babilonia gustaba el número 60 y otros relacionados con él. Allí, junto con el sistema numérico **decimal**, basado en múltiplos y fracciones de 10 (derivado de los 10 dedos de la mano y al que nosotros estamos más acostumbrados), se usó el sistema duodecimal, basado en el número 12. El sistema duodecimal facilita el cálculo de fracciones, ya que 12 es divisible por 1, 2, 3, 4, 6 y 12; en cambio, 10 sólo es divisible por 1, 2, 5 y 10 (pero, 12 no es divisible por 5 ni por 10).
>
> Se han encontrado tablas numéricas babilónicas (de multiplicar, de cubos y cuadrados) en las cuales se usa el sistema **sexagesimal**, basado en el número 60, que combina las ventajas de los otros dos sistemas.
>
> Otra influencia del uso del sistema sexagesimal en Babilonia, que persiste hasta hoy, se tiene en la medida de ángulos: división del círculo en 360 grados; esto pudo basarse en consideraciones astronómicas (año de 360 días). También se opina que eligieron cada ángulo de un triángulo equilátero como ángulo fundamental y lo subdividieron en 60 partes iguales.

Patrones de Tiempo

La unidad básica de tiempo, usada en todo el mundo científico, es el **segundo**.

Hasta hace unas décadas atrás no se había encontrado nada mejor que la Tierra como "reloj patrón" y, por lo tanto, todos los relojes se calibraban de acuerdo a la duración del día (período rotacional de la Tierra) y se definía

1 segundo como 1/86.400 de un día solar medio.

(86.400 = 24 · 60 · 60)

Sin embargo, a medida que las mediciones se han ido haciendo más y más precisas, se ha encontrado que con el paso de los siglos la Tierra ha aumentado levemente su período medio de rotación. La dificultad que esto presentaba fue solucionada, por acuerdo en conferencias internacionales en 1955 y 1960, refiriendo el segundo a un período particular:

Año trópico 1900 = 31 556 925,9747 segundos

(365 días 5 horas 48 minutos 45,9747 segundos)

Recientemente se ha encontrado que ciertas radiaciones naturales originadas en sistemas atómicos, proporcionan una referencia muchísimo más constante que la Tierra para medida de tiempo; en ello se basan los llamados "relojes atómicos".

En 1967, por acuerdo internacional, se adoptó para el **segundo** la siguiente definición:

> El segundo es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133 no perturbado.

Las sucesivas definiciones no implican, dentro de los márgenes de errores de las respectivas mediciones, cambio en la duración del segundo. A estas definiciones corresponden *patrones* cada vez más precisos y más directamente reproducibles. En los relojes atómicos se ha alcanzado una precisión mejor que una parte por 100 billones.

Convenios sobre unidades

- Cada unidad de medición la representamos por un símbolo o abreviatura, encerrada entre paréntesis cuadrados.

  Ejemplos: 1 segundo …. 1[s] 1 minuto .... 1[min]
  1 hora …. 1[h] 1 día .... 1[d]

- Los símbolos para unidades los usamos siempre en **singular**.

  Ejemplo: Gramaticalmente escribimos y leemos : 1 año, 15 años
  pero simbólicamente escribimos : 1[año], 15[año]

- Para relaciones entre unidades de una misma cantidad física usamos la palabra **equivalencia**, y la simbolizamos por $\hat{=}$

  Ejemplos: 1[d] $\hat{=}$ 24[h] 1[min] $\hat{=}$ 60[s]

Ejercicios

1-1) Construya un *péndulo*. Puede hacerlo amarrando un objeto "pequeño" y "pesado" al extremo de un hilo de unos 20[cm] de largo y sujetando el otro extremo. Use un reloj corriente, ojalá con segundero, y cuente un cierto número de oscilaciones para determinar su **período**.

1-2) Cierre "mal" una llave de agua y déjela gotear ¿cuántas gotas caen por minuto? ¿Se podría usar este fenómeno para establecer una unidad de tiempo?

1-3) Establezca experimentalmente el tiempo entre un latido del corazón y el siguiente (cuente más de un centenar de latidos). Si dicho tiempo fuera tomado como unidad ¿cuál sería la magnitud de una hora expresada en dichas unidades?

1-4) Juegue con una pelota de goma. Estime cuántos rebotes puede dar en una hora.

1-5) Estime lo que demoraría en contar, sin interrupción, desde uno a un millón. Tome en cuenta que no demora lo mismo al contar, por ejemplo: .... 87, 88, 89, ... , 874316, 874317, 874318, ... Haga mediciones.

1-6) Suponga que un reloj de péndulo sin "esfera" está colgado en una muralla. Se observa que este reloj emite un sonido a la *una*, dos sonidos a las *dos*, ..., y que además emite un sonido en las medias horas; la pesa que controla el sonido baja 1[cm] por cada sonido emitido. Gradúe las horas en la muralla.

1-7) Una nota redonda dura *4 tiempos*. Averigüe qué significa esto o indique la duración en segundos de una nota redonda. Estime cuánto dura el "tiempo" para los músicos.

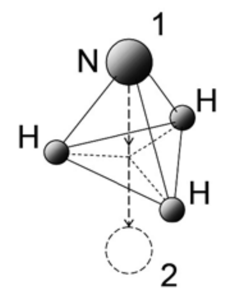


1-8) En la proyección de una película pasan 24 cuadros en 1[s] ¿Cuántos cuadros hay en una película que dura 1[h] 30[min]? Si cada cuadro mide 15[mm] ¿qué longitud tiene la película?

1-9) En la pantalla de un televisor antiguo aparecen *20 cuadros* por segundo. En cada cuadro el haz de electrones marca 400 líneas en la pantalla. ¿Cuánto demora el haz en recorrer una sola vez la pantalla de lado a lado? ¿Cuántas veces el haz recorre la pantalla de lado a lado en un programa de 1/2 hora?

1-10) Una campanilla hace un "tic" cada 0,02[s]. ¿En cuánto tiempo, en horas, efectúa diecinueve mil doscientos cincuenta y tres tics?

1-11) En un "reloj de amonio" el átomo de N de la molécula NH_3 demora $2{,}5 \cdot 10^{-12}[\mathrm{s}]$ en cada oscilación (ir de la posición 1 a la 2 y regresar de la posición 2 a la 1, indicadas en la figura). Determine el número de oscilaciones del átomo de N en un segundo. Estime el número de oscilaciones del átomo de N en el tiempo que el minutero de un reloj da 10^5 vueltas.



1-12) Tenemos un reloj cuya esfera está graduada del 1 al 6 en horas y cuyo minutero da una vuelta por cada hora. Determine el número de vueltas que da el horario en 2 semanas. Determine las vueltas que hubiese dado el minutero si el reloj estuviese funcionando desde hace 18 años.

1-13) Para un alumno de la educación media la "hora de clase" dura 45 minutos. Su horario es de 9 horas de clase de lunes a miércoles, y de 7 horas de clase los jueves y viernes. Considerando que el año escolar tiene 30 semanas efectivas de clase, determine el tiempo en minutos que un alumno está en clases durante dicho periodo. Dé el resultado en horas y también en segundos.

1-14) Un avión hace un viaje diario de $3\frac{1}{2}$ horas de ida y $3\frac{3}{4}$ horas de vuelta. Cada mes pasa 2 días en revisión y cada año una semana. Calcule aproximadamente las horas de vuelo en tres años, si los domingos no se trabaja.

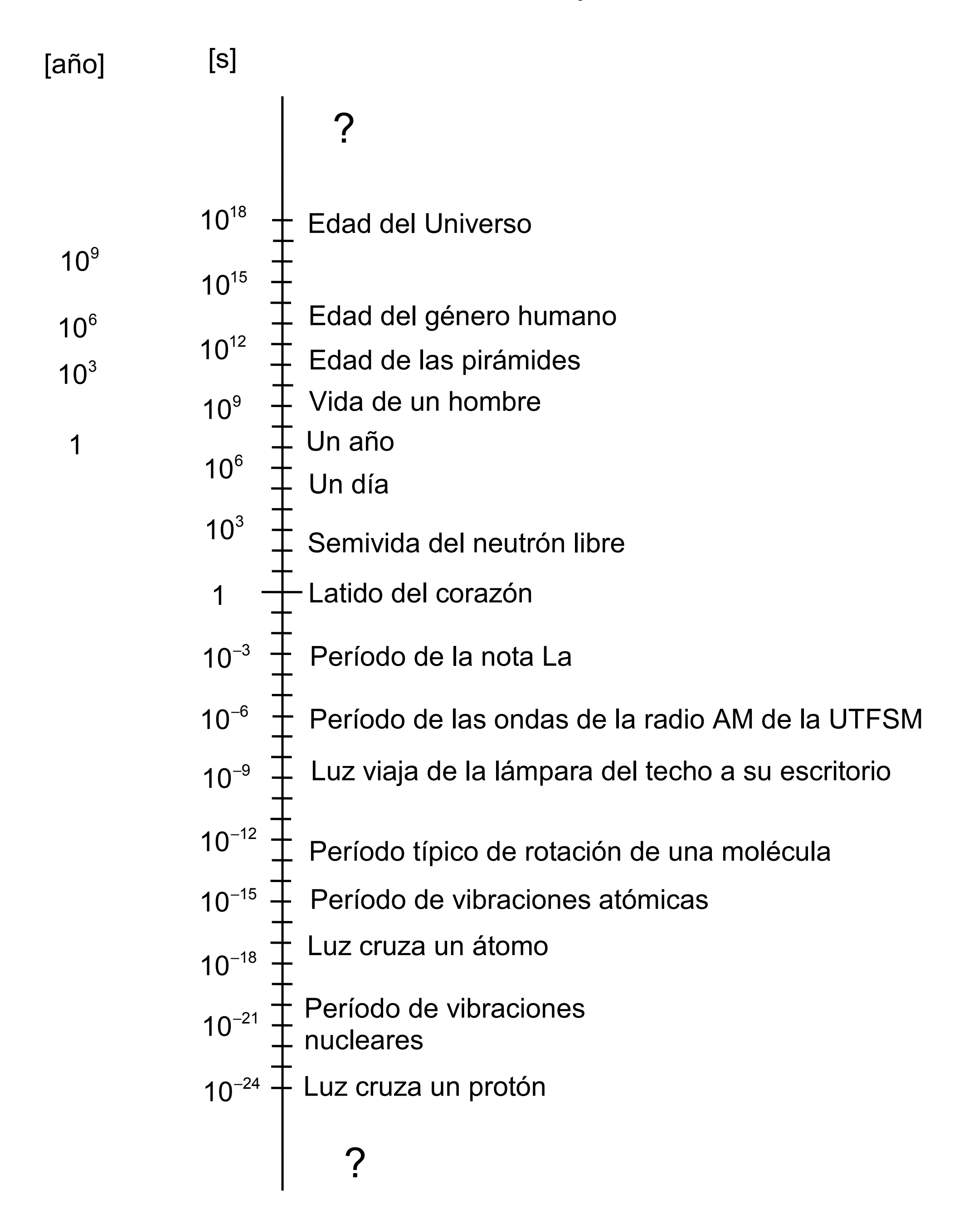
1-15) El *ritmo* de trabajo del motor de cierto artefacto industrial es: funcionar durante 30[s] y detenerse por 10[min]. Calcule el tiempo de funcionamiento durante el día; dé su resultado en horas.

Tiempo. Intervalos de tiempo

Sin duda usted puede apreciar en forma directa algunos intervalos de tiempo o duraciones: 1[s], latido del corazón; 1[min], cepillarse los dientes; 1[h], almorzar y tomarse un cafecito; 1[d], entre desayuno y desayuno; 1[semana], de domingo a domingo; 1[mes], entre pagos de arriendo; 1[año], entre el feliz día de iniciación de un curso y el siguiente, después de vacaciones de verano; como 100[año], desde el "tiempo de la abuelita".

Para tiempos menores o mayores no tenemos nociones directas, sin embargo, en diferentes situaciones físicas se presentan tiempos *muy pequeños* tales como el que emplea la luz en cruzar un protón, que es cerca de un cienmiltrillonésimo de segundo $\left(10^{-23}[s]\right)$ o el período de vibraciones nucleares que son del orden de un miltrillonésimo de segundo $\left(10^{-21}[s]\right)$; o tiempos *muy grandes* como la edad del Universo estimada en algo más de trece mil millones de años ($13 \cdot 10^9$ [año], aproximadamente $4,3 \cdot 10^{17}$ [s]) o también la edad de la Tierra que es alrededor de cinco mil millones de años ($5 \cdot 10^9$ [año] o $1,6 \cdot 10^{17}$[s]) o la edad de una pirámide de 5.000 años ($5 \cdot 10^3$ [año] ó $1,6 \cdot 10^{11}$[s]).

Examine detenidamente las magnitudes de éstos y otros tiempos observando el gráfico presentado en la página siguiente.



Nota: Para representar este amplio rango de intervalos de tiempo, de 10^{-24} [s] a 10^{18} [s], hemos usado una **escala de potencia de 10**. Posteriormente usted encontrará la justificación y el método para construir tales escalas.

Notación Científica

Al trabajar en diferentes campos de la Física, y de otras Ciencias Naturales, es frecuente encontrar que las cantidades físicas (tiempo, distancia, rapidez, aceleración, masa, densidad, temperatura, fuerza, energía, ...) se presentan en ciertos casos con valores numéricos "muy grandes" (millones, billones, cuatrillones, ...) y en otros casos valores numéricos "muy pequeños" (millonésimas, trillonésimas, ...).

Por ejemplo, para el caso del tiempo, hemos mencionado entre otros, los siguientes valores:

- Estimación de la edad de la Tierra, en segundos:

  ciento sesenta mil billones ……………………….. 160 000 000 000 000 000

- Período de vibraciones nucleares, en segundos:

  un miltrillonésimo …………………………. 0,000 000 000 000 000 000 001

La forma de escritura de estos números es incómoda, ofrece dificultades de visualización y, además, es inconveniente para operar con ellos. Estas dificultades no se evitan aún cuando se use una recomendación internacional de formar grupos de tres cifras al escribir un número de muchas cifras.

Resulta conveniente adoptar una forma abreviada de escritura para tales números, que permita además leerlos sin estar contando ceros en cada oportunidad y facilite operaciones aritméticas entre ellos.

Un buen método es usar las *potencias de diez* y sus propiedades.

Recordemos algunas expresiones de *potencias de 10*:

uno ……………………………………………………………….. $1 = 10^0$

diez ………………………………………………………………... $10 = 10^1$

cien ………………………………………………… $100 = 10 \cdot 10 = 10^2$

mil …………………………………… $1000 = 100 \cdot 10 = 10^2 \cdot 10^1 = 10^3$

cien mil ………………………… $100\,000 = 100 \cdot 1000 = 10^2 \cdot 10^3 = 10^5$

un millón ………………… $1\,000\,000 = 1000 \cdot 1000 = 10^3 \cdot 10^3 = 10^6$

mil millones ………………………………………… $10^3 \cdot 10^6 = 10^9$

un billón …………………………………… $10^6 \cdot 10^6 = \left(10^6\right)^2 = 10^{12}$

cien mil billones …………………………….... $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10^{12} = 10^{17}$

un décimo ………………………………… $0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$

un centésimo ……………………………… $0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

un cienmilésimo …………………………… $0{,}00001 = \frac{1}{10^5} = 10^{-5}$

un millonésimo…………………………………………… $\frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

un miltrillonésimo ……………………….. $\frac{1}{10^3 \cdot \left(10^6\right)^3} = \frac{1}{10^{21}} = 10^{-21}$

Todo número real puede ser escrito usando factores y potencias de 10 adecuados. Por ejemplo:

- Ya que el número 300 es igual a $3 \cdot 100$; igual a $30 \cdot 10$; igual a $0{,}3 \cdot 1000$; igual a ...; podemos escribir:

$$300 = 3 \cdot 10^2 = 30 \cdot 10^1 = 0{,}3 \cdot 10^3 = ...$$

- Para el número 325 tenemos:

$$325 = 32{,}5 \cdot 10^1 = 3{,}25 \cdot 10^2 = 0{,}325 \cdot 10^3 = \ldots$$

- Para el número negativo –325 resulta:

$$-325 = -3{,}25 \cdot 10^2 \quad (\text{ distinto a } 3{,}25 \cdot 10^{-2} = 0{,}0325 \text{)}$$

- El número 5 427 285 puede ser escrito como:

$$5\ 427\ 285 = 54{,}27285 \cdot 10^5 = 5{,}427285 \cdot 10^6 = 0{,}5427285 \cdot 10^7$$

- Ya que el número 0,007 es igual a $7 \cdot 0{,}001$ escribimos:

$$0{,}007 = 7 \cdot 10^{-3} = 70 \cdot 10^{-4} = 700 \cdot 10^{-5} = ...$$

- Análogamente:

$$0{,}000\ 006\ 23 = 623 \cdot 10^{-8} = 62{,}3 \cdot 10^{-7} = 6{,}23 \cdot 10^{-6} = 0{,}623 \cdot 10^{-5} = \ldots$$

Las diferentes expresiones usadas en estos ejemplos para escribir cada número son todas correctas; con el objeto de obtener una escritura uniforme, es costumbre en Física, y en otras ciencias, adoptar de preferencia una de tales formas, usando el siguiente

Convenio: Al escribir un número real usando potencia de 10 se elegirá un factor de valor absoluto entre 1 y 10 acompañando a la potencia de 10 correspondiente:

$$\text{NÚMERO REAL} = \begin{pmatrix} \text{factor numérico} \\ \text{de valor absoluto} \\ \text{entre 1 y 10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{potencia de 10} \\ \text{de exponente adecuado} \end{pmatrix}$$

$$N = f \cdot 10^{\alpha} \quad ; \quad 1 \leq |f| < 10$$

Usualmente se hace referencia a este convenio con el calificativo de **notación científica**.

Para efectuar operaciones aritméticas con números escritos en *notación científica* usamos las reglas para operar con potencias. Esto es, si consideramos los números:

$$N_1 = A \cdot 10^{\alpha} \quad \text{y} \quad N_2 = B \cdot 10^{\beta}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} N_1 \cdot N_2 &= \left(A \cdot 10^{\alpha}\right) \cdot \left(B \cdot 10^{\beta}\right) = \left(A \cdot B\right) \cdot 10^{\alpha+\beta} \\ N_1 / N_2 &= \left(A/B\right) \cdot 10^{\alpha-\beta} \,; N_2 \neq 0 \\ \left(N_1\right)^p &= \left(A \cdot 10^{\alpha}\right)^p = \left(A\right)^p \cdot 10^{\alpha \cdot p} \,; \text{p real} \end{aligned}$$

Le advertimos que no hay reglas generales para la suma:

$$N_1 + N_2 = A \cdot 10^{\alpha} + B \cdot 10^{\beta}$$

sólo en el caso particular de exponentes iguales $\left(\alpha = \beta\right)$, resulta:

$$N_1 + N_2 = A \cdot 10^{\alpha} + B \cdot 10^{\beta} = A \cdot 10^{\alpha} + B \cdot 10^{\alpha} = \left(A + B\right) \cdot 10^{\alpha}$$

Ejemplos

- Calculemos

$$U = \frac{\left(4,21 \cdot 10^{3}\right) \cdot \left(2,0974 \cdot 10^{-12}\right)}{\left(9,6042 \cdot 10^{-5}\right)^{2} \cdot \left(7,30 \cdot 10^{7}\right)}$$

$$U = \frac{4,21 \cdot 2,0974 \cdot 10^{3} \cdot 10^{-12}}{\left(9,6042\right)^{2} \cdot 7,30 \cdot 10^{-10} \cdot 10^{7}} = \frac{4,21 \cdot 2,0974}{\left(9,6042\right)^{2} \cdot 7,30} \cdot 10^{3-12-(-10)-7}$$

$$\simeq 0,0131135 \cdot 10^{-6} \simeq 1,31 \cdot 10^{-8}$$

donde hemos dado el resultado final **aproximado** a tres cifras.

- Calculemos $Z = \sqrt[3]{7,48 \cdot 10^{-5}}$

$$Z = \sqrt[3]{7,48 \cdot 10^{-5}} = \left(7,48 \cdot 10^{-5}\right)^{1/3} = \left(74,8 \cdot 10^{-6}\right)^{1/3}$$

$$Z = \left(74,8\right)^{1/3} \cdot 10^{-6/3} \simeq 4,21 \cdot 10^{-2}$$

fíjese usted que en este caso, antes de calcular la raíz cúbica hemos *acomodado* la potencia de 10 para que su exponente sea un múltiplo de 3.

Aproximaciones numéricas

Ya sea por el resultado de una medición o por efectos de cálculos, una cantidad física puede ser comunicada mediante un número (número de medición) que contenga más cifras (dígitos) que los que sean requeridos en una situación particular. En tal caso, efectuamos una aproximación numérica.

* Supongamos que nos informan que la cantidad física γ tiene el valor:

$$\gamma = 1,758796 \cdot 10^{11} \text{ [unidad de } \gamma]$$

y que en un caso dado sea suficiente usar sólo cuatro, tres o menos cifras en el factor numérico. Entonces, sin preocuparnos de la unidad de medición, resulta:

		aproximación a:
$\gamma = 1,758796 \cdot 10^{11}$	$\simeq 1,759 \cdot 10^{11}$	4 cifras numéricas
	$\simeq 1,76 \cdot 10^{11}$	3 cifras numéricas
	$\simeq 1,8 \cdot 10^{11}$	2 cifras numéricas
	$\simeq 2, \cdot 10^{11}$	1 cifra numérica
	$\simeq 10^{11}$	la potencia de 10

** Veamos otros ejemplos usando algunas constantes físicas. Como en esta ocasión sólo nos interesan los aspectos numéricos, no indicamos las respectivas unidades de medición:

			aproximación a:
$6{,}673 \cdot 10^{-8}$	$\simeq$	$6{,}67 \cdot 10^{-8}$	3 cifras numéricas
	$\simeq$	$6{,}7 \cdot 10^{-8}$	2 cifras numéricas
	$\simeq$	$7, \cdot 10^{-8}$	1 cifra numérica
	$\simeq$	10^{-7}	potencia de 10
$4{,}80298 \cdot 10^{-10}$	$\simeq$	$4{,}8 \cdot 10^{-10}$	2 cifras numéricas
	$\simeq$	10^{-10}	potencia de 10
$1{,}05450 \cdot 10^{-34}$	$\simeq$	$1{,}054 \cdot 10^{-34}$	4 cifras numéricas
	$\simeq$	$1{,}1 \cdot 10^{-34}$	2 cifras numéricas
	$\simeq$	10^{-34}	potencia de 10
$3{,}7415 \cdot 10^{-5}$	$\simeq$	$3{,}742 \cdot 10^{-5}$	4 cifras numéricas
	$\simeq$	$4, \cdot 10^{-5}$	1cifras numéricas
	$\simeq$	10^{-5}	potencia de 10
$5{,}0505 \cdot 10^{-27}$	$\simeq$	$5{,}050 \cdot 10^{-27}$	4 cifras numéricas
	$\simeq$	$5{,}05 \cdot 10^{-27}$	3 cifras numéricas
	$\simeq$	$5{,}0 \cdot 10^{-27}$	2 cifras numéricas
	$\simeq$	$5, \cdot 10^{-27}$	1cifra numérica
	$\simeq$	10^{-26}	potencia de 10

Fíjese que en algunas de estas aproximaciones hemos escrito:

$$7, \cdot 10^{-8} \qquad 4, \cdot 10^{-5} \qquad 5, \cdot 10^{-27}$$

donde se ha colocado la **coma** después de los números 7 y 4 y 5 para indicar que ellos no son los enteros 7 y 4 y 5. Más adelante explicaremos la conveniencia de esta forma de escritura y su extensión a otros casos.

*** Para efectuar aproximaciones numéricas no es necesario que el número esté escrito en notación científica. Veamos dos casos y comparemos:

$386{,}72$	$\simeq$	$386{,}7$	$3{,}8672 \cdot 10^{2}$	$\simeq$	$3{,}867 \cdot 10^{2}$
	$\simeq$	387		$\simeq$	$3{,}87 \cdot 10^{2}$
	$\simeq$	390		$\simeq$	$3{,}9 \cdot 10^{2}$
	$\simeq$	400		$\simeq$	$4, \cdot 10^{2}$
$980{,}665$	$\simeq$	$980{,}7$	$9{,}80665 \cdot 10^{2}$	$\simeq$	$9{,}807 \cdot 10^{2}$
	$\simeq$	981		$\simeq$	$9{,}81 \cdot 10^{2}$
	$\simeq$	1000		$\simeq$	10^{3}

Note que al efectuar aproximaciones de números no escritos en *notación científica*, la cantidad de cifras enteras no disminuye e incluso puede aumentar, como ocurre en el segundo ejemplo. Esto sucede así, para mantener la **magnitud** del número al hacer la aproximación.

**** En la mayoría de los casos la aproximación se hace en forma directa, subiendo en una unidad o manteniendo la cifra en la posición elegida, valorando las cifras que siguen a la derecha de ella. Examinemos algunos ejemplos de *aproximación a*:

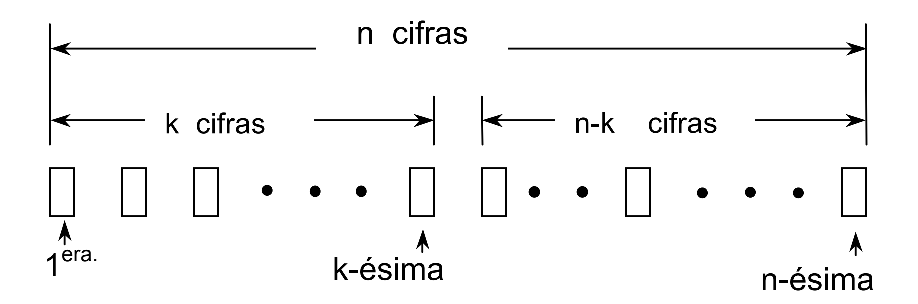
$7,2501$	$\simeq$	$7,25$	3 cifras numéricas
	$\simeq$	$7,3$	2 cifras numéricas
$7,2499$	$\simeq$	$7,25$	3 cifras numéricas
	$\simeq$	$7,2$	2 cifras numéricas
$8,35$	$\simeq$	$8,4$	2 cifras numéricas
$8,3500$	$\simeq$	$8,35$	3 cifras numéricas
$8,3499$	$\simeq$	$8,35$	3 cifras numéricas
	$\simeq$	$8,3$	2 cifras numéricas

Note que si la aproximación a 2 cifras de los números 7,2501 y 8,3499 se hubiese efectuado a partir de los números ya aproximados a 3 cifras daría resultados diferentes a los obtenidos, en contradicción con los acuerdos indicados.

Resumiendo, para aproximar (redondear) un número dado, lo consideramos siempre con todas sus cifras, adoptando el siguiente

Convenio: Para aproximar a k cifras un número de n cifras $(n > k)$, acordamos las siguientes reglas para la $k-$ ésima cifra (la que ocupa el lugar número k contando de izquierda a derecha):

- aumenta en una unidad si el número formado por las últimas $n-k$ cifras es mayor que $5 \cdot 10^{n-k-1}$
- no se modifica si el número formado por las últimas $n-k$ cifras es menor que $5 \cdot 10^{n-k-1}$
- aumenta si es, impar y no se modifica si es par cuando el número formado por las últimas $n-k$ cifras es igual a $5 \cdot 10^{n-k-1}$



Orden de magnitud

En varios de los ejemplos precedentes aproximamos un número a la "potencia de 10" más representativa de él:

$$1{,}758796 \cdot 10^{11} \simeq 10^{11}$$
$$6{,}673 \cdot 10^{-8} \simeq 10^{-7}$$
$$3{,}7415 \cdot 10^{-5} \simeq 10^{-5}$$
$$5{,}0505 \cdot 10^{-27} \simeq 10^{-26}$$
$$9{,}80665 \cdot 10^{3} \simeq 10^{4}$$

Vocabulario

La aproximación de un número a la "potencia de 10" más representativa de él define el **orden de magnitud** del número.

El orden de magnitud del valor de una cantidad física nos permite visualizar en forma inmediata su grandeza o pequeñez relativa en diferentes situaciones.

Para obtener con facilidad el orden de magnitud de una cantidad física expresada en términos de otras cantidades físicas, conviene operar con los valores de ellas en notación científica aproximada a una cifra.

Convenio

La expresión: " F tiene el orden de magnitud 10^{α}" la simbolizamos por: $F \sim 10^{\alpha}$

Nos parece importante que Ud., como estudiante de Ingeniería, se acostumbre a **estimar**, valorar en forma rápida aunque aproximada, cantidades físicas. Use para ello *órdenes de magnitud*.

Veamos algunos **ejemplos** simples usando *órdenes de magnitud* en relación a "tiempo":

* Una de las definiciones del segundo da la equivalencia:

$$1[\text{año}] \triangleq 31556925{,}9747[\text{s}] = 3{,}15569259747 \cdot 10^{7}[\text{s}]$$

de ello resulta el *orden de magnitud*: $1[\text{año}] \sim 10^{7}[\text{s}]$.

Entonces, la vida media de un hombre, en segundos, tiene el orden de magnitud:

$$70[\text{año}] \simeq 70 \cdot 3 \cdot 10^{7}[\text{s}] \simeq 2{,}1 \cdot 10^{9}[\text{s}] \sim 10^{9}[\text{s}]$$

** Como $1[\text{d}] \triangleq 86400[\text{s}] = 8{,}64 \cdot 10^{4}[\text{s}]$

resulta el orden de magnitud: $1[\text{d}] \sim 10^{5}[\text{s}]$.

Una antigüedad del orden de $10^{11}[\text{s}]$ equivale, en orden de magnitud, a $10^{6}[\text{d}]$.

Ejercicios

1-16) Escriba en la forma de un *factor* por una *potencia de 10* los siguientes números:

5345 0,00128 15,329 21,0018

18.000.000.000 - 0,000000158

1-17) Escriba en *notación científica* los siguientes números:

75000000000000 0,000000017896 45763200000000

6400000000132 - 0,0000480000092 - 52800,0032

1-18) Aproxime a 3 cifras dándole la forma de *notación científica* a:

457,53829 0,000 034 519 184,4979

- 725,490 000 000 - 0,00185

1-19) Calcule aproximadamente el valor de las siguientes expresiones, escribiendo el resultado aproximado a una cifra.

$$U = \frac{1{,}181 \cdot 10^{5} \cdot 6{,}34 \cdot 10^{7}}{3{,}6 \cdot 10^{-8}} \qquad V = \frac{5{,}4 \cdot 10^{8} \cdot 3{,}4 \cdot 10^{-9}}{1{,}2 \cdot 10^{9}}$$

$$W = 7{,}4 \cdot 10^{5} + 0{,}257 \cdot 10^{5} \qquad X = 1{,}43 \cdot 10^{-9} + 6{,}8 \cdot 10^{-10}$$

1-20) Dada la expresión

$$Y = \frac{4 \cdot \left(8{,}17 \cdot 10^{-5}\right)^{2} \cdot \left(7{,}41 \cdot 10^{6}\right)}{9{,}065 \cdot 10^{4}}$$

calcule el valor aproximado a 1 cifra.

1-21) Cierto número S está determinado por la relación:

$$S = x - \frac{x^{3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^{5}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - + \ldots$$

Para $x = 0{,}524$ calcule el valor de S aproximado a 3 cifras considerando, sucesivamente, sólo el primero, los dos primeros y los tres primeros términos. Determine hasta qué término *vale la pena* tomar en cuenta para obtener S con tres cifras.

1-22) Escriba el orden de magnitud de cada uno de los siguientes números:

89 5789 14.528.232 150.738,64

0,000000483 $4{,}57 \cdot 10^{9}$ $0{,}18 \cdot 10^{-5}$ $5{,}001 \cdot 10^{4}$

1-23) Use los siguientes valores de constantes físicas en un cierto sistema de unidades de medición:

$$c \simeq 2{,}998 \cdot 10^{8} \qquad h \simeq 6{,}626 \cdot 10^{-34}$$

$$e \simeq 1{,}6022 \cdot 10^{-19} \qquad \varepsilon_0 \simeq 8{,}854 \cdot 10^{-12}$$

$$m \simeq 9{,}1095 \cdot 10^{-31} \qquad k \simeq 1{,}381 \cdot 10^{-23}$$

y el valor del número $\pi \simeq 3$ para evaluar (dando el resultado con 1 cifra numérica) y determinar el *orden de magnitud* de las siguientes expresiones:

$$p = m \cdot c \qquad \lambda = \frac{h}{m \cdot c} \qquad \nu = \frac{m \cdot c^2}{h}$$

$$\alpha = \frac{e^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot h \cdot c} \qquad R = \frac{\pi^2 \cdot m \cdot e^4}{\varepsilon_0 \cdot c \cdot h^3}$$

$$r = \frac{e^2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot h \cdot c} \qquad a = \frac{\varepsilon_0 \cdot h^2}{\pi \cdot m \cdot e^2} \qquad E = \frac{m \cdot e^4}{8 \cdot \varepsilon_0^2 \cdot h^2}$$

$$\mu = \frac{h \cdot e}{2 \cdot m} \qquad \sigma = \frac{2\pi^5 \cdot k^4}{15 \cdot h^3 \cdot c^2}$$

1-24) Considerando que $2^{10} = 1024 \sim 10^3$, determine el orden de magnitud de 2^{56} y de 2^{20}. Determine el orden de magnitud de la expresión $N \cdot 2^{-t/T}$ con $N \simeq 6{,}02 \cdot 10^{26}$, $t \simeq 2{,}8 \cdot 10^{8}$ y $T \simeq 7{,}0 \cdot 10^{6}$.

1-25) Estime el tiempo, en [s], que duerme durante toda la vida un chileno medio.

1-26) ¿Cuántas letras podría escribir ininterrumpidamente en un año? Sugerencia: puede estimar el número de letras que escribe en media hora, contando las líneas usadas y las letras por línea ...

1-27) Observe a un fumador. Estimando cuánto demora en fumar cada cigarrillo y cuántos cigarrillos promedio fuma al día, ¿qué fracción de cada año lo ha empleado en fumar?

1-28) Imagine que un reloj con *manecillas* hubiere funcionado desde hace muchos siglos. ¿Cuántas vueltas hubiera completado el **minutero** desde la construcción de la pirámide de Cheops hasta hoy?

1-29) Si la *edad del universo* se tomara como **un día** ¿cuántos segundos ha existido el género humano?

Edades arqueológicas y geológicas

Para tiempos algo mayores que un día, Ud. puede contar días; para tiempos mayores puede contar meses y después años. Pero para medidas de tiempo más largas, cuando ya no es posible contar años, hay que buscar otros medios para la medición del tiempo. En algunos casos, es posible usar indicadores del transcurso del tiempo directamente proporcionados por la naturaleza, como los anillos en troncos de árboles, o capas sedimentarias depositadas en fondos de ríos y océanos.

El primero de esos indicadores mencionados, un verdadero contador de años, es un buen auxiliar de la historia y la arqueología, aunque está limitado a unos pocos miles de años, lapso de tiempo para el cual hay buena información. En efecto, podemos retroceder hasta unos 5.000 años en el pasado a través de registros de acontecimientos en la forma de libros, papiros, tabletas cuneiformes e inscripciones jeroglíficas. Al retroceder más en el pasado, los registros son cada vez más escasos, a pesar que descubrimientos arqueológicos están constantemente agregando pedacitos de información, alcanzando a veces hasta unos 15.000 años. Hasta hace una pocas décadas no se tenían métodos para poner fechas a los acontecimientos de tal o más antigüedad.

Más aún, esa cantidad de años es trivial en comparación con los intervalos de tiempo muchísimo más grandes de los procesos geológicos. Para ellos ha sido útil el segundo de los mencionados indicadores de tiempo. Los geólogos han tomado muestras de la corteza terrestre, generalmente han encontrado que ella está conformada por numerosas capas rocosas superpuestas unas sobre las otras; ellas se han originado por consolidación de capas sedimentarias formadas al acumularse productos de erosión durante millones de años. Eventualmente han quedado grabadas en las rocas formas de la flora y fauna que fueron atrapadas cuando el sedimento estaba siendo depositado, guardando así información de lo vivido en aquellos tiempos.

Estudios geológicos y paleontológicos ayudan, a menudo, a descifrar el orden en que se depositaron las capas sedimentarias y aún a estimar (por comparación con las rapideces de erosiones en el presente siglo) el probable tiempo de formación de cada capa. Esto ha permitido indicar duraciones relativas de procesos geológicos; pero hasta una fecha reciente había poco en qué basarse para ubicar tales eventos en una escala de tiempo precisa en términos de una unidad común, como año.

En la actualidad se dispone de una poderosa técnica basada en la **radiactividad**, para fechar sucesos históricos y prehistóricos.

Vocabulario

El átomo se caracteriza por el número de protones y de neutrones de su núcleo.

La suma del número de protones más el número de neutrones de un núcleo se llama **número másico**. Lo simbolizamos por A. El número de protones de un núcleo atómico se llama **número atómico** y se designa por Z.

Un átomo (o su núcleo) usualmente se escribe: ${}_{Z}\text{SIMBOLO}^{A}$, por ejemplo, ${}_{6}C^{14}$ corresponde a un átomo de carbono con 6 protones y 8 neutrones.

Un conjunto de átomos de igual número atómico se denomina **elemento químico** o especie atómica.

Átomos cuyos núcleos tienen igual número de protones (igual Z) y distinto número de neutrones se denominan **isótopos** del elemento correspondiente al número atómico Z. Los distintos isótopos de un mismo elemento tienen igual comportamiento químico y diferente comportamiento físico.

Algunos isótopos son **estables** y otros son **radiactivos**.

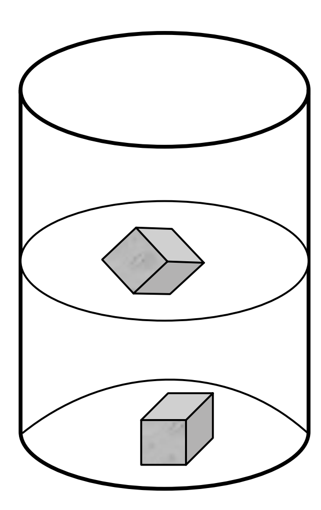
Los isótopos radiactivos tienden espontáneamente a transformarse (desintegrarse o decaer) en isótopos de otros elementos, formando configuraciones más estables y liberando energía. Este proceso se denomina **radiactividad natural**.

Hay varios modos de decaimiento radiactivo, entre ellos están la emisión de partículas α y β , de fotones (rayos γ) y la fisión espontánea.

El caso del cubo misterioso

Un profesor presenta una demostración a sus alumnos. Toma dos cubos de hielo, ambos igualmente fríos, duros, transparentes y húmedos y los deposita en un vaso con agua. Sucede que uno de ellos flota y el otro se va al fondo.

Para demostrar que no hay objetos transparentes encerrados en el cubo que se hundió, el profesor saca los cubos de ese vaso y los coloca cada uno en un vaso diferente y espera que se derritan; los líquidos que se producen tienen el mismo aspecto y el mismo sabor y podría pedirse que se realizaran con ellos reacciones químicas, las que no mostrarían diferencias.



¿Qué ha pasado? El cubo que se sumergió estaba hecho de “agua pesada”; los átomos de hidrógeno de esa agua eran “hidrógeno pesado” o **deuterio**.

El elemento hidrógeno tiene dos isótopos estables, el hidrógeno ordinario $\left({}_1H^1\right)$ y el deuterio $\left({}_1H^2\right)$ y un isótopo radiactivo, el tritio $\left({}_1H^3\right)$.

Cualquier cantidad de agua que usted beba tiene algo de deuterio; en una muestra corriente de agua hay, en término medio, 6500 átomos de hidrógeno ordinario por un átomo de deuterio.

Una propiedad de las substancias radiactivas

Se ha determinado experimentalmente que las substancias radiactivas presentan una cierta *regularidad* en su desintegración que los hace ser útiles como *relojes*:

> El número de núcleos de cierta muestra de material decrece en igual fracción en el transcurso de tiempos iguales.

Para aclarar el sentido de esta propiedad, considere la situación particular siguiente : Si en cierto instante hay N núcleos en la muestra y después de un intervalo de tiempo T quedan sin desintegrarse la **mitad** de los núcleos, $\frac{1}{2}N$, entonces al transcurrir otro intervalo de tiempo T quedará la mitad de esos

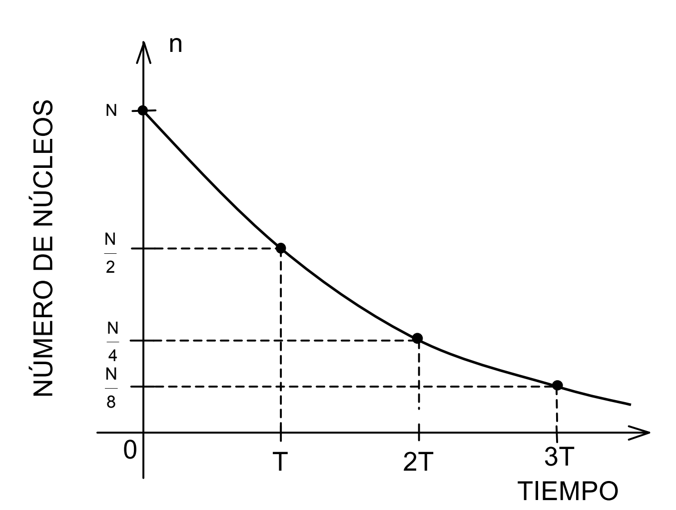
núcleos: $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}N\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2 N=\frac{1}{4}N$ y después de otro nuevo intervalo T quedará $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}N\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3 N=\frac{1}{8}N$ núcleos sin desintegrarse; así sucesivamente.

Esta propiedad radiactiva se puede expresar matemáticamente por:

- la ecuación : $n=N\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=N\cdot 2^{-t/T}$

- la tabla de valores y el gráfico :

t	n
0	N
T	N/2
2T	N/4
3T	N/8



donde **n** representa al número de núcleos que permanecen después del tiempo **t** .

¡Atención: la relación $n=N\cdot 2^{-t/T}$ describirá cuantitativamente a este fenómeno físico sólo si los tiempos t y T se expresan en la misma unidad!

El tiempo T, propio de cada isótopo radiactivo, se denomina la semivida de ese isótopo y se define como el tiempo necesario para que se desintegren, en término medio, la mitad de los núcleos de cualquier muestra de él.

Se debe tener presente que la relación $n=N\cdot 2^{-t/T}$ se refiere a procesos estadísticos de un enorme número de átomos de una substancia.

Los físicos han determinado, usando diferentes métodos, la semivida de una gran cantidad de isótopos. Le damos unos pocos ejemplos:

Elemento	**Núcleo**	**Semivida**	**Abundancia natural %**
(Neutrón)	$_{0}n^{1}$	$12[\text{min}]$	
Hidrógeno	$_{1}H^{1}$	**infinita**	99.985
	$_{1}H^{2}$	**infinita**	0,015
	$_{1}H^{3}$	$12,26[\text{año}]$	
Helio	$_{2}He^{4}$	**infinita**	99.99987
	$_{2}He^{5}$	$2 \cdot 10^{-21}[\text{s}]$	
Berilio	$_{4}Be^{8}$	$3 \cdot 10^{-16}[\text{s}]$	
	$_{4}Be^{9}$	**infinita**	100
	$_{4}Be^{7}$	$2,7 \cdot 10^{6}[\text{año}]$	
Carbono	$_{6}C^{12}$	**infinita**	98,89
	$_{6}C^{14}$	$5770[\text{año}]$	
Plomo	$_{82}Pb^{204}$	$1,4 \cdot 10^{17}[\text{año}]$	1,48
	$_{82}Pb^{208}$	**infinita**	52,3
Polonio	$_{84}Po^{212}$	$3 \cdot 10^{-7}[\text{s}]$	
Uranio	$_{92}U^{235}$	$7,1 \cdot 10^{8}[\text{año}]$	0,7
	$_{92}U^{238}$	$4,5 \cdot 10^{9}[\text{año}]$	99,3
Neptunio	$_{93}Np^{237}$	$2,1 \cdot 10^{6}[\text{año}]$	

En esta tabla se aprecia que las semividas de los diferentes decaimientos varían desde una pequeñísima fracción de segundo ($2 \cdot 10^{-21}[\text{s}]$ para helio 5) hasta cientos de miles de billones de años ($1,4 \cdot 10^{17}[\text{año}]$ para plomo 204).

Un ejemplo curioso: Aunque la semivida $2,1 \cdot 10^{6}[\text{año}]$ del neptunio 237 $\left({}_{93}Np^{237}\right)$ le parezca grande, es en realidad demasiado pequeña para que este elemento radiactivo sobreviva por miles de millones de años. En efecto, si Ud. imaginara que toda la Tierra hubiera estado hecha de neptunio 237 apenas unos 420 millones de años atrás, hoy no quedaría nada de neptunio (la Tierra sería toda de bismuto 209).

En este ejemplo hipotético, puede considerar que inicialmente había $N = 10^{51}$ núcleos de neptunio. El número de tales núcleos sería hoy:

$$n = N \cdot 2^{-t/T} = \frac{N}{2^{t/T}} \qquad \text{con} \qquad \frac{t}{T} = \frac{420 \cdot 10^6\,[\text{año}]}{2{,}1 \cdot 10^6\,[\text{año}]} = 200$$

$$2^{t/T} = 2^{200} = 2^{10 \cdot 20} = \left(2^{10}\right)^{20} \sim \left(10^3\right)^{20} = 10^{60}$$

$$n \sim \frac{10^{51}}{10^{60}} = 10^{-9} = 0{,}000000001 \quad \text{núcleos,}$$

lo que comprueba que hoy no quedaría **nada** de neptunio.

Determinación de edades por técnicas radiactivas

Hace unos 30 años se encontró que en la atmósfera la proporción entre carbono radiactivo ${}_6C^{14}$ y carbono normal ${}_6C^{12}$ se ha mantenido **constante** probablemente por unos 100.000 años. Esto se debe a que se ha establecido un balance entre la disminución de carbono 14, por desintegración, y el incremento de él a partir de nitrógeno 14, por efecto de rayos cósmicos.

Ahora bien, cuando las plantas están vivas ingieren carbón de la atmósfera en la forma de dióxido de carbono (CO_2), lo que produce que en ellas exista la misma razón $\mu = n\left(C^{14}\right)/n\left(C^{12}\right)$ entre el número de átomos de C_{14} y C_{12} que en la atmósfera. Cuando la planta muere y no más C^{14} es tomado del aire, tal razón μ disminuye con el tiempo debido al decaimiento radiactivo de C^{14} (semivida $T = 5770[\text{año}]$). Entonces, tomando una muestra de la madera obtenida de esa planta, midiendo su razón μ y aplicando relaciones del tipo $n/N = 2^{-t/T}$, podemos calcular el tiempo t desde que la planta murió. Los primeros ejemplos de aplicación de este método se hicieron con muestras de maderas de los sarcófagos egipcios; las antigüedades obtenidas (unos 4.600[año]) coincidieron, dentro de los errores de medición, con las indicadas por evidencias arqueológicas. El uso del *carbono 14* permite dar edades de acontecimientos hasta unos 40 mil años de antigüedad.

Para fechar sucesos más y más remotos en el pasado, es necesario usar isótopos radiactivos de semividas cada vez más grandes. Por ejemplo, si en un objeto se encuentran trazas de isótopos radiactivos de semivida del orden de 10^4 [año] se podría determinar su edad, cuando ella no fuera mayor que alrededor de 10^5 [año].

Virtualmente todas las rocas tienen cierta cantidad de isótopos radiactivos. Midiendo en muestras de rocas la proporción en que se encuentran tales isótopos radiactivos y los productos en que ellos decaen, se puede calcular la edad de esa muestra. Por ejemplo, el uranio 238, cuyo principal elemento final es plomo 206, decae según el esquema:

$$1[\text{g}] \text{ de } U^{238} \xrightarrow{4{,}5 \cdot 10^9\,[\text{año}]} \begin{cases} 0{,}4[\text{g}] \text{ de } U^{238} \\ 0{,}4326\,[\text{g}] \text{ de } Pb^{206} \\ 0{,}067[\text{g}] \text{ de } He^4 \end{cases}$$

luego, determinando las cantidades de plomo y uranio en cierta muestra, se puede fijar su antigüedad.

Con técnicas radiactivas se ha determinado que ciertas rocas tienen edades superiores a 3 mil millones de años.

Algunas mediciones hechas en Chile han dado resultados como los siguientes:

Compuesto	**Localidad**	**Edad (millones de años)**
Granodiorita	Huera	100 ± 10
Adamelita	Pozo Almonte	120 ± 15
Granito	Copiapó	265 ± 30
Granito	Valparaíso	270 ± 30
Tonalita	Algarrobo	320 ± 35
Granito	Laguna Verde	440 ± 40

y hasta el presente, no se han encontrado en Chile rocas de mayor antigüedad que la del último ejemplo indicado en esta tabla.

Breve historia de la Tierra

El uso de "relojes radiactivos" ha permitido poner fecha a muchos sucesos, lo que nos permite contarles una breve historia de la Tierra.

Muchas teorías sobre el cómo y el cuándo de la formación de la Tierra han sido formuladas y descartadas en los últimos 200 años. La teoría que hoy parece tener la mayor aceptación considera que todo el Sistema Solar tuvo un origen común en una nube de polvo estelar y gas. Unos 5 mil millones de años $\left(5 \cdot 10^{9}\,[\text{año}]\right)$ atrás esa nube comenzó a contraerse por efecto de su propia atracción gravitacional y durante el proceso algo de material pudo haber formado anillos alrededor de una concentración central, lo que daría origen a los planetas y al Sol.

Se ha determinado, analizando rocas con el método de uranio radiactivo, que la corteza terrestre ha permanecido en estado sólido por más de $3 \cdot 10^{9}\,[\text{año}]$ ("tres mil millones de años"). Durante los subsiguientes millones de años, la corteza terrestre sufrió muchas modificaciones, bajó la temperatura de la Tierra, se formaron los océanos y se transformó la atmósfera.

Nuestra atmósfera actual contiene fundamentalmente nitrógeno y oxígeno; pero inicialmente parece haber sido rica en gases más livianos: hidrógeno, metano y amonio. Estos gases livianos dejaban pasar más la parte ultravioleta de la radiación solar que nuestra atmósfera actual. La relativamente alta energía de la radiación ultravioleta pudo promover reacciones químicas entre esos gases, lo que pudo resultar en la producción de moléculas orgánicas complejas y en la formación de los primeros organismos vivientes, hace algo más de mil millones de años $\left(10^{9}\,[\text{año}]\right)$, en la Era Precámbrica.

Evidencias encontradas hasta la fecha, indicarían que los siguientes 500 millones de años se desarrolla sólo vida marítima; los primeros rastros de vida sobre suelo terrestre se encuentran en el

Período Silúrico, entre 500 y 400 millones de años atrás. Durante otros cientos de millones de años, a través de las eras Paleozoica y Mesozoica, se desarrollan plantas y bosques, anfibios, reptiles, insectos y mamíferos. Unos 70 millones de años atrás, en los comienzos de la Era Cenozoica (moderna), dominan los mamíferos arcaicos y aparecen los primates. Unos 40 millones de años atrás aparecen los antropoides y, recientemente entre 2 y 1 millón de años atrás se encuentran las primeras evidencias de humanoides.

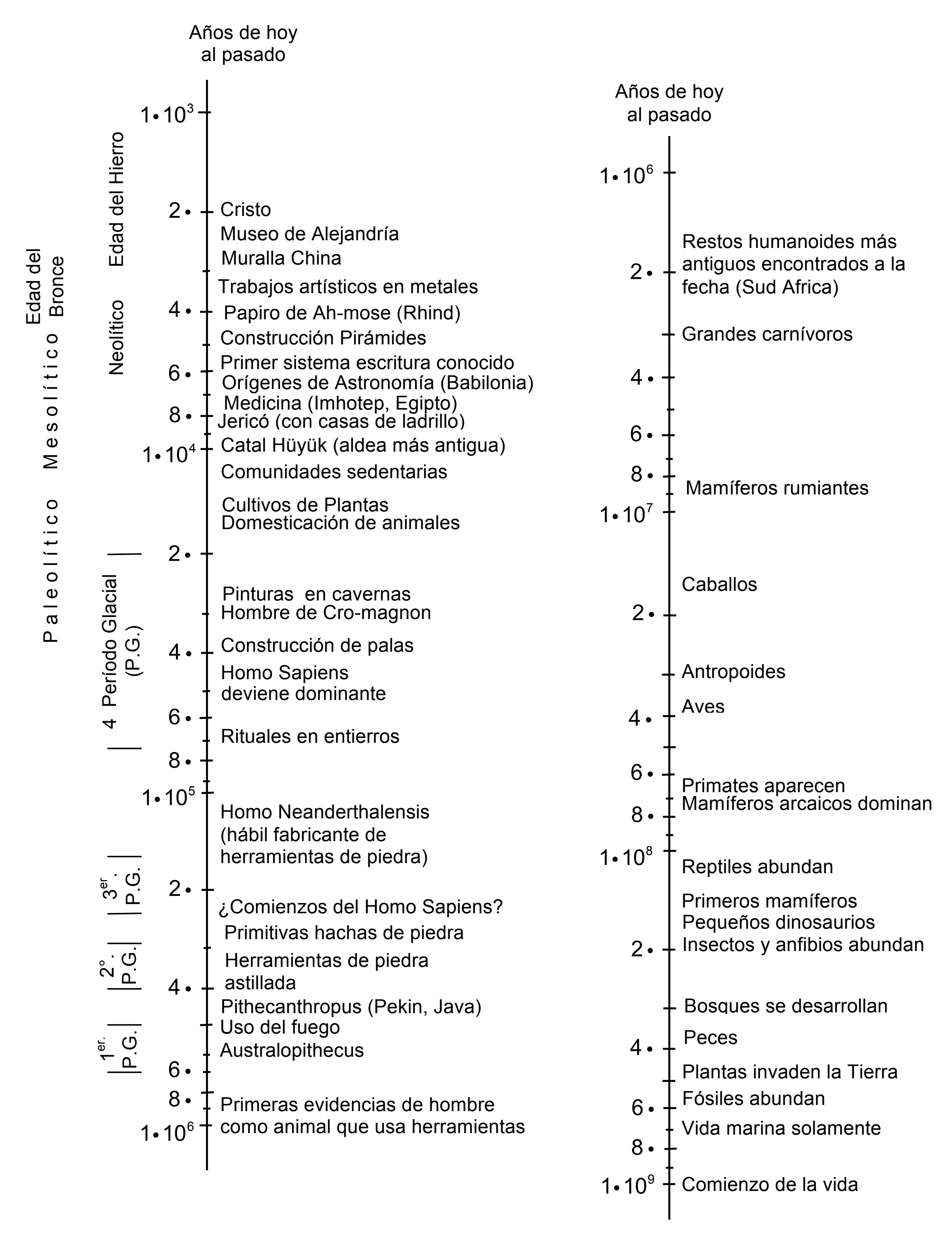
La manera por la cual los hombres primitivos se distinguen de los grandes monos parece ser, en gran medida, un asunto de definiciones. La definición sugerida por la mayoría de los paleontólogos y antropólogos es distinguir al hombre por su habilidad para fabricar herramientas; aunque también se ha considerado el distinguirlo por su habilidad en el uso del lenguaje simbólico para comunicaciones o por su habilidad de planificación para satisfacer necesidades futuras. Se han presentado opiniones indicando que las herramientas preceden al hombre y que el uso de herramientas por primates pre-humanos produjo el desarrollo que condujo al Homo Sapiens, nuestra propia especie.

Los primeros rastros del Homo Sapiens parecen datar de unos 250.000 años atrás, en el 2° período interglacial. Es probable que diferentes especies de hombres (Pithecanthropus, Neantherthalensis y Sapiens) coexistieron sobre la Tierra y tuvieron culturas comparables; hay evidencias que esto fue así en el caso del Neantherthalensis y el Sapiens durante la más reciente edad del hielo (4° período glacial), pero hace unos 40.000 años el Sapiens llegó a ser dominante y el Neantherthalensis estaba extinguido.

Numerosas diferentes culturas de Homo Sapiens han sido identificadas como existentes entre 40.000 y 10.000 años atrás, durante y hasta finalizar el Paleolítico (antigua edad de piedra). Se ha avanzado la idea de que el *tiempo* de evolución cultural se aceleró al finalizar el 4º período glacial, unos 20.000 años atrás, lo cual es avalado por testimonios que muestran el aumento del uso de herramientas más elaboradas de piedra y de hueso, construcción de moradas de madera, piedra y arcilla, desarrollo de lenguajes, producción de ciertas formas de arte y de tradiciones religiosas, etc. Tal ímpetu no ha decaído hasta nuestros días.

Presentamos algunos acontecimientos en la tierra en el gráfico de la página siguiente. Se ha usado una "escala de potencias de 10" que permite considerar tiempos desde 1.000 años atrás $\left(10^3\,[\text{año}]\right)$ hasta mil millones de años atrás $\left(10^9\,[\text{año}]\right)$ ocupando "poco" espacio.

Algunos acontecimientos en la Tierra



Escalas

En muchos casos es útil una visualización global de una *ordenación* de cantidades físicas. Esto se logra por medio de escalas.

Ya le hemos mostrado a usted una escala de “tiempos” y otra de “acontecimientos en la Tierra”, para que pueda apreciar en conjunto una gran variedad de fenómenos.

Para construir una escala elegimos una cualidad de las cosas a representar. Asociamos un número a cada cosa basándonos en la cualidad elegida y usamos estos números para ordenarlas.

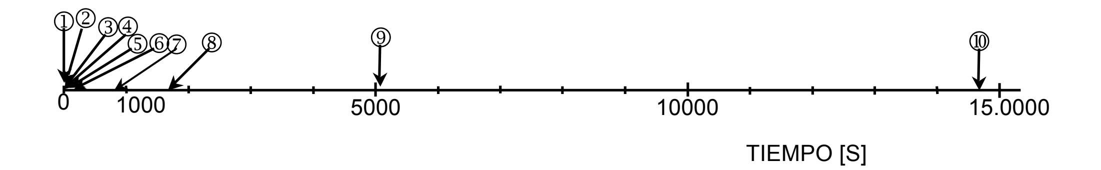
- un grupo de edificios puede ser ordenado según antigüedad, altura, precio de venta, etc.
- los ríos pueden ser ordenados por longitud o por caudal medio.
- los hechos históricos pueden ser ordenados cronológicamente.
- las partículas fundamentales pueden ser ordenadas por los valores de masa, carga eléctrica, spin, etc.

A continuación, le presentamos a Ud. los tiempos empleados (récords mundiales) en diferentes carreras; desde los 100[m] planos hasta caminatas de 20[km] y 50[km]. En la tabla identificamos las carreras por un número entre paréntesis, las distancias están en metros [m] y los tiempos correspondientes en [h] : [min] : [s]. Las equivalencias a minutos y segundos están dadas en forma aproximada.

(1)	100	9,9	$\triangleq$	0,16 [min]	$\triangleq$	10 [s]	$\simeq$	$1{,}0 \cdot 10^{1}$ [s]
(2)	200	19,8	$\triangleq$	0,33 [min]	$\triangleq$	20 [s]	$\simeq$	$2{,}0 \cdot 10^{1}$ [s]
(3)	400	43,8	$\triangleq$	0,73 [min]	$\triangleq$	44 [s]	$\simeq$	$4{,}4 \cdot 10^{1}$ [s]
(4)	800	1:43,7	$\triangleq$	1,73 [min]	$\triangleq$	104 [s]	$\simeq$	$1{,}0 \cdot 10^{2}$ [s]
(5)	1000	2:16,0	$\triangleq$	2,27 [min]	$\triangleq$	136 [s]	$\simeq$	$1{,}4 \cdot 10^{2}$ [s]
(6)	1500	3:33,1	$\triangleq$	3,55 [min]	$\triangleq$	213 [s]	$\simeq$	$2{,}1 \cdot 10^{2}$ [s]
(7)	5000	13:13,0	$\triangleq$	13,22 [min]	$\triangleq$	793 [s]	$\simeq$	$7{,}9 \cdot 10^{2}$ [s]
(8)	10000	27:30,8	$\triangleq$	27,51 [min]	$\triangleq$	1651 [s]	$\simeq$	$1{,}7 \cdot 10^{3}$ [s]
(9)	20000	1:25:19,4	$\triangleq$	85,32 [min]	$\triangleq$	5119 [s]	$\simeq$	$5{,}1 \cdot 10^{3}$ [s]
(10)	50000	4:04:19,8	$\triangleq$	244,33 [min]	$\triangleq$	14660 [s]	$\simeq$	$1{,}5 \cdot 10^{4}$ [s]

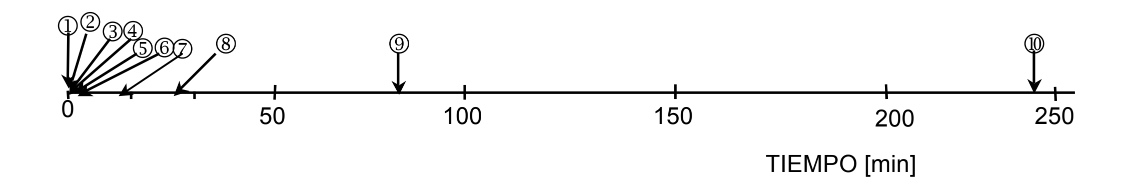
Ubicaremos estas carreras en algunas *escalas de tiempo*, mostradas en la página siguiente.

Para incluir todas las carreras construimos una escala de tiempo graduada de 0 a 15.000[s] uniformemente:

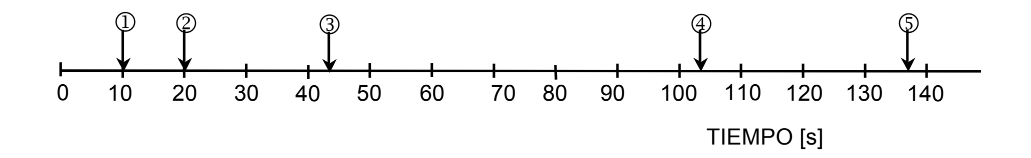


Vemos que en esta escala las primeras 6 carreras quedan prácticamente confundidas unas con otras. Esto no se debe a la unidad de tiempo elegida, sino a las diferencias de orden de magnitud de los tiempos empleados para la primera y las últimas carreras.

A continuación le mostramos una escala "graduada en minutos" la que, por supuesto, no mejora la representación; aún las primeras carreras están confusas.

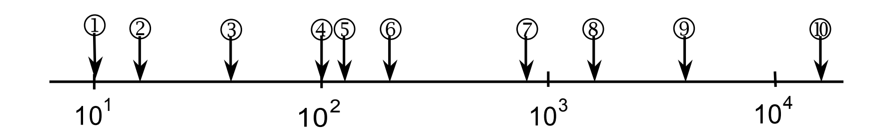


Intentemos ahora distinguir las primeras carreras. Podemos hacerlo abarcando, en un trozo de igual longitud, un menor rango de tiempos; por ejemplo:



pero resulta que la últimas carreras quedan fuera de esta escala.

Al usar *notación científica* para escribir los tiempos empleados en las carreras, nos damos cuenta que sus órdenes de magnitud están en el rango de 10^1 a 10^4. Esto nos sugiere que una solución satisfactoria para representar todas las carreras de manera que todas ellas se distingan, es usar una escala graduada en *potencias de 10*:

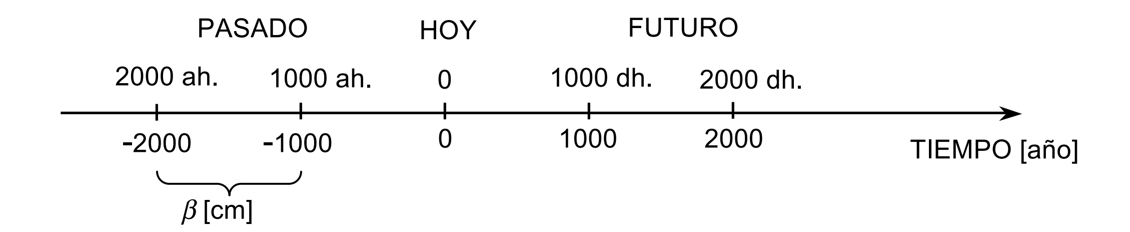


En este ejemplo hemos usado dos tipos de escalas:

- Escalas lineales (uniformes)
- Escalas no lineales (en particular, la escala de *potencias de 10*).

En general, usamos una *escala lineal* cuando los valores a representar tienen órdenes de magnitud similares; si estos valores abarcan un amplio rango de órdenes de magnitud debemos recurrir a una *escala de potencias de 10*, ya que estamos limitados por el tamaño del papel.

> * Por ejemplo, en el gráfico ***intervalo de tiempos*** de la página 7 la *escala de potencias de 10* necesita unos pocos centímetros para representar con claridad la edad del Universo, del género humano y de las pirámides. En una *escala lineal* usando β *centímetros para representar mil años.*



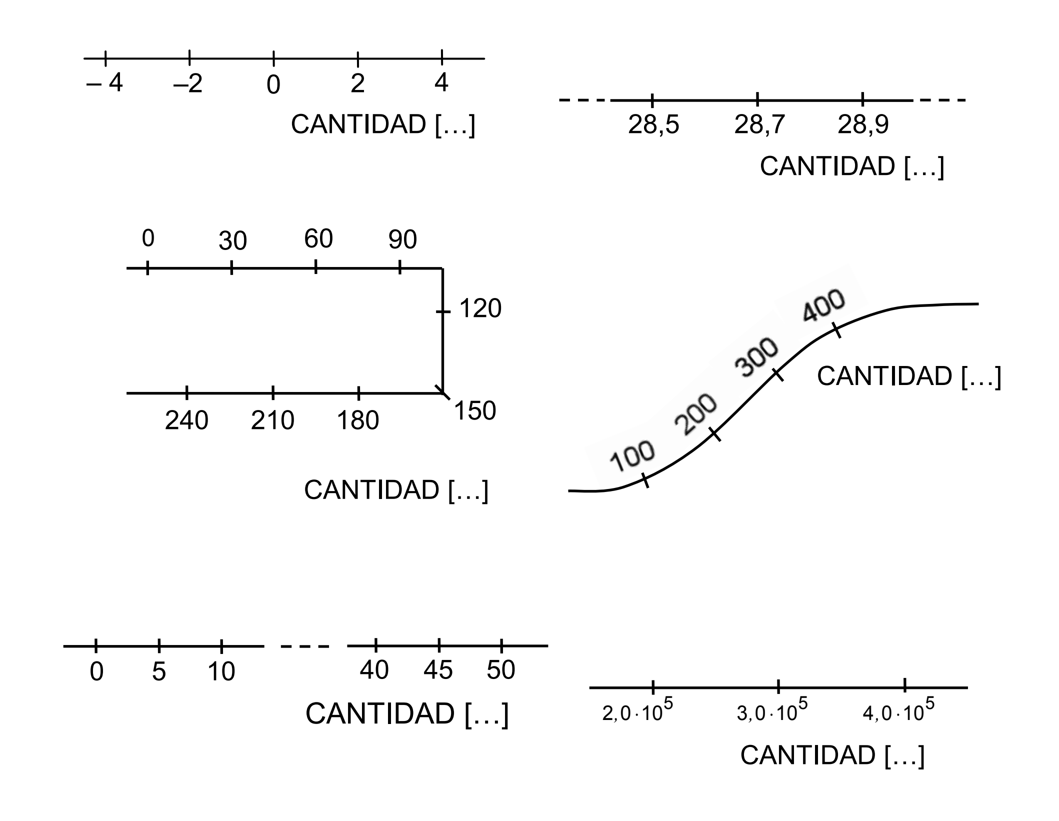
necesitaríamos, aproximadamente:

5 β centímetros para ubicar la edad de la pirámide de Cheops.

50 β metros para ubicar la edad del género humano.

120 β kilómetros para ubicar la edad del Universo.

Una **escala lineal** se caracteriza porque los **números asignados** a marcas sucesivas colocadas a igual distancia sobre una curva (en particular una recta) tienen **diferencia constante**.

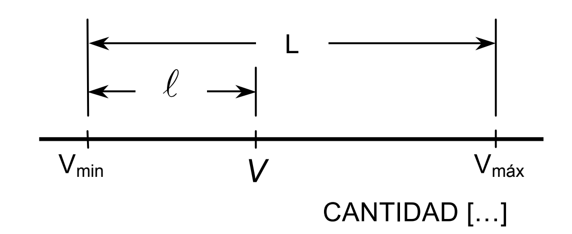


Para construir una escala lineal:

- Escogemos una curva cuyo largo está de ordinario limitado.
- Determinamos sobre la curva un trazo a cuyos extremos le asignamos, respectivamente, valores cercanos al valor mínimo ($V_{mín}$) y al valor máximo ($V_{máx}$) que deseamos representar.
- Obtenemos las marcas intermedias dividiendo el trazo inicial en partes iguales; asignamos a estas marcas los valores intermedios correspondientes.

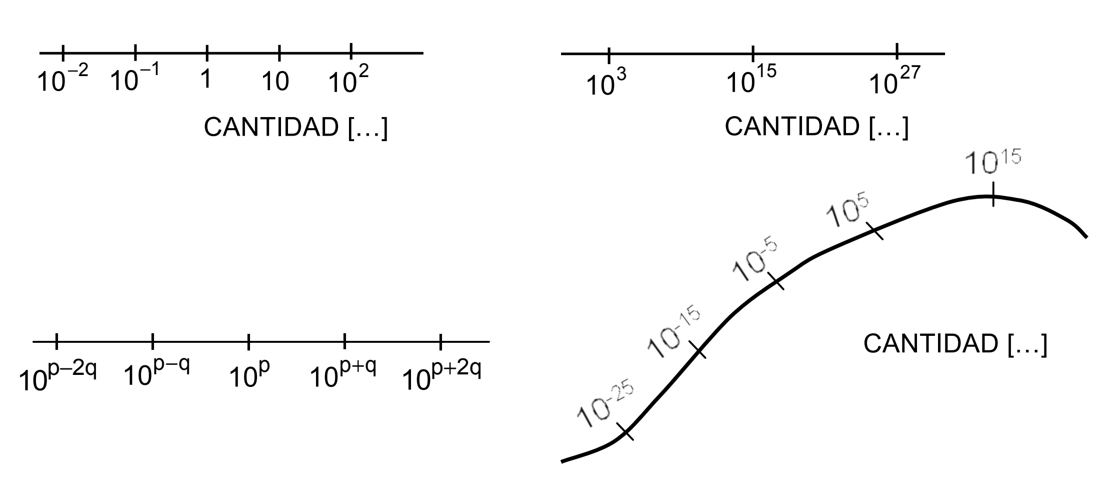
Algebraicamente, cualquier valor intermedio V queda ubicado en la escala lineal según:

$$\ell = \frac{V - V_{mín}}{V_{máx} - V_{mín}} \cdot L$$



donde usualmente los largos ℓ y L se miden en centímetros.

Una **escala de potencias de 10** se caracteriza porque los números asignados a marcas sucesivas colocadas a igual distancia sobre una curva (en particular una recta) tienen como **cuociente** una potencia de 10 **constante**.



Observe que en este tipo de escala, contrario a lo que sucede en la escala lineal, la **diferencia** entre los números asignados a las marcas sucesivas no es constante.

Le advertimos que el **cero** no tiene representación en una escala de potencias de 10, porque ningún número real finito como exponente de 10 produce 0.

Para construir una escala de *potencia de 10*:

- Elegimos un trazo sobre la curva.
- A sus extremos le asignamos *potencias de 10* cercanas al menor y al mayor orden de magnitud de los valores a representar.
- Dividimos el trazo inicial en cierto número de partes iguales de modo que a cada marca le corresponda una determinada potencia de 10.

Cuando los valores a representar son *potencias de 10* (órdenes de magnitud de cantidades físicas) su ubicación en la escala es simple.

Cuando queremos representar valores dados en forma más precisa (factor numérico por potencia de 10) debemos ubicar puntos intermedios entre las marcas de la escala correspondientes a dos potencias de 10 consecutivas.

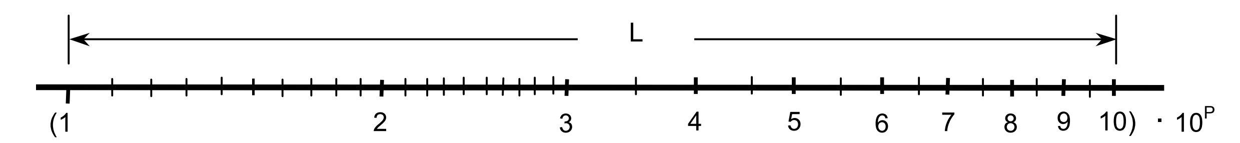
Sea L la distancia entre las marcas correspondientes a las potencias 10^{p} y 10^{p+1} . Entonces, la distancia ℓ a que debe colocarse el número:

$$A \cdot 10^{p} \;, \; 1 < A < 10$$

queda determinada algebraicamente por:

$$10^{\ell/L} = A$$

La solución de esta ecuación conduce a la siguiente división, válida para cualquier intervalo entre dos potencias de 10 consecutivas:

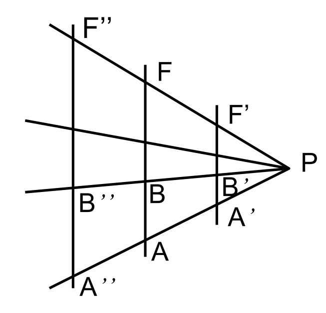


En general sucederá que las *escalas de potencias de 10* que Ud. construya tendrán una distancia distinta al de este *modelo*. Pero no tendrá necesidad de solucionar en cada caso la ecuación $10^{\ell/L} = A$, puede recurrir a un teorema geométrico de homotecia que permite la siguiente construcción:

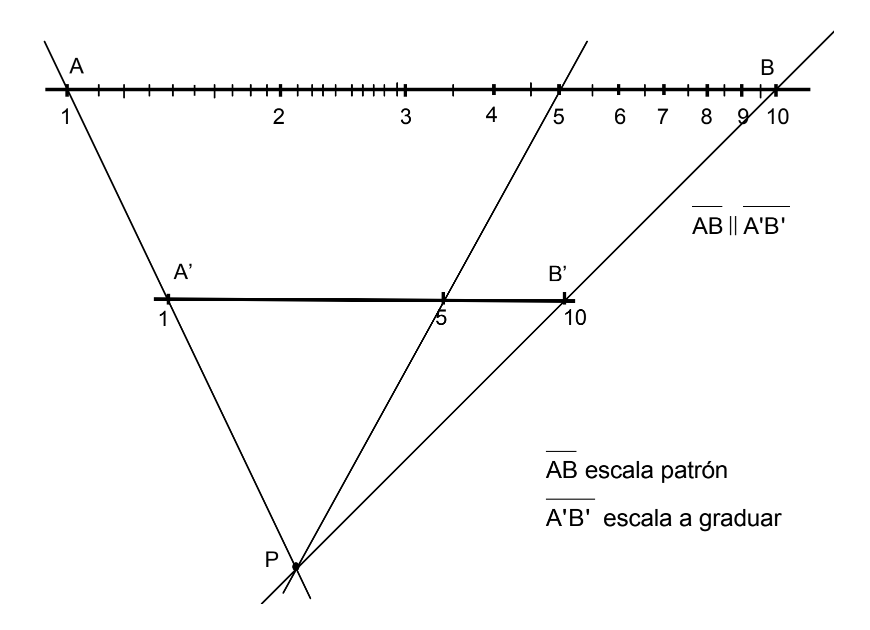
Considere un trozo de una escala no lineal con divisiones A*,* B*, … ,* F; como modelo.

Elija un punto P cualquiera y trace desde él, rayos que pasen por los puntos de división de la escala modelo.

Trace líneas paralelas a la *escala modelo*; los rayos dividirán a estas líneas paralelas en la misma razón que la escala modelo.



Use este método para *escalas de potencias de 10* con el modelo dado para controlar las divisiones del gráfico *acontecimientos en la Tierra* (pág. 23). Compare con las escalas básicas de una regla de cálculo.



Ejercicios

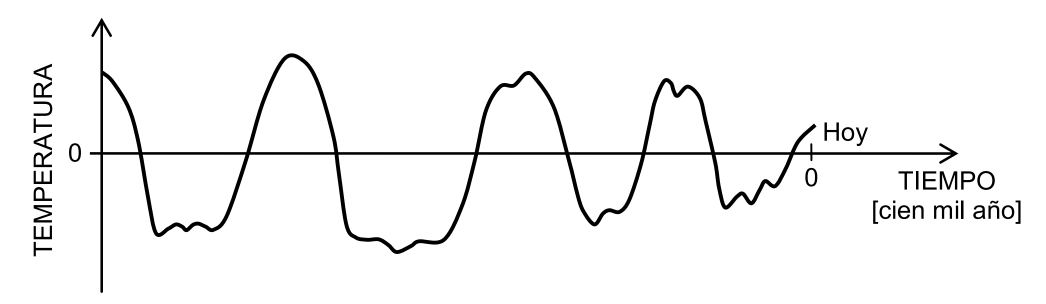
1-30) Considere la tabla de isótopos radiactivos (pág.19). Exprese las semividas en una unidad de tiempo común, por ejemplo **segundos** y haga una lista de ellos en orden de semividas decrecientes. Construya una *escala de potencias de 10* para semividas que sea conveniente para que Ud. pueda ubicar en ella esos isótopos radiactivos.

1-31) Si usara una *escala uniforme* de tiempo en que la semivida de 1[s] se representara por 1[cm], ¿a qué distancia del origen representaría la semivida del polonio 212 y la del plomo 204? Comente.

1-32) Construya una *escala uniforme*, de unos 20[cm] de largo, para representar tiempos desde hoy (año 0) hasta unos 600 millones de años al pasado. Indique en ella los intervalos de tiempo geológicos (eras, períodos y épocas), según los siguientes datos aproximados (en millones de años) dados correlativamente y retrocediendo en el tiempo. Entre paréntesis se dan las *duraciones* respectivas.

- Era cenozoica o moderna desde 0 a 70; con un período cuaternario (1) y un período terciario con las épocas: pliocena (11), miocena (13), oligocena (10), eocena (25) y paleocena (10).
- Era mesozoica o media, desde 70 a 230; con períodos; cretácico (60), jurásico (50) y triásico (50).
- Era paleozoica o antigua, desde 230 a 600; con períodos: pérmico (40), carbonífero (70), devoniano (60), silúrico (100), ordovícico (50) y cámbrico (50).

1-33) En el gráfico se representa, en forma cualitativa, la temperatura de la Tierra (sobre y bajo el punto de congelación del agua, 0[°C]) en el transcurso del tiempo. La escala de tiempo usada es *uniforme*, Ud. debe subdividirla en unidades [cien mil año] usando los datos sobre los períodos glaciales en el gráfico "*acontecimientos en la Tierra*" (pág. 23).



1-34) En culturas surgidas en las regiones del Mediterráneo y en el Cercano Oriente se estimaba la edad del Universo en unos pocos miles de años. Pero en culturas de la India se encuentra el uso de edades de gran duración que se suceden unas a otras : Edad de Oro (Kritayuga) de 1.728.000 años, Edad de Plata (Thretayuga) de 1.296.000 años, Edad de Bronce (Dwaparayuga) de 864.000 años y Edad de Hierro (Kaliyuga) de 432.000 años. Las cuatro edades juntas forman una Gran Edad (Mahayuga). El Universo existía por *un día Brahámico (Kalpa),* con 1[*Kalpa*] $\hat{=}$ 1.000[*Mahayuga*] después del cual el Universo se destruía y era vuelto a crear ...

¿A cuántos años equivale 1[*Kalpa*] ? Haga un gráfico, eligiendo una escala conveniente, para representar 2[*Mahayuga*] con sus respectivas edades.

1-35) Los habitantes del planeta Garyon, en otra galaxia, mandan una sonda para analizar la composición de la atmósfera terrestre y decidir la posibilidad de enviar parte de su población a la Tierra. La sonda cae al borde de una super carretera de una ciudad muy industrializada y transmite a Garyon los siguientes datos, en *partes por millón* (ppm):

> nitrógeno: 743.954 ppm; oxígeno: 240.758 ppm; vapor de agua: 10.602 ppm; argón: 9.103 ppm; dióxido de carbono: 300 ppm; neón: 2 ppm; xenón: 2 ppm; etileno: 2 ppm; sulfito de hidrógeno: 17 ppm; ...

Construya Ud. una *escala de potencias de 10* apropiada para representar tal composición atmosférica.

1-36) Infórmese y ubique en el gráfico *acontecimientos en la Tierra* los siguientes hechos: construcción de Stonehenge (England), invención del calendario Azteca, guerras médicas, destrucción de Babilonia y nacimiento de Buda.

1-37) Represente en una *escala lineal o uniforme* de tiempo algunos inventos y descubrimientos como: invención de la imprenta en Europa (1439), telescopio (1610), bomba neumática (1650), barco a vapor (1707), vacuna (1798), alto horno (1828), máquina de coser (1830), hormigón armado (1867), motor de 4 tiempos (1876), alumbrado eléctrico (1878), emisión termoiónica (1883), aspirina (1893), pulmón de acero (1928), transistor (1947), láser (1960), ... Usted puede completar esta pequeña lista.

1-38) Los períodos de rotación (*"días"*) de los planetas de nuestro sistema solar son:

Mercurio	:	58[d] 15[h] 42[min]
Venus	:	243[d]
Tierra	:	23[h] 56[min] 4[s]
Marte	:	24[h] 37[min] 23[s]
Júpiter	:	9[h] 50[min] 23[s]
Saturno	:	10[h] 11[min]
Urano	:	10[h] 42[min]
Neptuno	:	15[h]

Exprese tales *períodos de rotación* en [s] y construya una escala apropiada para representarlos con claridad.

1-39) Para representar ciertos sucesos en el tiempo, se ha construido una escala uniforme de 30[cm] de largo, comenzando en 50[μs] y terminando en 1,8[ms]. Determine el valor, en [s], que indicará el punto de la escala situado a 16[cm] del final de la escala.

Unidades y patrones de distancia

Es muy usual el que nos preguntemos cuán grandes son o cuán lejos están las cosas; esto es, nos interesan los tamaños y las distancias o longitudes.

Para medir la distancia entre la esquina en que lo dejó la micro y su casa, usted puede contar el número de “pasos” dados; o para medir el largo de su escritorio puede contar “cuartas” o “gemes”. Es decir, usted comienza eligiendo una unidad y luego cuenta. Note usted la tendencia a escoger unidades convenientes para facilitar la medición de distancias, de estos órdenes de magnitud, en forma directa.

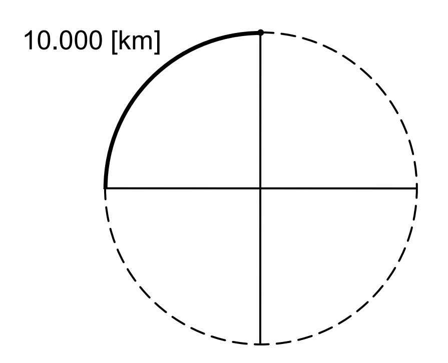
Los tamaños y distancias extremadamente pequeños del microcosmos o grandes del macrocosmos, o los de objetos inaccesibles, no pueden ser determinados por métodos directos; pero la idea general de comparar se mantiene. Esperamos que en el futuro usted aprenda a efectuar mediciones apropiadas para estos casos.

El hombre escogió al principio como unidades de distancia, longitudes relacionadas con su cuerpo. El **pie** ha sido usado como unidad de longitud por casi todas las culturas en uno u otro tiempo, aunque naturalmente el *pie patrón* terminaba por ser distinto en las diferentes regiones. En sus marchas las legiones romanas contaban 2.000 pasos, de lo cual derivó la **milla**.

Ya en la Babilonia antigua existía un sistema de medidas de longitud que adoptaba como unidad básica el **dedo**. Además se usaba el **pie**, que correspondía a 20 dedos y el **codo**, a 30 dedos; la **percha** constaba de 12 codos y la **cuerda de agrimensor**, de 120 codos; la **legua** equivalía a 180 cuerdas. Estas unidades han sido normalizadas respecto a las unidades de uso actual; por ejemplo, el “dedo” equivale a 1,65 centímetros.

La unidad de longitud básica aceptada actualmente por todo el mundo científico es el **metro**.

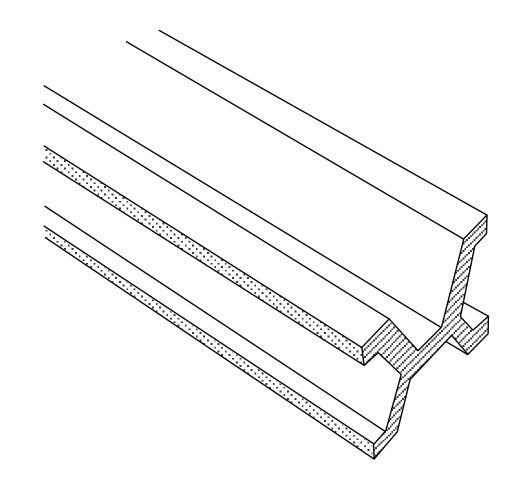
El **metro** (del griego $\mu\varepsilon\tau\rho o\nu$ = medida) se introdujo en Francia (1791) con la intención de tener una unidad de longitud independiente de cualquier medida antigua y válida internacionalmente. Se definió equivalente a *la diez millonésima parte de un cuadrante de un meridiano terrestre.* Esa longitud se obtuvo en forma aproximada mediante medidas angulares hechas en el mediodía de Francia.



La definición internacional de Metro, sancionada por la Conferencia General de Pesos y Medidas celebrada en París en 1889, es la siguiente:

“Metro es la distancia entre dos trazos grabados sobre una barra de platino e iridio, a la temperatura de 0[ºC] y a la presión atmosférica normal, que se encuentra depositada en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas de Sevres, París”.

Se confeccionaron simultáneamente 40 barras iguales que sirven como prototipo del metro. Se usó una aleación de 90% de platino y 10% de iridio. La sección transversal de esta barra tiene forma de “x” por ofrecer varias ventajas como minimizar la dependencia de la distancia entre las marcas de posibles doblamientos, poseer una superficie relativamente grande (lo que permite adquirir más fácilmente una temperatura uniforme) y usar una cantidad relativamente pequeña de material.



El metro prototipo fue hecho con la intención de que se conservara inalterable, pero el material utilizado ha sufrido fatiga (deformaciones por tensiones internas) y se han constatado pequeñísimas variaciones en él. Los físicos se han preocupado de buscar otro patrón de longitud que sea, según los conocimientos actuales, realmente inalterable. Ya en 1892 se comparó el metro prototipo de París con la *longitud de onda* de la luz roja emitida por cadmio, encontrándose, mediante mediciones que pueden efectuarse con gran precisión, que a un metro corresponden 1.553.164,13 longitudes de onda de esa luz.

La Conferencia General de Pesos y Medidas adoptó formalmente en 1983 la definición:

“Metro es el largo del camino recorrido por la luz en el vacío durante el intervalo de tiempo igual a:

$$\frac{1}{299.792.458}\ [\mathrm{s}]\text{”.}$$

Un principio y una constante fundamental en Física

La luz se propaga en el vacío con velocidad constante.

La magnitud de esta velocidad se ha determinado experimentalmente por diferentes métodos con bastante precisión. Trabajos en 1974 daban el valor:

$$c = 299\,792\,533 \pm 71\left[\mathrm{m/s}\right]$$

Comúnmente para cálculos puede usar la aproximación:

$$c \simeq 3, \cdot\ 10^{8}\ [\mathrm{m/s}]$$

En la Conferencia General de Pesos y Medidas de 1983 se definió que la rapidez de la luz en el vacío es exactamente:

$$c = 299\,792\,458\ [\mathrm{m/s}]$$

Ejercicios

1-40) Estime la cantidad de pasos que ha dado en su vida. ¿Qué distancia ha recorrido?

1-41) Estime el tamaño de un grano de azúcar. Si pusiera un millón de ellos, uno al lado de otro, ¿qué longitud ocuparían?

1-42) Estime el número de carros de ferrocarril que serían necesarios para cubrir el meridiano terrestre.

1-43) Estime el espesor de un trozo de papel celofán y el tiempo que tardaría la luz en atravesarlo.

1-44) Tome una unidad arbitraria tal como la longitud de la primera falange de su pulgar o la longitud de una de sus uñas. Haga una regla utilizando esta unidad y con ella mida el ancho y el largo de esta página.

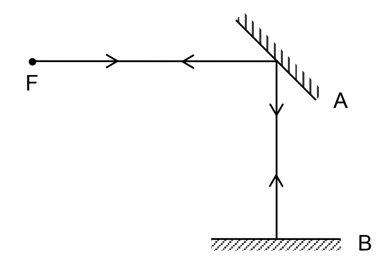
1-45) En una excavación se encontró un pie prehistórico de 0,40[m] de largo. Suponiendo que la relación entre la altura y el tamaño del pie es la misma para el hombre prehistórico que para Ud.. ¿Qué altura tendría ese hombre prehistórico?

1-46) Un hombre de 1,80[m] de estatura, está parado a 5,20[m] de distancia del pie de un farol cuya ampolleta encendida está a 4,80[m] de altura. Calcule el largo de la sombra del hombre.

1-47) Un estudiante ha observado que cuando mantiene un lápiz de 0,15[m] verticalmente a 0,60[m] de sus ojos, éste se superpone exactamente sobre una antena de radio situada a 80[m] de él. Calcule la altura de la antena.

1-48) Suponga que como metro patrón se elijan 1.432.409,4 longitudes de onda de cierta luz. Determine el orden de magnitud de esta longitud de onda.

1-49) Un haz de luz que se origina en F se refleja sucesivamente en los espejos A y B. Se ha medido que la luz emplea $1{,}5 \cdot 10^{-6}$ [s] en ir de F a B y regresar a F. Calcule la distancia FAB.



1-50) Suponga que le presentan la siguiente unidad de tiempo: Un “metro-luz” es el tiempo que la luz demora en recorrer la distancia de 1[m].

¿Cuántos segundos equivalen a un “metro-luz”? (1 [metro-luz] $\hat{=}$? [s])

¿Cuántos “metros-luz” ha vivido usted ?

Múltiplos y submúltiplos decimales de unidades de medición

Teniendo una unidad básica para cierta cantidad física, se pueden elegir unidades más pequeñas y más grandes dividiendo y multiplicando la unidad básica por potencias de 10.

Así, dividiendo tal unidad en 10 partes iguales aparece una 10 veces más pequeña y agrupando 10 unidades básicas obtenemos una 10 veces mayor. Estas nuevas unidades tienen nombres que derivan de la palabra que designa a la unidad básica, con un prefijo que denota la división o multiplicación que corresponde.

De acuerdo a la Conferencia Internacional de Pesos y Medidas de 1991, los prefijos son:

Prefijo	**Valor**	**Símbolo**
yotta	10^{24}	Y
zetta	10^{21}	Z
exa	10^{18}	E
peta	10^{15}	P
tera	10^{12}	T
giga	10^{9}	G
mega	10^{6}	M
kilo	10^{3}	k
hecto	10^{2}	h
deca	10	da
deci	10^{-1}	d
centi	10^{-2}	c
mili	10^{-3}	m
micro	10^{-6}	μ
nano	10^{-9}	n
pico	10^{-12}	p
femto	10^{-15}	f
atto	10^{-18}	a
zepto	10^{-21}	z
yocto	10^{-24}	y

Ejemplos

- De la unidad básica de longitud : Un metro ··· 1[m] , derivan las unidades:

Un kilómetro	···	1[km]	$\triangleq$	10^{3}[m]
Un hectómetro	···	1[hm]	$\triangleq$	10^{2}[m]
Un centímetro	···	1[cm]	$\triangleq$	10^{-2}[m]
Un milímetro	···	1[mm]	$\triangleq$	10^{-3}[m]
Un micrometro	···	1 [µm]	$\triangleq$	10^{-6}[m]
Un nanometro	···	1[nm]	$\triangleq$	10^{-9}[m]

- De la unidad básica de tiempo: Un segundo ··· 1[s] , se obtiene:

Un milisegundo	···	1[ms]	$\triangleq$ 10^{-3}[s]
Un microsegundo	···	1[μs]	$\triangleq$ 10^{-6}[s]
Un nanosegundo	···	1[ns]	$\triangleq$ 10^{-9}[s]

En las conferencias internacionales, recién mencionadas, se ha recomendado que:

- los símbolos para prefijos se escriban sin espacio entre el símbolo del prefijo y el símbolo de la unidad.
- se evite el empleo de prefijos compuestos formados por la combinación de varios prefijos.

* Use 1[nm] pero no 1[mμm]

Se desaprueba, en general, el uso de los nombres:

un micrón ··· 1[μ] para la unidad 1[μm]

un milimicrón ··· 1[mμ] para la unidad 1[nm]

Ejercicios

1-51) Exprese un intervalo de tiempo de $2{,}04\cdot 10^{4}$[s] en [Ms], [ks], [ms], [ns], [Gs] y [μs].

1-52) Le informan que el espesor de cierta lámina metálica es 2,8[μm] . Exprese este espesor en [mm], [cm], [dm] y [m].

1-53) El radio efectivo de cierta partícula vale $2{,}5\cdot 10^{-15}$[m]. Exprese esta magnitud en [nm], [fm] y [am].

1-54) Use los prefijos que usted considere los más adecuados para escribir en su forma más simple los siguientes valores de una cantidad física, medidos en la unidad [V]:

0,008 [V]	$1{,}8\cdot 10^{-6}$ [V]	$4{,}05\cdot 10^{-30}$ [V]
$0{,}024\cdot 10^{10}$ [V]	$0{,}9\cdot 10^{-4}$ [V]	$0{,}87\cdot 10^{8}$ [V]
0,000 000 29 [V]	$43{,}2\cdot 10^{7}$ [V]	

Tamaños y distancias

El orden de magnitud de la estatura del hombre es 1[m], una estatura típica es 1,70[m]. Una piedra puede tener 50[cm] de largo y otra más chica 2[cm]. Las pequeñas partículas suspendidas en el aire tienen diámetros que van de 1[mm] a 0,01[mm]. El tamaño de un grano de sal es del orden de 10^{-4}[m], el de las irregularidades de una superficie metálica bien pulida de 10^{-6}[m] ($\triangleq$ 1[μm]) y el de un virus de 10^{-7}[m] . Amplitudes de ondas sonoras audibles pueden ser tan pequeñas como 10^{-8}[m] ($\triangleq$ 10[nm]).

El cuerpo humano contiene un promedio del orden de 10^{14} células, cada una de las cuales está formada por unas 10^{10} moléculas, con un promedio de 10^4 átomos por molécula. Algunas células tienen diámetro de 2[μm] y algunas moléculas de 6[nm].

Las dimensiones atómicas son del orden de 10^{-10}[m] . A esta distancia se da un nombre especial:

Un ångström · · · 1[Å] $\triangleq 10^{-10}$[m] ; 1[nm] $\triangleq$ 10[Å].

Se ha establecido experimentalmente que el radio efectivo de un núcleo con número másico *A* está dado por la relación: $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, en donde la constante R_0 vale aproximadamente $1{,}1 \cdot 10^{-15}$[m] .

Al usar la unidad un Fermi (1[F] $\triangleq 10^{-15}$[m] $\triangleq$ 1[fm]), utilizada en física nuclear, la constante R_0 se expresa como $R_0 \simeq 1{,}1$[F] .

El electrón, el constituyente más liviano de la materia ordinaria, no tiene forma ni tamaño bien definido, pero puede asignársele un radio del orden de 1[F] .

El hombre vive en un medio ambiente natural o construido por él. Las pirámides egipcias alcanzaron alturas de 140[m], la torre Eiffel mide 300[m] y la de Toronto 550[m]. El edificio más alto construido hasta 2010 mide 828[m].

Los Ojos del Salado se elevan 6.880[m] sobre el nivel del mar. El radio de la Tierra queda mejor expresado en kilómetros, y es aproximadamente, de 6.400[km].

La estación espacial internacional describe una órbita a una altura entre 278[km] y 460[km] sobre la superficie de la Tierra, y la Luna una de aproximadamente 385.000[km] (unos 60 radios terrestres) respecto de superficie de la Tierra.

Para las distancias de los planetas al Sol se usa, generalmente, la "*unidad astronómica*". Esta unidad se refería inicialmente a la distancia media de la Tierra al Sol; actualmente la Unión Astronómica Internacional la ha definido en forma precisa y ha adoptado la siguiente equivalencia:

Una **unidad astronómica** · · · 1[UA] $\triangleq 149600 \cdot 10^6$[m]

Para cálculos aproximados usted puede usar $1[\text{UA}] \triangleq 1{,}5 \cdot 10^{11}[\text{m}]$. Puede obtener, aproximadamente, este valor si recuerda que la *luz del Sol* demora alrededor de 8[min] para llegar a la Tierra y que la rapidez de la luz es $\simeq 3, \cdot 10^8$[m/s].

Las distancias medias entre los planetas y el Sol, expresadas en unidades astronómicas son:

Mercurio	0,387[UA]	Júpiter	5,203[UA]
Venus	0,723[UA]	Saturno	9,572[UA]
Tierra	1[UA]	Urano	19,194[UA]
Marte	1,524[UA]	Neptuno	30,066[UA]

Las distancias a las estrellas son “enormes”. Por ejemplo, con un telescopio moderno usted puede observar una estrella a $2 \cdot 10^{25}$[m] de distancia, aproximadamente 10^{14}[UA].

Tal vez este dato no le impresione mucho, pero si consideramos que la luz viaja a $3 \cdot 10^{8}$[m/s], un destello emitido por esta estrella demora $(2/3) \cdot 10^{17}$[s], o sea, unos $2 \cdot 10^{9}$[año] (2.000 millones de años) en llegar a la Tierra. Dicho de otro modo, mientras el destello viajaba desde esa estrella, la vida se desarrollaba en la Tierra; aparecía el hombre que aprendió a usar el fuego, a construir ciudades y a fabricar el telescopio que permitió captar ese destello.

Resulta conveniente expresar la distancia entre estrellas y, también, entre galaxias, en “años luz”.

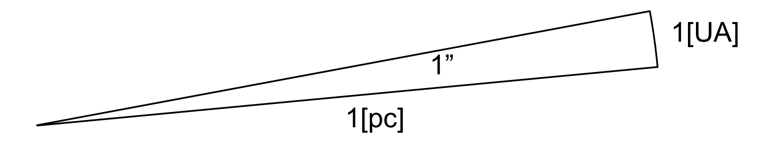
Un **año luz** es la distancia que la luz recorre, en el vacío, durante un año.

Usando 1[año] $\hat{=}$ $3{,}145 \cdot 10^{7}$[s] y $c \simeq 2{,}998 \cdot 10^{8}$[m/s], resulta la equivalencia aproximada:

Un año luz $\cdots$ 1[AL] $\hat{=}$ $9{,}461 \cdot 10^{15}$[m] $\sim$ 10^{16}[m]

Habitualmente se usa en Astronomía la unidad “parsec”:

Un **parsec** es la distancia a la cual 1[UA] subtiende un ángulo de “un segundo de arco”.

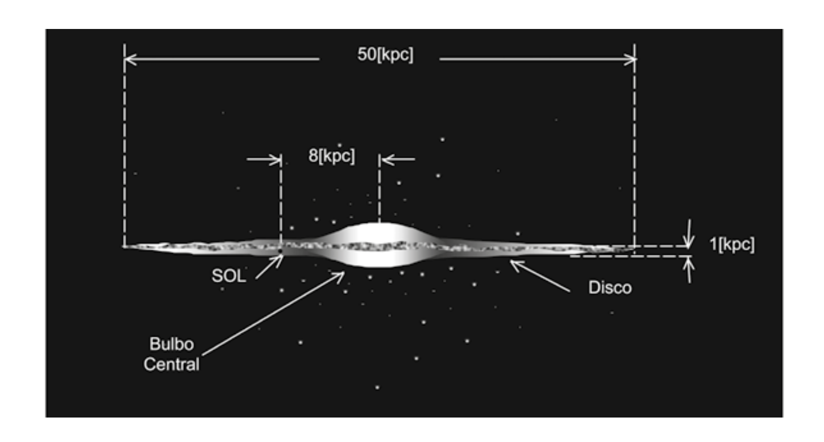


Aproximadamente se tiene que:

Un parsec $\cdots$ 1[pc] $\hat{=}$ 206 265[UA] $\hat{=}$ $3{,}0857 \cdot 10^{16}$ [m]

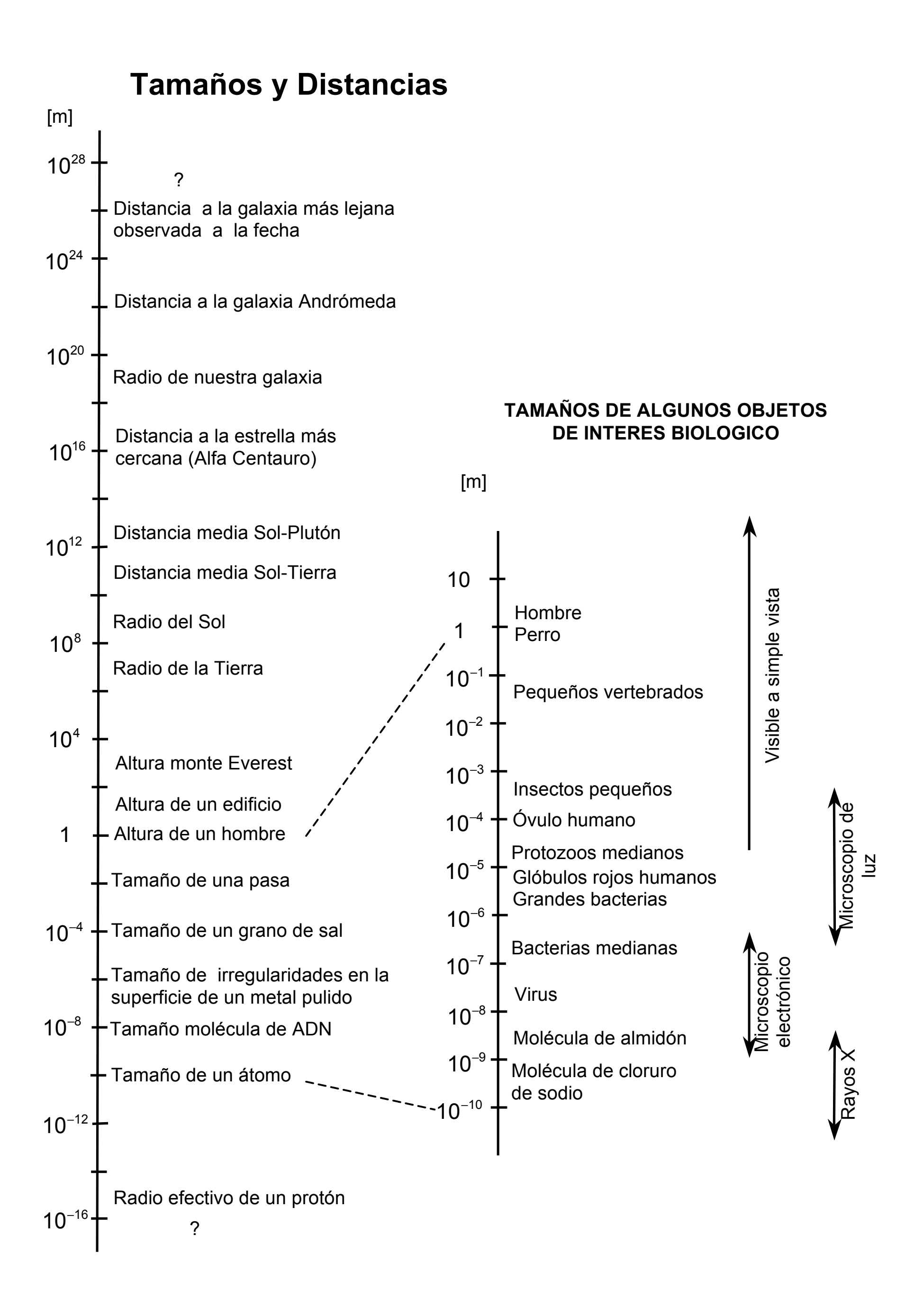
La distancia a la estrella más cercana, Alfa Centauro, es 1,33[pc] ó 4,33[AL].

En la figura siguiente, mostramos un dibujo esquemático de nuestra galaxia, la Vía Láctea, indicando sus medidas aproximadas, en “kilo parsecs” [kpc].



Una galaxia típica contiene de 10^9 a 10^{11} estrellas. Las menores distancias entre sus estrellas es del orden de 1[AL]. Las galaxias entre sí están separadas por distancias del orden de los 10^8[AL]. El Universo conocido se puede representar por una esfera del orden de 10^{10}[AL] de radio que contiene unas 10^{11} galaxias.

Le presentamos a continuación un cuadro de tamaños y distancias. Para cubrir tan amplio rango de órdenes de magnitud hemos usado como base la unidad **metro**, representándolos en una *escala de potencias de 10.*



Entreténgase, comparando los datos proporcionados en esta sección con los que figuran en los gráficos previos. Por ejemplo:

- La distancia a Alfa Centauro es 1,33[pc] :

$$1{,}33[pc] \triangleq 1{,}33 \cdot 1[pc] \triangleq 1{,}33 \cdot 3{,}1 \cdot 10^{16}[m] \sim 4{,}1 \cdot 10^{16}[m]$$

que es donde se representa a esta estrella en el gráfico correspondiente.

- Para el tamaño de cierta molécula se dio el dato 6 [nm] :

$$6, [nm] \triangleq 6, \cdot 1[nm] \triangleq 6, \cdot 10^{-9}[m]$$

que corresponde al caso de la molécula de almidón presentada en el gráfico correspondiente.

Ejercicios

1-55) Estime el número de átomos que cabrían a lo largo del diámetro de un glóbulo rojo.

1-56) Indique cuál de los siguientes números: 10^{70}, 10^{51}, 10^{20}, 10^{10} ó 10^{5}, representaría mejor al número de átomos de una naranja.

1-57) Calcule el número aproximado de veces que el diámetro de la Tierra cabe en el diámetro del Sol y el número aproximado de veces que el diámetro de la Tierra cabe en el radio de la órbita terrestre.

1-58) Suponga que usted hace *modelos* de varios objetos, de tal modo que un núcleo de oro (A = 200) está representado por una esfera de 7[cm] de radio. ¿Qué radio debería tener una esfera que represente a un virus, manteniendo la misma proporción?

1-59) Imagine que una manzana se expandiera hasta tomar el tamaño de la Tierra y que sus átomos se expandieran en la misma proporción. Calcule el nuevo diámetro de los átomos.

1-60) Si desea hacer un modelo planetario del sistema solar, y escoge para la Tierra una cereza de 1[cm] de diámetro, ¿qué escogería para la Luna y el Sol?

1-61) Calcule aproximadamente el tiempo que tarda un pulso de un láser en viajar de la Tierra a la Luna y volver a la Tierra.

1-62) Suponga que todo el Universo hubiese estado concentrado en un punto hace unos 12 mil millones de años $(1{,}2 \cdot 10^{10}[año])$ y que entonces, debido a una explosión, hubiese comenzado a expandirse uniformemente con una rapidez igual al 93% de la rapidez de propagación de la luz en el vacío. ¿Cuál sería la dimensión actual del Universo? Compare y comente.

Unidades inglesas de longitud

La unidad fundamental de longitud en el sistema inglés es la **yarda**. En 1824 se definió:

> *"La Imperial Standard Yard es la distancia entre los trazos medios sobre los dos tarugos de oro de una barra de bronce a 62[ºF] que se guarda en el Board of Trade en Westminster."*

Actualmente la **yarda** se define en relación al **metro internacional** según la equivalencia:

Una yarda 1[yd] $\triangleq$ 0,9144[m], **exactamente**.

> **Divertimento**: En el año 1101, el rey Enrique I declaró la unidad de longitud **yarda** como *"la mayor distancia entre la punta de su nariz y el extremo de su pulgar".* En el año 1324, el rey Eduardo II definió la **pulgada** como *"la distancia formada por 3 granos de cebada tomados de la parte central de una espiga y colocados a lo largo, uno tras otro".*
>
> Los romanos introdujeron las unidades **pie** y **milla** en las Islas Británicas. Una milla romana es la distancia recorrida por un soldado al dar dos mil pasos.

Simbolizaremos las unidades inglesas de longitud más usadas en la siguiente forma:

Una pulgada (inch)	1[in]
Un pie (foot)	1[ft]
Una yarda (yard)	1[yd]
Una milla (mile)	1[mile]

Entre ellas rigen las equivalencias:

1[yd]	$\triangleq$	3[ft]
1[ft]	$\triangleq$	12[in]
1[mile]	$\triangleq$	5280[ft] (milla terrestre)

De estas equivalencias y de la definición 1[yd] $\triangleq$ 0,9144[m] exactamente, obtenemos las siguientes equivalencias:

$$* \quad 1[ft] \triangleq \frac{1}{3}[yd] \triangleq \frac{1}{3} \cdot 1[yd] \triangleq$$

$$\triangleq \frac{1}{3} \cdot 0{,}9144[m] = 0{,}3048[m] \triangleq 30{,}48[cm]$$

$$** \quad 1[in] \triangleq \frac{1}{12}[ft] \triangleq \frac{1}{12} \cdot 30{,}48[cm] = 2{,}54[cm]$$

En resumen, para las principales unidades de longitud del sistema inglés rigen las siguientes equivalencias del sistema métrico:

$$1[yd] \;\hat{=}\; 0{,}9144[m] \text{ exactamente}$$

$$1[ft] \;\hat{=}\; 0{,}3048[m] \;\hat{=}\; 30{,}48[cm] \text{ exactamente}$$

$$1[in] \;\hat{=}\; 2{,}54[cm] \text{ exactamente}$$

Conversión de unidades

Es un hecho común que los resultados de mediciones de una misma cantidad física se expresen en diferentes unidades. La elección de estas unidades depende del orden de magnitud de las cantidades que se manejen, del campo particular de interés de la Física en el que se trabaje o del sistema oficial usado en cada país. Por lo tanto, para poder usar datos con soltura, es necesario acostumbrarse a transformar unidades.

Aunque en muchas ocasiones las conversiones entre unidades se hacen en forma intuitiva; en general, resulta conveniente efectuarlas sistemáticamente; para ello pueden seguirse varios métodos, como usted captará en los siguientes ejemplos:

* Determinemos la equivalencia entre *parsec* y *año luz*.

$$1[pc] \;\hat{=}\; ?\; [AL]$$

Disponemos de las siguientes equivalencias:

$$1[AL] \;\hat{=}\; 9{,}461 \cdot 10^{15}[m]$$

$$1[pc] \;\hat{=}\; 3{,}086 \cdot 10^{16}[m]$$

La primera de estas equivalencias la podemos poner en la forma:

$$1[m] \;\hat{=}\; \frac{1}{9{,}461 \cdot 10^{15}}[AL]$$

con lo cual escribimos sucesivamente:

$$1[pc] \;\hat{=}\; 3{,}086 \cdot 10^{16}\,[m] \;\hat{=}\; 3{,}086 \cdot 10^{16} \cdot 1[m] \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; 3{,}086 \cdot 10^{16}\; \frac{1}{9{,}461 \cdot 10^{15}}[AL] \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; \frac{3{,}086 \cdot 10^{16}}{9{,}461 \cdot 10^{15}}[AL] \;\simeq\; 3{,}262\,[AL]$$

o sea, $1[pc] \;\hat{=}\; 3{,}262\,[AL]$.

Procedemos de otro modo comprendiendo que:

de la equivalencia: $1[AL] \;\hat{=}\; 9{,}461 \cdot 10^{15}[m]$

se puede formar el cuociente: $\dfrac{1[AL]}{9{,}461 \cdot 10^{15}[m]}$

que tiene el valor **uno** sin unidades, porque corresponde a la razón entre dos longitudinales iguales.

Entonces:

$$1[pc] \;\hat{=}\; 3{,}086 \cdot 10^{16}[m] \cdot \frac{1[AL]}{9{,}461\cdot 10^{15}[m]} \;\hat{=}\; \frac{3{,}086\cdot 10^{16}\cdot [AL]}{9{,}461\cdot 10^{15}} \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; \frac{3{,}086\cdot 10^{16}}{9{,}461\cdot 10^{15}}[AL] \;\simeq\; 3{,}262\ [AL]$$

en donde hemos tratado al *nombre de la unidad que queremos reemplazar*, [m], como si fuera un *factor algebraico* usual y lo hemos *simplificado*.

** Encontremos cuántos metros hay en 17 **millas**.

Disponemos de las equivalencias:

$$1[mile] \;\hat{=}\; 5280[ft] \qquad 1[yd] \;\hat{=}\; 3[ft] \qquad 1[yd] \;\hat{=}\; 0{,}9144[m]$$

con las cuales:

$$1[mile] \;\hat{=}\; 5280[ft] \;\hat{=}\; 5280[ft] \cdot \frac{1[yd]}{3[ft]} \cdot \frac{0{,}9144[m]}{1[yd]} \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; \frac{5280\cdot 0{,}9144}{3}[m] \;\simeq\; 1609{,}344\ [m]$$

obteniendo la equivalencia: $1[mile] \;\hat{\simeq}\; 1609\ [m]$

Entonces:

$$17[mile] \;\hat{\simeq}\; 17 \cdot 1609[m] \;\simeq\; 2{,}7 \cdot 10^{4}[m]$$

*** Expresemos $c \simeq 2{,}998 \cdot 10^{8}[m/s] \simeq 3, \cdot 10^{8}[m/s]$ en $[mile/h]$

Con las equivalencias:

$$1[mile] \;\hat{=}\; 1609[m] \qquad\qquad 1[h] \;\hat{=}\; 3600[s]$$

escribimos sucesivamente:

$$c \;\hat{=}\; 3, \cdot 10^{8}[m/s] \;\hat{=}\; 3, \cdot 10^{8} \cdot 1\ [m/s] \;\hat{=}\; 3, \cdot 10^{8} \cdot \frac{1[m]}{1[s]} \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; 3, \cdot 10^{8} \cdot \frac{\frac{1}{1609}[mile]}{\frac{1}{3600}[h]} \;\hat{=}\; 3, \cdot 10^{8}\ \frac{3600[mile]}{1609[h]} \;\hat{\simeq}\; 7, \cdot 10^{8}[mile/h]$$

resulta: $c \simeq 7, \cdot 10^{8}[mile/h]$;

al calcular con $c \simeq 2{,}998 \cdot 10^{8}[m/s]$ se obtiene $c \simeq 6{,}708 \cdot 10^{8}[mile/h]$.

También podemos hacer este ejercicio en la forma siguiente:

$$c \simeq 3,\cdot 10^8\,[\text{m/s}] \triangleq 3,\cdot 10^8\,\frac{[\text{m}]}{[\text{s}]}\cdot\frac{1[\text{mile}]}{1609[\text{m}]}\cdot\frac{3600[\text{s}]}{1[\text{h}]} \triangleq$$

$$\triangleq 3,\cdot 10^8\cdot\frac{3600[\text{mile}]}{1609[\text{h}]} \triangleq 7,\cdot 10^8[\text{mile/h}]$$

dando, obviamente, el mismo resultado.

Los métodos usados en los ejercicios previos, para conversión de unidades, pueden ser expuestos en la siguiente forma general:

Consideremos una cantidad física F.

Sean $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\gamma]$ y $[\delta]$ posibles unidades para expresar valores de F.

Rigen para ellas las equivalencias:

$$1[\alpha] \triangleq u[\beta] \qquad 1[\beta] \triangleq v[\gamma] \qquad 1[\gamma] \triangleq w[\delta]$$

Para una situación particular se da el valor $F = b[\beta]$. Deseamos expresar este valor en las unidades $[\alpha]$ y $[\delta]$.

Podemos solucionar este problema en las siguientes formas:

$$* \quad F = b[\beta] \triangleq b\cdot 1[\beta] \triangleq b\cdot\frac{1}{u}[\alpha] \triangleq \frac{b}{u}[\alpha] = a[\alpha]$$

$$F = b[\beta] \triangleq b\cdot 1[\beta] \triangleq b\cdot v[\gamma] \triangleq bv\cdot 1[\gamma] \triangleq$$

$$\triangleq bv\cdot w[\delta] \triangleq bvw[\delta] = d[\delta]$$

Esencialmente, lo hecho aquí consiste en aislar la unidad que se desea cambiar y reemplazarla directamente por su equivalencia en la nueva unidad.

$$** \quad F = b[\beta] \triangleq b[\beta]\cdot\frac{1[\alpha]}{u[\beta]} \triangleq \frac{b\cdot 1}{u}[\alpha] = a[\alpha]$$

$$F = b[\beta] \triangleq b[\beta]\cdot\frac{v[\gamma]}{1[\beta]}\cdot\frac{w[\delta]}{1[\gamma]} \triangleq \frac{b\cdot v\cdot w}{1\cdot 1}[\delta] = d[\delta]$$

El procedimiento seguido aquí consiste en ir formando **razones** o cuocientes entre las unidades. Estas razones, por originarse en las correspondientes equivalencias, tienen valor **uno**.

Por ejemplo:

$$1[\gamma] \triangleq w[\delta] \text{ , entonces } \frac{1[\gamma]}{w[\delta]} \text{ tiene valor } 1$$

Tales razones, a las que llamaremos **factores de conversión**, permiten ir acomodando las expresión inicial de modo que las unidades que no deseamos mantener se vayan **cancelando**, tal como si los **nombres de las unidades** fueran **factores algebraicos** usuales.

Ejercicios

1-63) La distancia a una de las estrellas de la Nube Magallánica es 150[kAL]. Exprese esa distancia en metros.

1-64) Un grupo galáctico detectado en la dirección de la constelación "El Cangrejo" está a 50[Mpc] de distancia de la Vía Láctea. Exprese esta distancia en [Tm] , [MAL] y [kUA].

1-65) En un "MANUAL DE MANTENCIÓN DEL AUTOMÓVIL" aparece la siguiente instrucción: *"cambie el aceite del motor cada 2000 millas"*, pero, el instrumento indicador de la distancia recorrida por el automóvil está graduado en kilómetros. ¿Cada cuántos kilómetros debe efectuarse el cambio de aceite?

1-66) Se dan los siguientes resultados de mediciones de longitudes:

427,12[ft]; 123[mile]; 0,031[in] y 42,7[yd] .

Exprese estos resultados en la unidad del sistema métrico (múltiplo o submúltiplo del metro) que usted estime más convenientes para cada caso.

1-67) Transforme las siguientes mediciones: 12,43[m]; 321[μm] y 30,4[hm] a las unidades inglesas más afines.

1-68) Exprese porcentualmente la diferencia de 39,4[in] respecto a 3,40[ft].

1-69) Un atleta de USA ha saltado hasta 2[yd] 1[ft] 4[in] de altura. ¿En qué tanto por ciento debe aumentar la altura de sus saltos para alcanzar el record mundial de 2,29[m]?

1-70) Un joven tiene 3 amigos, *C*, *P* y *R*, que viven a distancias de 8,7[mile], 2,8[league] y 71[furlong] desde su casa, respectivamente. Use las equivalencias: 1[furlong] $\triangleq$ 40[rod]; 1[rod] $\triangleq$ 5 1/2[yd] y 3[mile] $\triangleq$ 1[league], además de las que Ud. ya conoce, para determinar cuál de los amigos es el que vive más cerca y cuál el que vive más lejos de él.

1-71) Considere dos cintas, *A* y *B* , de longitudes L_A = 89,1[link] y L_B = 1,2[chain] . Estas unidades se definen por las equivalencias 100[link] $\triangleq$ 1[chain] y 1[chain] $\triangleq$ 66[yd] .

Exprese las longitudes de ambas cintas en [m]. Exprese la longitud de la cinta *A* en término de la longitud de la *B* (L_A = ? L_B) .

1-72) Una carretilla de hilo de 200[yd] vale $ *A* . Si usted necesitara 420[m] de hilo ¿cuánto debería gastar?

1-73) Se desea comparar precios de un mismo tipo especial de alambre en Inglaterra y en Alemania:

2 ½ [yd] cuestan B[libra esterlina] en Inglaterra y 2,6[m] cuestan 6,7·B[euro] en Alemania. Infórmese sobre la equivalencia entre estas monedas para decidir dónde conviene adquirir el alambre.

1-74) La rapidez de propagación del sonido, en el aire en ciertas condiciones es 340[m/s]. Exprese este valor en las siguientes unidades: [cm/s], [m/h], [km/h], [mile/h] y [ft/s].

1-75) En un planeta imaginario, Gayron, las unidades fundamentales para tiempo y distancia son **rouj** y **deip**, respectivamente. Comparando datos sobre la semivida del neutrón los habitantes de Gayron han determinado que 1[rouj] $\triangleq$ $6{,}7 \cdot 10^4$[s]. La velocidad de propagación de la luz en vacío se expresa en Gayron por $4{,}2 \cdot 10^{13}$[deip/rouj]. Determine la equivalencia entre deip y metro.

1-76) Imagine que una hormiga le contara que en la última reunión de la SOCHO (Sociedad Científica de Hormigas) decidieron normalizar su unidad de longitud con las del sistema métrico; para ello eligieron: 1[horm] $\triangleq$ 0,5[mm]. Ayude usted a la SOCHO transformando: 1[mm]; 6,1[cm]; 1,3[m] y 2,7[km] a horms.

1-77) Un día en el planeta Gorti equivale a 37[h] y se divide en 16[rouh]. Un terrícola llega a Gorti y cuando su reloj marca 00:00[h] ajusta un reloj de Gorti a 00:00[rouh]. ¿Cuánto indicará tal reloj gortiano cuando el reloj del terrícola marque las 5:45[h] ?

1-78) Use las equivalencias:

$$1[\text{ñau}] \triangleq 13{,}4[\text{bee}] \quad \text{y} \quad 1[\text{guau}] \triangleq 5{,}2 \cdot 10^{-3}[\text{muu}]$$

para expresar:

$$A = \frac{2{,}5[\text{bee}] \cdot 4{,}9[\text{bee}]}{\left(0{,}51[\text{muu}]\right)^2}$$

en términos de [ñau] y [guau] .

CAPÍTULO II

MEDICIONES

> *"Si usted puede medir lo que está considerando y expresarlo en números, Ud. sabe algo sobre ello; pero cuando no puede cuantificarlo su conocimiento es vago e insatisfactorio, podría ser el comienzo de un conocimiento, aunque sin alcanzar el nivel de ciencia."*
>
> Lord Kelvin (1883)

Ya hemos comentado que la Física, como en general todas las Ciencias Naturales, se fundamenta en **observaciones**. La palabra "observación" en su uso diario da a entender solamente un acto de percepción; pero su connotación científica moderna implica una **acción cuantitativa**, lo cual requiere **mediciones**.

El progreso de la Física se ha debido, en gran parte, al énfasis puesto en lo cuantitativo de la observación. Con esta metodología se ha llegado a establecer **relaciones cuantitativas**, o sea formular **leyes**, las cuales constituyen la médula de la Física.

Por ejemplo, leyes como:

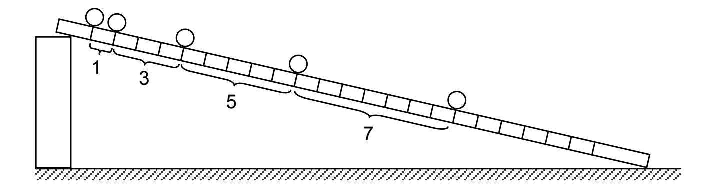
- La distancia recorrida por un cuerpo que se suelta en "caída libre" está dada por: $d = \frac{1}{2} g\, t^2$.
- La intensidad de la corriente eléctrica por un conductor metálico de resistencia R, que está conectado a una batería de voltaje V, es : $I = V/R$.
- El período de oscilación de un péndulo de largo L en un lugar con aceleración de gravedad g es: $T = 2\pi\sqrt{L/g}$.

La actitud actual de fundamentar las ciencias en la experimentación, partió efectivamente con los trabajos de Galileo hace unos 400 años; antes de él, Bacon ya había insistido en que la experimentación es la base de las ciencias. Para la gran mayoría de los físicos los trabajos de Galileo marcan el "nacimiento de la Física".

Hasta entonces, el *estudio del movimiento* había tenido básicamente el carácter de discusiones lógicas, como las presentadas por Aristóteles, otros filósofos griegos y los continuadores de esa tradición hasta mediados del siglo XVII. Las conclusiones que obtenían eran consideradas como probadas por raciocinios puros o, a lo más, por actos de percepción sensorial, sin realizar mediciones.

- Por ejemplo, Aristóteles pensaba que la velocidad que adquiría un cuerpo era inversamente proporcional a la resistencia del medio (en el simbolismo actual sería $v \propto 1/R$). En el vacío la resistencia debería ser nula, por lo tanto, el cuerpo se movería con velocidad infinita y esto lo rechazaba Aristóteles como una inconsecuencia, concluyendo que el vacío no podía existir.

Uno de los experimentos de Galileo consistió en dejar rodar una bola por una ranura en un plano inclinado y observar el movimiento. Pero Galileo no se limitó a mirar, midió cuánta distancia caía la bola en determinado tiempo.



Trazos medidos a intervalos iguales de tiempo.

Métodos para medir distancias eran bien conocidos en su época; sin embargo, no había medios para medir tiempos relativamente cortos con cierta precisión, así es que en ese experimento Galileo contó sus pulsaciones para controlar intervalos iguales de tiempo.

Esperamos que usted vaya asimilando, poco a poco, algunas de las características comunes a todo tipo de medición. Veremos juntos algunos casos de mediciones de longitudes, ángulos, áreas y volúmenes; dejaremos otros, como ejercicios, para que Ud. los desarrolle personalmente.

Medición del largo de un lápiz

Tomamos un lápiz de pasta corriente y medimos su **largo** con una regla graduada en centímetros y milímetros. Suponga que distintas personas realizan la medición varias veces, del mismo lápiz y con la misma regla, obteniendo los siguientes resultados en *centímetros*:

14,31 14,30 14,38 14,32 14,35
14,32 14,39 14,31 14,36

Podemos preguntarnos ¿cuál es el “largo” del lápiz? Aceptamos que el largo del lápiz es un largo bien definido y que no ocurre que el lápiz se alarga o se acorta según sea quien lo mida ni como se mida. Lo que sucede es que hay **errores de medición**. En este caso los errores se debieron probablemente a que : no ajustamos siempre en la misma forma el extremo del lápiz con la marca “cero” de la regla, nos inclinamos al medir el otro extremo del lápiz, no estimamos bien las “décimas de milímetros”, ...

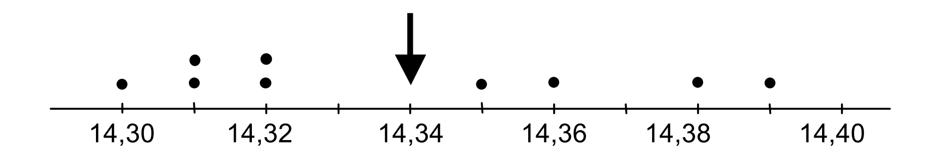
Con el objeto de considerar todas las mediciones efectuadas y tratar de eliminar las influencias de los posibles errores, sacamos **el promedio** de estas mediciones. Para esto sumamos todos los valores medidos y dividimos por el número de mediciones:

$$\text{Largo promedio} = \frac{\text{Suma de los largos medidos}}{\text{Número de mediciones}}$$

Con los valores obtenidos en las 9 mediciones indicadas resulta:

$$\text{Largo promedio} = \bar{L} = \frac{129{,}04\,[\text{cm}]}{9} \simeq 14{,}34\,[\text{cm}]$$

Si representamos en un gráfico las mediciones hechas y el promedio de ellas, podemos visualizar cuánto difiere cada medición con respecto al promedio:



Al referirnos a la diferencia $L_i - \overline{L}$ entre una medida L_i y el promedio calculado $\overline{L}$ usaremos la expresión "error con respecto al promedio".

Resulta más ilustrativo calcular el "error porcentual respecto al promedio":

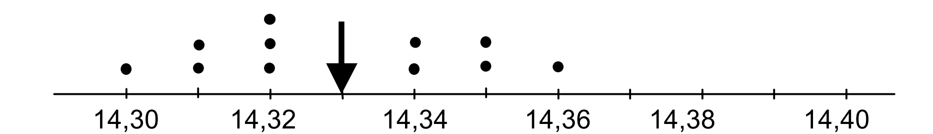
$$\text{error porcentual} = \frac{L_i - \overline{L}}{\overline{L}} \cdot 100\,\%$$

Esta cantidad nos da una medida comparativa de la magnitud del **error cometido** con respecto al valor que se está midiendo.

- Por ejemplo, para la medición $L_i = 14{,}38\,[\text{cm}]$ el *error porcentual con respecto al promedio* $\overline{L} = 14{,}34\,[\text{cm}]$ es:

$$\text{e.p.} = \frac{14{,}38 - 14{,}34}{14{,}34} \cdot 100\% = \frac{0{,}04}{14{,}34} \cdot 100\% = 0{,}3\%$$

Consideremos otro conjunto de mediciones, obtenido por diferentes personas, del largo del mismo lápiz. En el siguiente gráfico mostramos estas mediciones e indicamos el promedio correspondiente (14,33[cm]) :



El hecho que de dos series de mediciones análogas obtengamos "casi el mismo" promedio nos dice que: el promedio por sí solo no nos informa del "mejor valor" para el largo del lápiz. Debemos recurrir por tanto a otras consideraciones para decidir.

Al comparar los gráficos en que representamos cada serie de mediciones nos damos cuenta que las mediciones están más **dispersas** en la primera serie. Esto es, en el primer caso las **desviaciones** (diferencias entre cada medición y el promedio) son en general mayores.

Parece razonable pensar que un conjunto de mediciones que tenga una menor dispersión nos da una mejor información del valor que buscamos. Debemos entonces, encontrar una forma de representar **cuantitativamente** la dispersión de un conjunto de mediciones.

Con tal propósito estudiemos los valores obtenidos en el primer grupo de mediciones iniciales, comenzando por la siguiente tabla:

$L_i\left[cm\right]$	$L_i-\bar{L}\left[cm\right]$	$(L_i-\bar{L})^2\left[cm^2\right]$
14,31	- 0,03	$9 \cdot 10^{-4}$
14,30	- 0,04	$16 \cdot 10^{-4}$
14,38	+ 0,04	$16 \cdot 10^{-4}$
14,32	- 0,02	$4 \cdot 10^{-4}$
14,35	+ 0,01	$1 \cdot 10^{-4}$
14,32	- 0,02	$4 \cdot 10^{-4}$
14,39	+ 0,05	$25 \cdot 10^{-4}$
14,31	- 0,03	$9 \cdot 10^{-4}$
14,36	+ 0,02	$4 \cdot 10^{-4}$

Observemos que las desviaciones $L_i-\bar{L}$ son positivas en algunos casos y negativas en otros. Si calculamos el **promedio de las desviaciones**, los valores positivos y negativos de ellas se cancelan en la suma y tal **promedio nulo** no es de ninguna utilidad. Una manera de conseguir que no influyan los signos de las desviaciones es tomar sus cuadrados: $\left(L_i-\bar{L}\right)^2$†. Para tomar en cuenta el conjunto de las mediciones calculamos el **promedio** de tales "desviaciones al cuadrado":

$$\frac{\text{Suma de los}\left(L_i-\bar{L}\right)^2}{\text{Número de mediciones}}$$

Como estamos midiendo largos y no "largos al cuadrado", debemos tomar la **raíz cuadrada** de este promedio. Al valor que resulta le daremos el nombre de **desviación estándar** y lo simbolizaremos con la letra σ:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\text{Suma de los}\left(L_i-\bar{L}\right)^2}{\text{Número de mediciones}}}$$

- Para nuestro ejemplo resulta:

$$\sigma=\sqrt{\frac{88\cdot 10^{-4}[cm^2]}{9}} \simeq \sqrt{9{,}8}\cdot 10^{-2}[cm] \simeq 0{,}03[cm]$$

Usaremos el siguiente **convenio** para informar el resultado:

largo medido = largo promedio $\pm$ desviación estándar

donde la desviación estándar nos indica la "precisión" con que se efectuaron las mediciones.

- Con los datos numéricos considerados, resulta:

$$L=\bar{L}\pm\sigma = 14{,}34 \pm 0{,}03[cm]$$

† Otro modo de hacer que no influyan los signos de las desviaciones, sería tomar sus valores absolutos. Una ventaja, entre otras, de usar los valores al cuadrado, es que aumenta la influencia de los errores grandes y minimiza la influencia de los errores pequeños en el valor de la desviación estándar. Se prefiere, entonces, este último método, pues da una mejor información acerca de la precisión con que fue hecha la medida.

Le recomendamos que usted repita este "experimento" con unos 3 ó 4 de sus compañeros. Escogiendo un lápiz y usando una misma regla midan sucesivamente el largo del lápiz. Para que no se influencien mutuamente, cada uno puede anotar en un papel el resultado de su medición y no se la comunica a los otros. Hagan 2 ó 3 rondas de mediciones y luego las analizan.

A través de este ejemplo hemos presentado varias ideas generales sobre mediciones: errores de medición, valores medios y desviación estándar que, con modificaciones apropiadas, son aplicables a procesos de medición de cualquier cantidad física.

Notación algebraica

Consideremos un conjunto de mediciones de una cierta cantidad física:

$$\{ M_1 ,\ M_2 ,\ M_3 ,\ \ldots\ldots\ldots ,\ M_N \}$$

El **valor promedio** de estas mediciones es:

$$\text{valor promedio} = \frac{\text{Suma de las mediciones } M_i}{\text{Número de mediciones}}$$

$$\overline{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} M_i}{N}$$

La "desviación estándar" correspondiente a estas mediciones es:

$$\text{Desviación estándar} = \sqrt{\text{Promedio de las desviaciones al cuadrado}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{Suma de las } \left(M_i - \overline{M}\right)^2}{\text{Número de mediciones}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(M_i - \overline{M}\right)^2}$$

El resultado del estudio de este conjunto de mediciones lo expresamos adoptando el siguiente **convenio**:

$$\text{valor medido} = \text{valor promedio} \pm \text{desviación estándar}$$

$$M_{medido} = \overline{M} \pm \sigma_M$$

Hemos usado el **subíndice M** acompañando al símbolo de la desviación estándar para indicar que éste se refiere al conjunto de mediciones $\{ M_1, \ldots\ldots , M_N \}$.

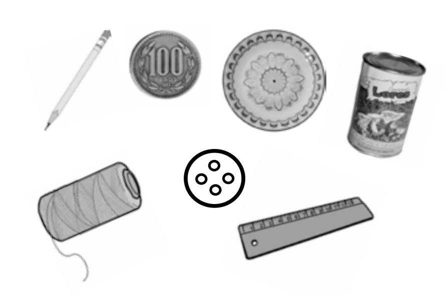
Medición de π

Un ejemplo en el cual deben medirse dos longitudes y efectuar un cálculo entre ellas, lo proporciona el caso que llamaremos medición de π.

Al mencionar π inmediatamente pensamos en el cuociente entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de ella. El número π es uno de los números "maravillosos" en matemáticas; su valor ha sido calculado con un número impresionante de decimales. Limitémonos a mencionar π = 3,14159 26535 89793 23846 ...

Escoja algunos objetos como lápices, monedas, botones, tarros de conserva, platos, ollas, etc.

Provéase de hilo y de una regla graduada en centímetros y milímetros.



Mida usted el diámetro (directamente con la regla) y la longitud de la circunferencia (usando el hilo) para cada uno de los objetos que ha escogido.

Para cada par de mediciones: la longitud C y el diámetro D de la circunferencia, hechas en cada objeto, calcule el cuociente C / D.

$$\text{valor calculado de } \pi = \pi_C = \frac{C}{D}$$

Determine usted para cada "valor calculado de π" el "error porcentual respecto a π":

$$\text{error porcentual} = \frac{\pi_C - \pi}{\pi} \cdot 100$$

Fíjese en los errores porcentuales, ¿dependen ellos del tamaño de los objetos? Comente.

Después de haber desarrollado completa y cuidadosamente las etapas descritas, usted debe haberse percatado que inevitablemente hay **errores de medición**; ellos pueden provenir de: apreciación del centro de la circunferencia y medición del diámetro; forma de colocar el hilo entre esas marcas (si lo coloca algo suelto sobre la regla, no mide bien; si lo tensa, cambia el largo; si un extremo queda entre dos divisiones de la regla, debe estimar la porción correspondiente entre ellas). Piense Ud. en otras posibles fuentes de errores de medición.

También debe considerar que los contornos de los objetos que Ud. está usando **no** son circunferencias perfectas. En rigor, la circunferencia al igual que todas las figuras geométricas son **idealizaciones** y las usamos como **modelos** para representar ciertas características de los objetos.

La influencia de tales factores puede ser reducida calculando el **valor promedio** de todos los π_C obtenidos:

$$\overline{\pi}_C = \frac{\text{Suma de los valores de } \pi_C}{\text{Número de objetos medidos}} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\pi_C\right)_j$$

La comparación de este valor promedio con π puede expresarla porcentualmente:

$$\text{error porcentual "medio"} = \frac{\overline{\pi}_C - \pi}{\pi} \cdot 100$$

¿Es este valor igual al promedio de los errores porcentuales individuales?

Continúe analizando las mediciones en forma análoga a lo hecho en el caso de medición del largo de un lápiz: construya una tabla con los valores de π_C, $\left(\pi_C - \overline{\pi}_C\right)$ y $\left(\pi_C - \overline{\pi}_C\right)^2$ y calcule la desviación estándar σ_π y exprese:

$$\text{valor calculado de } \pi = \overline{\pi}_C \pm \sigma_\pi$$

- Le presentamos un cálculo que hicimos con un botón:

Medimos $D = 17{,}0\,[mm]$ y $C = 56{,}5\,[mm]$

Calculamos $\pi_C = \frac{C}{D} = \frac{56{,}5}{17{,}0} = 3{,}323529\,...$

¿Tiene sentido que calculemos con tantos decimales? Realmente **no** lo tiene; hemos introducido errores en la medición de la longitud de la circunferencia y del diámetro y opinamos que la "tercera cifra" es dudosa. No podemos pretender generar, por cálculo, un número con más **cifras significativas** que las que tienen los números medidos. Nos quedamos satisfechos con $\pi = 3{,}32$.

¡Revise sus cálculos para π_C y efectúe aproximaciones dejando el número de cifras que usted considere conveniente!

El error porcentual para el valor calculado $\pi = 3{,}32$ vale:

$$\frac{3{,}32 - 3{,}14}{3{,}14} \cdot 100 = \frac{0{,}18}{3{,}14} \cdot 100 \simeq 6\%$$

donde hemos aproximado π a 3,14 ya que π_C fue expresado sólo con tres cifras significativas.

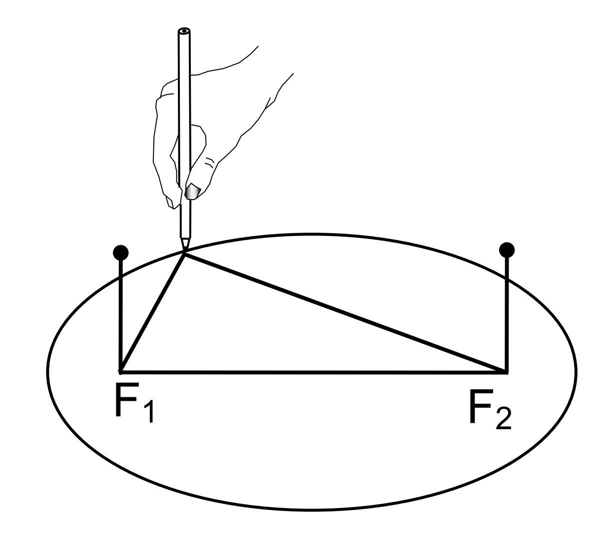
Si desea realizar el "experimento" en forma más completa, **repita** las mediciones del diámetro (D) y la longitud (C) de las circunferencias de los objetos que usted ya seleccionó. Si eligió N objetos (Objeto 1, Objeto 2,…Objeto N) y para cada uno de ellos realiza M mediciones (Medición 1, Medición 2, …,Medición M) podrá llenar la siguiente tabla:

	Medición 1			Medición 2				Medición M		
	D	C	C / D	D	C	C / D		D	C	C / D
Objeto 1										
Objeto 2										
.							. . .			
.										
.										
Objeto N										

Con los valores obtenidos podrá calcular el valor promedio de π_C para cada objeto en M mediciones (usando los cálculos de C/D en líneas horizontales o **filas**) o calcular el valor promedio de π_C para la serie de N objetos en cierta medición (usando los cálculos de C/D en líneas verticales o **columnas**). Después de hacer ambos cálculos podrá encontrar el "valor promedio de los valores promedios", ya sea por filas o por columnas y el valor promedio total. Puede también calcular porcentajes de error, desviaciones estándar, etc.

Divertimento: La circunferencia es la curva más simétrica y de mayor belleza, en su simplicidad, que podamos imaginar. Puede trazar una circunferencia sobre un plano usando un compás. También puede hacerla fijando uno de los extremos de un trozo de hilo en un punto del plano, amarrando un lápiz al otro extremo y moviendo el lápiz de tal modo que el hilo se mantenga tenso.

Otra curva "parecida" es la **elipse**. Puede trazarla de acuerdo a las siguientes instrucciones: fije dos alfileres en dos puntos de un plano; coloque un trozo de hilo con sus extremos unidos, enlazando ambos alfileres; finalmente guíe la punta de un lápiz manteniendo tenso el hilo. Se comprende por esta construcción que la elipse es el lugar geométrico de los puntos que mantienen constante la suma de sus distancias a dos puntos fijos. Estos puntos fijos se llaman **focos** de la elipse (F_1 y F_2 en el dibujo).



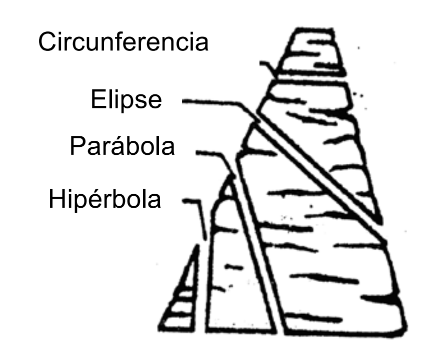
Compruebe tal definición haciendo mediciones. Construya una serie de elipses acercando cada vez más los focos. ¿Qué sucede si los focos coinciden? Mida el perímetro de la elipse ¿puede relacionarlo con π?

Circunferencias y elipses pertenecen a la familia de las "curvas cónicas".

Elija una zanahoria "fresquita", grande y lo más simétrica que encuentre.

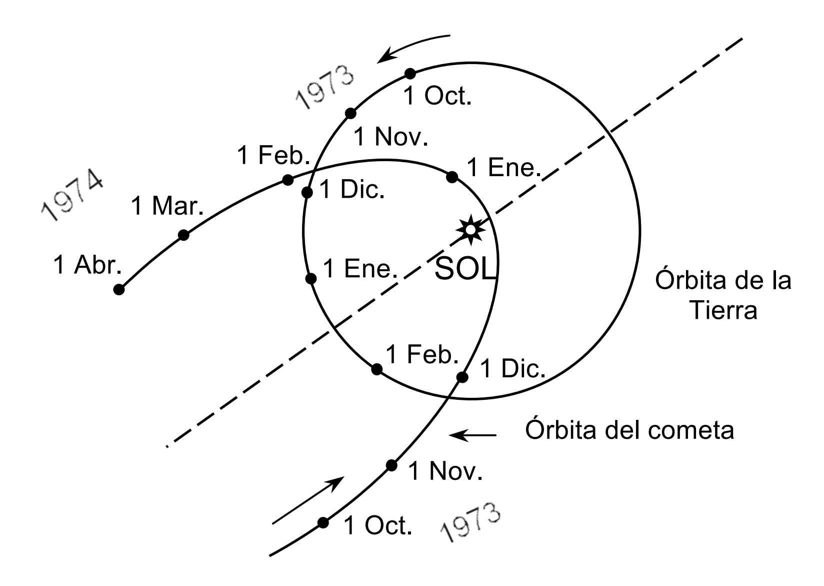
Haga cortes como se indican en la figura. Los contornos de esas *secciones cónicas* son las *curvas cónicas*.

Marque tales contornos colocando los trozos de zanahoria sobre un papel.



En muchas ocasiones nos encontraremos en Física con curvas cónicas. Por ejemplo, las trayectorias de los planetas y cometas alrededor del Sol pueden describirse por cónicas.

Mire las representaciones de las órbitas de la Tierra y del cometa Kohoutec en la siguiente figura.



La menor distancia entre el Kohoutec y la Tierra fue de 0,8[UA].

El **perihelio** (distancia mínima al Sol) del Kohoutec fue 0,14[UA].

Estime, usando el gráfico y estos datos, **cuándo** el Kohoutec estuvo más próximo a la Tierra.

Para que usted practique el arte de estimar y de medir longitudes y distancias y también un poquito del análisis de mediciones, le proponemos a continuación algunos ejercicios. Al hacerlos preste atención, cuando sea pertinente, a los tipos y fuentes de errores de medición que Ud. encontrará; anótelos y coméntelos.

Ejercicios

2-1) Ingénieselas para determinar el espesor de un vidrio **instalado** en una ventana usando, como único *instrumento de medición*, una regla. Haga mediciones.

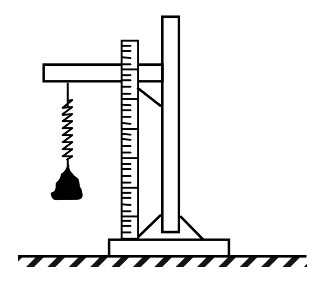
2-2) Determine el espesor de las hojas de un libro usando una regla corriente. Examine si es posible medir el espesor de una hoja directamente. Haga mediciones agrupando hojas; por ejemplo: 15, 34, 50, 78, 123 y todas las hojas del libro. Aprenda a determinar el número de hojas según la numeración de las páginas. Calcule el espesor medio de las hojas del libro. Comente sobre errores de medición.

2-3) Mida el ancho de una mesa rectangular. Haga a lo menos 5 mediciones; exprese las lecturas en *centímetros*, estimando los centésimos de centímetro. Calcule el ancho medio de la mesa. Repita la medición usando una regla *graduada en pulgadas*, estimando los 1/16 de pulgada. Compare los resultados.

2-4) Determine la distancia media entre "los surcos" de un "disco de vinilo".

2-5) Mida el diámetro de un alambre usando una regla graduada en milímetros. Como un posible método le sugerimos que enrolle el alambre en un lápiz (cuidando que todas las vueltas se toquen), que cuente el número de vueltas completas y que mida el largo que ellas ocupan. Haga varias mediciones con diferentes números de vueltas y calcule el diámetro medio del alambre. En forma análoga determine el espesor de uno de sus cabellos; puede enrollarlo en un palo de fósforo.

2-6) Construya un resorte enrollando un alambre en un palo de escoba. Amarre un objeto a un extremo y fije el otro de tal modo que el resorte pueda oscilar libremente en dirección vertical. Coloque una regla paralelamente al resorte, lleve el objeto más abajo que su posición de equilibrio y mida; suelte el resorte y mida el punto más alto al que llega el borde inferior del objeto. Repita el experimento varias veces soltando siempre el objeto desde la misma posición. Comente sobre los errores de medición.



2-7) Determine el diámetro de la Luna usando el siguiente procedimiento: sobre el vidrio de una ventana pegue dos cintas opacas separadas en 2,0[cm]; haga un agujerito en una tarjeta; observe la Luna por el agujerito, colocando la tarjeta pegada al ojo y ubicándola entre las dos cintas; aléjese de la ventana hasta que la Luna ocupe totalmente el espacio entre las cintas y mida la distancia de la ventana a la tarjeta (necesitará la ayuda de un compañero). Utilice la geometría de los triángulos semejantes y el dato distancia Tierra-Luna (pág. 36) para calcular el diámetro de la Luna. No intente utilizar este método para determinar el diámetro del Sol, dañaría sus ojos. ¿Podría emplear este procedimiento para determinar el diámetro de una estrella?

2-8) Exprese la rapidez 312,3[m/s] del sonido dentro de un tubo lleno de cierto gas, de modo que indique que se ha medido con una "precisión" de 0,2[m/s]. Exprese porcentualmente el rango de variación de las mediciones.

2-9) La medición del diámetro de una pieza de hojalata da por resultado $2{,}60 \pm 0{,}03$ [cm]. Calcule la incertidumbre porcentual en el perímetro de ese objeto. Comente.

2-10) La medición del largo de una varilla produce $\overline{L} = 80{,}44$[cm] . Se han hecho 8 mediciones; pero al tratar de rehacer los cálculos se encuentran sólo las siguientes anotaciones: 80,41 ; 80,43 ; 80,42 ; 80,47; 80,45 ; 80,44 y 80,42. Encuentre el valor de la medición "perdida".

2-11) La medición del largo de una varilla produce $L = 80{,}44 \pm 0{,}06$[cm]. Se han hecho 8 mediciones; pero, al tratar de rehacer los cálculos se encuentran sólo las siguientes anotaciones: 80,41 ; 80,43; 80,42; 80,47 ; 80,45 y 80,44. Encuentre el valor de las mediciones "perdidas".

2-12) Un estudiante efectúa mediciones para determinar el tiempo que demora en ir de su casa al liceo. Para diferentes días, registra la hora de salida de casa y la hora de llegada al liceo; sus indicaciones están indicadas en la tabla adjunta.

Para estas mediciones, calcule: el tiempo promedio empleado en este trayecto; el error porcentual, respecto al promedio, del menor y del mayor tiempo empleado.

Día	Salida	Llegada
Ma.	7:12	7:40
Mi.	7:15	7:45
Ju.	7:30	7:55
Vi.	7:10	7:38
Sá.	7:08	7:37
Lu.	7:21	7:47
Ma.	7:06	7:31
Mi.	7:19	7:48
Ju.	7:11	7:37

2-13) Un náufrago decide fabricar una escala para que le sirva de calendario, grabándola en el contorno de un árbol de 20[cm] de diámetro. En ella marca los días y meses durante 3 meses. Suponiendo que la escala ocupa todo el perímetro del tronco, construya una réplica plana de la escala. Calcule la distancia en la réplica que corresponde a un día.

Errores de Medición

Los resultados de un experimento se expresan, generalmente, por un conjunto de *valores numéricos* obtenidos por mediciones.

Es un hecho natural e inevitable el que toda medición vaya siempre acompañada de errores.

La validez de un experimento es, a menudo, juzgada por la confianza que se atribuya a los resultados numéricos, la cual depende del análisis de los errores de medición.

Le presentamos a continuación algunos ejemplos de errores:

- Errores de calibración de instrumentos; errores producidos por hábitos de trabajo del observador; errores introducidos por factores que no se consideraron al hacer el experimento (como usar un instrumento a una temperatura distinta a la que fue calibrado);… estos son ejemplos de **errores sistemáticos**.
- Errores de apreciación en la medición; errores obtenidos por condiciones fluctuantes; errores debidos a las características del objeto medido (como variaciones observadas en longitudes porque las caras no están bien pulidas o no son paralelas); éstos son ejemplos de **errores al azar o aleatorios**.
- Se cometen también **errores burdos,** como equivocarse al leer un instrumento, o al contar el número de sucesos o al calcular.

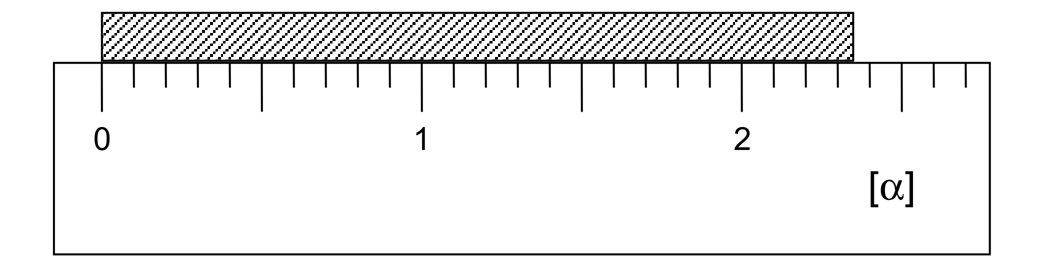
Los errores aleatorios son usualmente los más responsables de que se obtengan valores distintos al repetir una medición. Como son errores al azar, su influencia puede disminuirse repitiendo la medición varias veces y tomando el promedio de los valores obtenidos como el resultado de la medición.

Los errores sistemáticos se presentan cuando factores indeseables (externos o internos) interactúan de modo consistente con el sistema en estudio. La destreza del físico experimental se manifiesta al reducir (por diseño o por cálculo) este tipo de errores que no son, necesariamente, detectados ni eliminados por simple repetición del experimento.

Al dar a conocer el resultado de las mediciones efectuadas de una cantidad física debemos, además de su valor y de sus unidades, informar la **incerteza** o **error experimental** que se produce en el hecho de medir.

Analizaremos algunas fuentes de errores que suelen afectar a los procesos de medición.

Una primera fuente se refiere a la limitación de la precisión de la medida impuesta por la graduación del instrumento. A esta limitación la llamaremos el **error del instrumento**. El ejemplo que se desarrolla a continuación nos explicará en qué consiste este error y cómo lo cuantificamos.



Al medir el objeto de la figura usando un regla graduada en unidades "alfa" $[\alpha]$,afirmamos que el valor de la medida es de 2,35$[\alpha]$ en la que la cifra de las centésimas es aproximada.

El valor medido considerando el error del instrumento lo informamos como:

$$\left(2,35 \pm 0,05\right)\left[\alpha\right]$$

Este resultado, expresado en décimas de α, $\left[d\alpha\right]$, es:

$$\left(23,5 \pm 0,5\right)\left[d\alpha\right]$$

en el cual la cifra de las décimas es la cifra aproximada.

Prestar atención que en ambos casos la incerteza es la misma. Estamos estimando que el error del instrumento es aproximadamente un medio (1/2) de la división más pequeña de la escala grabada en el instrumento.

Otras causas o fuentes de errores son las fluctuaciones del sistema y del proceso de medición, la habilidad, estado y comportamiento del investigador. Los errores producidos en estos casos son usualmente los responsables de que se obtengan valores distintos al repetir una medición. Como son errores al azar, su influencia puede disminuirse repitiendo la medición varias veces.

A este conjunto de errores lo llamaremos **errores aleatorios**. La **desviación estándar** es una de las estimaciones de los errores aleatorios de un conjunto de medidas.

Como para aminorar el efecto de los errores aleatorios debemos hacer cierto número de medidas, el informe del proceso de mediciones se expresa en este caso como:

$$\left\{\text{valor promedio} \pm \text{desviación estándar}\right\}\left[\text{unidad}\right]$$

Tenemos que tomar en cuenta que siempre está presente el error del instrumento. Debe, entonces, informarse en la expresión del valor de la medición el **mayor error** entre el **error del instrumento** y la **desviación estándar**.

Cuando se realizan mediciones hay que ser muy cuidadoso con el fin de evitar errores que son resultado de leer mal el instrumento, no usarlo en forma debida, ni respetando las condiciones ambientales importantes y otros errores burdos que no son susceptibles de disminuirlos con repeticiones.

Advertencia: En muchas oportunidades a lo largo de este curso le pediremos que efectúe mediciones; pero, a menos que se lo digamos en forma explícita, **no** analice los errores de medición. Nuestra intención al tratar algo sobre errores de medición fue el hacerle presente que ellos existen. Es suficiente que por ahora Ud. sepa que en toda medición se introducen errores y que ellos pueden y deben ser analizados. En el futuro, cuando usted trabaje en **laboratorios**, los detectará y aprenderá a manejarlos.

Queremos presentarle un caso práctico para que usted comience a "sentir" la importancia de considerar los errores de medición:

- Deben fabricarse anillos que se ajusten alrededor de cilindros de 8,17[cm] de diámetro, valor medido con un 0,2% de error.

Si el error porcentual (e.p.) en la medición del diámetro interior de los anillos (D_a) fuera igual que en la medición del diámetro exterior de los cilindros (D_c), al fabricar anillos con diámetro:

$$D_a = D_c = 8{,}17\,[\text{cm}]$$

la situación más desfavorable que podría producirse es:

cilindro de diámetro:

$$D_c' = D_c + \frac{\text{e.p.}}{100} D_c = \left(1 + \frac{\text{e.p.}}{100}\right) \cdot D_c =$$

$$= 1{,}002 \cdot 8{,}17\,[\text{cm}] \simeq 8{,}19\,[\text{cm}]$$

anillo de diámetro:

$$D_a' = D_a - \frac{\text{e.p.}}{100} D_a = \left(1 + \frac{\text{e.p.}}{100}\right) \cdot D_a =$$

$$= 0{,}998 \cdot 8{,}17\,[\text{cm}] \simeq 8{,}15\,[\text{cm}]$$

Notamos que habría casos en que los anillos no entrarían en los cilindros. En las industrias se pone cuidado para minimizar la ocurrencia de esta situación y se establecen normas para rechazar las unidades defectuosas.

Cifras significativas

En Física tratamos con números que se originan en o que están relacionados con mediciones. Efectuamos "operaciones matemáticas" con tales números; en general, los resultados de las operaciones también representan magnitudes físicas.

- Medimos el ancho de una hoja de papel usando una regla graduada en *centímetros y milímetros*. Anotamos el siguiente resultado:

$$A = 21{,}78\,[\text{cm}]$$

donde hemos **estimado** las *décimas de milímetros*; por lo cual, en el número anotado la cuarta cifra es **dudosa**.

Si para esta situación se hubiese anotado:

$$A = 21{,}786\,[\text{cm}]$$

diríamos que la última cifra (la quinta) **carece de significado**, no está representando información que pueda ser proporcionada por el instrumento de medición usado.

- Al medir el largo de una barra metálica usando un instrumento con divisiones al *centésimo de milímetro* , podemos anotar el resultado:

$$L = 1{,}4837\,[\text{cm}]$$

donde la quinta cifra, correspondiente a las *milésimas de milímetro*, ha sido estimada; en este caso las cinco cifras proporcionan información útil: son **cifras significativas**.

- Medimos el largo de 3 mesones, que están colocados en un laboratorio uno a continuación del otro, usando una huincha de medir con marcas en *metros y centímetros*. Para el largo total anotamos:

$$L_{\text{total}} = 10{,}85\,[\text{m}]$$

aunque podríamos haber estimado *décimas de centímetro*, por la posición del borde del último mesón entre dos marcas de la huincha, nos parece de buen sentido para este tipo de mediciones indicar el resultado *aproximado al centímetro*.

Si dijésemos que el largo de cada mesón, considerados *iguales* por los planos de fabricación, es:

$$L_{\text{mesón}} = \frac{10{,}85\,[\text{m}]}{3} \simeq 3{,}6166667\,[\text{m}]\ ,$$

estaríamos introduciendo información adicional: se requeriría un instrumento capaz de indicar los *diez milésimos de milímetros* para comprobarlo. Resulta natural pensar que, si el largo total fue aproximado al centímetro, el largo de cada mesón debe expresarse con igual aproximación:

$$L_{\text{mesón}} \simeq 3{,}62\,[\text{m}]\ ;$$

o sea, no es posible que la simple división por un entero indique un aumento en el grado de precisión de una medición.

- Un día, al hacer un paseo en automóvil, nos fijamos que al ir de un pueblito a otro empleamos "una hora diez". La distancia entre los pueblitos, según los indicadores en la carretera, es de 68[km]. La "rapidez media" para este trayecto fue:

$$v = \frac{68\,[\text{km}]}{\left(1+\frac{10}{60}\right)[\text{h}]} \hat{\simeq} \frac{68}{1{,}17}\left[\text{km/h}\right] \simeq 58\left[\text{km/h}\right]\ ;$$

el resultado lo hemos indicado con *2 cifras significativas*, dado que la medición de la distancia está expresada con *2 cifras significativas*.

Convenio

- Convendremos en expresar los resultados de una medición mediante un número cuyas cifras reflejen el cuidado o precisión con que se efectuó esa medición.

  Si informamos que la distancia entre dos puntos es 14[cm], sólo indicamos que tal distancia es más que 13[cm] y menos que 15[cm]. Una medición así expresada puede ser satisfactoria para ciertos propósitos, pero no para otros. Una medición más cuidadosa podríamos expresarla por 14,2[cm] indicando que la distancia podría ser cualquiera entre 14,1[cm] y 14,3[cm]; reflejando también cierta incertidumbre, aunque menor que en el caso previo.

- La forma de realizar una medición nos determinará el número de dígitos que emplearemos para expresar el resultado de ella. Convendremos que sea el **último dígito** el que exprese la incertidumbre en la medición.

  Si expresamos una distancia por 14,28[cm], la incertidumbre está en el cuarto dígito; podemos afirmar que el último dígito es **incierto**.

En Física se toma especial cuidado en expresar las cantidades por números cuyas cifras tengan real significado; esto es, que transmitan información útil. A estas cifras las designamos con el nombre de **cifras significativas**.

Escritura de valores de cantidades físicas

Consideraremos que toda la información cuantitativa con datos numéricos proporcionada en Física estará siempre expresada con el número adecuado de cifras significativas. Usted deberá tomar esto en cuenta cuando entregue resultados de mediciones o cálculos, tanto al hacer trabajos experimentales como al resolver problemas.

- Decir que el largo de un palo es 1,2[m] no es lo mismo que decir 1,20[m].

Los números 1,2 y 1,20 tienen el mismo valor aritmético, pero **no** tienen igual significado en relación a mediciones; el primero tiene 2 cifras significativas y el segundo tiene 3.

- Le presentamos una tabla de valores de cantidades físicas, indicando el significado convenido en relación a mediciones, el número de cifras significativas y la correspondiente notación científica. El símbolo C designa a la cantidad física y [· · ·] representa a una correspondiente unidad de medición, omitida. Con el fin de simplificar la escritura en la columna “significado en mediciones” hemos reemplazado la expresión $a < C < b$, que se lee *“C tiene un valor entre* a y b*”* por $a \to b$.

Introducimos la abreviatura C.S. para cifras significativas. Como al determinar el número de cifras significativas no influye el signo, positivo o negativo, del valor de una cantidad física, no le hemos considerado; o sea, hemos anotado su valor absoluto.

Le recomendamos que lea cuidadosamente esta tabla de valores comparando continuamente unos con otros de modo que adquiera la fluidez necesaria para escribir e interpretar valores de cantidades físicas de acuerdo al convenio que hemos adoptado.

Cantidad C **[· · ·]**	**Significado en mediciones**	**C.S.**	**Notación Científica**
8	$7 \rightarrow 9$	1	8
60	$59 \rightarrow 61$	2	$6{,}0 \cdot 10$
5000	$4999 \rightarrow 5001$	4	$5{,}000 \cdot 10^3$
10,08	$10{,}07 \rightarrow 10{,}09$	4	$1{,}008 \cdot 10$
7,0	$6{,}9 \rightarrow 7{,}1$	2	7,0
9,50	$9{,}49 \rightarrow 9{,}51$	3	9,50
0,02	$0{,}01 \rightarrow 0{,}03$	1	$2 \cdot 10^{-2}$
0,09	$0{,}08 \rightarrow 0{,}10$	1	$9 \cdot 10^{-2}$
0,090	$0{,}089 \rightarrow 0{,}091$	2	$9{,}0 \cdot 10^{-2}$
0,00400	$0{,}00399 \rightarrow 0{,}00401$	3	$4{,}00 \cdot 10^{-3}$
$0{,}30 \cdot 10^{-7}$	$0{,}29 \cdot 10^{-7} \rightarrow 0{,}31 \cdot 10^{-7}$	2	$3{,}0 \cdot 10^{-8}$
$0{,}05 \cdot 10^{-3}$	$0{,}04 \cdot 10^{-3} \rightarrow 0{,}06 \cdot 10^{-3}$	1	$5 \cdot 10^{-5}$
$18 \cdot 10^6$	$17 \cdot 10^6 \rightarrow 19 \cdot 10^6$	2	$1{,}8 \cdot 10^7$

- Vale la pena insistir que números con igual valor aritmético pueden diferir en el número de cifras significativas:

Los números: 47,0 y $4{,}70 \cdot 10^1$ y $0{,}470 \cdot 10^2$ tienen 3 cifras significativas y los números: 47 y $4{,}7 \cdot 10^1$ y $0{,}47 \cdot 10^2$ tienen dos cifras significativas; todos ellos tienen igual valor aritmético.

El número $2{,}043 \cdot 10^6$ tiene 4 cifras significativas. Escribirlo 2043000 no cambia su orden de magnitud, pero afirmaría que tiene 7 cifras significativas. Ambos no pueden haber sido obtenidos en la misma medición.

Un número “pequeño” como 0,0000739 que tiene 3 cifras significativas puede escribirse $7{,}39 \cdot 10^{-5}$. No tiene igual cantidad de cifras significativas que $7{,}390 \cdot 10^{-5} = 0{,}00007390$

Basados en los ejemplos anteriores podemos enunciar los siguientes **criterios**:

No se permite colocar **ceros** al final de números relacionados con mediciones, aunque se conserve el orden de magnitud de ellos, a menos que estos ceros estén avalados por mediciones o por definiciones.

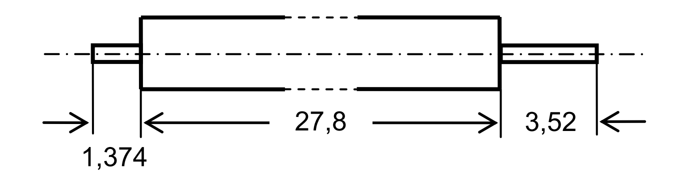
En los números decimales cuyo valor absoluto es menor que la unidad, los ceros de la izquierda no son cifras significativas.

El uso de notación científica permite escribir un número como el producto de 2 factores: uno contiene las cifras significativas y el otro, la potencia de 10 correspondiente.

Operaciones considerando cifras significativas

Al efectuar operaciones matemáticas con números originados en mediciones, debemos tener cuidado de no modificar la información contenida en ellos; por tanto al entregar el resultado debemos reconocer las cifras significativas. Estudiemos algunos ejemplos con las más simples operaciones aritméticas para establecer ciertos criterios que nos permitan efectuar tal reconocimiento:

- Se han medido los largos de las secciones de un eje. Los resultados de las mediciones, efectuadas con instrumentos apropiados y expresadas en centímetros, se indican en la figura. Nos interesa conocer el largo total del eje.



Tomando en cuenta la incertidumbre en las respectivas mediciones, representada por la última cifra significativa en cada una de ellas, podemos considerar las siguientes posibilidades para la **suma** de los largos:

directamente	con máximos	con mínimos	aproximado
1,374	1,375	1,373	1,4
27,8	27,9	27,7	27,8
3,52	3,53	3,51	3,5
32,694	32,805	32,583	32,7

Nos fijamos que ya el "**primer** dígito a la derecha de la coma decimal" es diferente en cada suma; por lo tanto, aceptamos como resultado para el largo total del eje el valor aproximado a una cifra decimal: 32,7[cm].

- Veamos otras sumas de valores, por supuesto expresados en las mismas unidades, considerando sus cifras significativas :

Debemos sumar: 585,3; 92; 140,28 y 722,4

directamente	con máximos	con mínimos	aproximado
585,3	585,4	585,2	585,
92	93	91	92
140,28	140,29	140,27	140,
722,4	722,5	722,3	722,
1539,98	1541,19	1538,77	1539
↑	↑	↑	↑

en este caso, aunque la cifra de las decenas aparece dudosa, damos el resultado con 4 C.S.: $1{,}540 \cdot 10^3$.

Al sumar los valores 421,2; 83; 644,35 y 126,9 [· · ·] , obtenemos las siguientes sumas:

Directamente	:	1275,45
con máximos	:	1276,66
con mínimos	:	1274,24
aproximado	:	1275

en este caso la "cifra de las unidades" es la dudosa y el resultado es 1275 [···] = $1{,}275 \cdot 10^3$ [···] con 4 C.S.

No podemos establecer una regla general para el número de cifras significativas que se obtienen al realizar una **suma**. Debe examinarse cada caso particular, como lo hemos hecho en los ejemplos presentados. Sin embargo, podemos afirmar que:

No hay **más** dígitos significativos a la derecha de la coma decimal que los que hay en el sumando que tenga la menor cantidad de tales dígitos.

Esto es, al considerar todos los sumandos, el dígito incierto que esté más cerca de la coma decimal es el dominante. Por lo cual le *recomendamos* que, antes de efectuar la suma, aproxime los sumandos al decimal determinado por el dígito dominante. Al resultado así obtenido lo consideraremos generalmente aceptable.

Estas observaciones resultan también válidas para la resta.

- Los resultados de medición de dos cantidades físicas son: 9,146 [· · ·] y 1,34 [· · ·] (para este ejemplo no nos interesan las unidades) . Se necesita calcular el **producto** de estos números. Tomando en cuenta la incertidumbre de la última cifra significativa, examinemos las siguientes posibilidades de la multiplicación:

Directamente	:	9,146 · 1,34	=	12,25564	≃	12,3
con máximos	:	9,147 · 1,35	=	12,34845	≃	12,3
con mínimos	:	9,145 · 1,33	=	12,16285	≃	12,2
aproximado	:	9,15 · 1,34	=	12,261	≃	12,3

Fijémonos que ya "la primera cifra decimal" varía, por lo que hemos indicado aproximaciones a una cifra decimal, obteniendo el producto 12,3 [· · ·] , un número de 3 C.S.

- Veamos otros ejemplos de multiplicación considerando las cifras significativas:

Multipliquemos los valores 9,146 [· · ·] y 0,0853 [· · ·]

directamente	:	9,146 · 0,0853	=	0,7801538	≃	0,780
con máximos	:	9,147 · 0,0854	=	0,7811538	≃	0,781
con mínimos	:	9,145 · 0,0852	=	0,779154	≃	0,779
aproximado	:	9,15 · 0,0853	=	0,780495	≃	0,780

El resultado aproximado a 3 cifras es 0,780 [· · ·] , número de 3 C.S. (interpretando que da información entre 0,779 y 0,781).

Multipliquemos $8{,}698 \cdot 10^{-2}$ [· · ·] y $7{,}2 \cdot 10^{7}$ [· · ·]

Anotando sólo los factores de las potencias de 10 de cada número tenemos:

directamente	:	$8{,}698 \cdot 7{,}2$	=	62,6256	$\simeq$	$6{,}3 \cdot 10$
con máximos	:	$8{,}699 \cdot 7{,}3$	=	63,5027	$\simeq$	$6{,}4 \cdot 10$
con mínimos	:	$8{,}697 \cdot 7{,}1$	=	61,7487	$\simeq$	$6{,}2 \cdot 10$
aproximado	:	$8{,}7 \cdot 7{,}2$	=	62,64	$\simeq$	$6{,}3 \cdot 10$

y, por lo tanto, el producto "aceptable" es $6{,}3 \cdot 10^{6}$ [· · ·], que tiene 2 C.S.

- Procediendo en forma análoga con los valores: $1{,}2 \cdot 10^{7}$[· · ·] y $2{,}5748 \cdot 10^{-2}$ [· · ·] obtenemos, al usar los factores de las potencias de 10, respectivamente los productos aproximados a 2 cifras: 3,1 ; 3,3 ; 2,8 y 3,1; por lo cual damos como resultado $3, \cdot 10^{5}$, un número con 1 C.S.

De acuerdo a lo ilustrado por estos ejemplos podemos enunciar que:
el número de C.S. del producto no excede al número de C.S. del factor que tenga el menor número de ellas.

En consecuencia, le *recomendamos* que antes de multiplicar aproxime el factor que tenga más cifras al número de cifras que tenga el otro factor.

Generalmente el número de cifras significativas del producto será igual al menor número de cifras significativas que tengan los factores; en el caso que se deba reconocer estrictamente la cantidad de cifras significativas, se procede como lo hecho en los ejemplos anteriores.

Le recomendamos, además, que escriba los números en notación científica y trabaje con los factores de las potencias de 10; después de multiplicarlos coloque la potencia de 10 correspondiente.

Para cuocientes se procede de manera análoga.

Aproximaciones y cifras significativas

Al medir el largo de un objeto podemos expresar el resultado como 42[cm], con 2 cifras significativas. Hemos convenido en atribuir a esta información el significado: "la longitud del objeto está comprendida entre 41[cm] y 43[cm]". Hay algunas situaciones en las cuales el concepto de cifras significativas (ya sea con el convenio adoptado o con otro) no es directamente aplicable y por tanto debe trabajarse con **buen criterio**:

- El resultado de la medición de la duración de cierto fenómeno fue 11,6[s]. Si en un caso particular nos bastara la precisión "al segundo", aproximamos este tiempo a "doce segundos", que escribimos como 12,[s] . A este número aproximado **no** le podemos aplicar el concepto de cifras significativas (que en nuestra interpretación correspondería a valores entre 11[s] y 13[s]); aunque para efectos de operaciones podemos considerarlo como un número con 2 C.S.

- Muchas de las constantes fundamentales de la Física pueden determinarse actualmente con gran precisión, su expresión numérica tiene gran número de cifras significativas.

Por ejemplo, mediciones recientes dan para la masa del protón el valor:

$$m_p \simeq (1{,}672\,621\,64 \pm 0{,}000\,000\,08) \cdot 10^{-27}[\text{kg}]$$

Que tiene 9 cifras significativas; esta expresión nos da la mejor información disponible sobre la masa del protón.

La aproximación a 4 cifras $m_p \simeq 1{,}673 \cdot 10^{-27}[\text{kg}]$ nos da menor información que en el caso anterior y la utilizamos cuando se requiere menor precisión en los cálculos. Las aproximaciones $1{,}67 \cdot 10^{-27}[\text{kg}]$, $1{,}7 \cdot 10^{-27}[\text{kg}]$ y $2{,}\cdot 10^{-27}[\text{kg}]$, las podemos usar cuando calculamos cada vez con menor precisión.

- Números irracionales como π , $\sqrt{2}$ son exactos, aunque no pueden ser expresados por un número finito de cifras.

Por ejemplo, podemos usar para $\sqrt{2}$ las aproximaciones: 1,41421; 1,414 y 1,41 cuando en los cálculos se pretende una precisión del 0,001%; 0,1% y 1% , respectivamente.

- El área de un círculo de diámetro D es $A_{\odot} = \dfrac{\pi D^2}{4}$

Para el valor medido D = 2,61[cm] , con 3 C.S., calculamos A_e con dos aproximaciones diferentes de π :

$$\pi \simeq 3{,}1416 \ldots \quad A_{\odot} \simeq 5{,}3502[\text{cm}^2] \simeq 5{,}35[\text{cm}^2]$$

$$\pi \simeq 3{,}14 \quad \ldots \quad A_{\odot} \simeq 5{,}3475[\text{cm}^2] \simeq 5{,}35[\text{cm}^2]$$

> El resultado nos indica que basta aproximar π al número de cifras significativas del diámetro. La constante numérica 4 en el denominador es un número entero exacto (no aproximado) y **no** influye el número de cifras significativas.

- Bajo ciertas consideraciones la distancia de caída libre durante un tiempo *t* está expresada por: $s = gt^2/2$.

Se ha medido g = (980,382 $\pm$ 0,005) [cm/s^2] . Para t = 4,7[s], dato con 2 C.S., y usando g $\simeq$ 9,8 · 10^2 [cm/s^2] resulta s $\simeq$ 108, [cm] $\simeq$ 11, · 10[cm].

Al **entero** 2 en el denominador no se aplica el concepto de cifras significativas.

Cifras significativas en conversión de unidades

Al convertir valores numéricos de cantidades físicas expresados en ciertas unidades a valores equivalentes en otras unidades, hay que tener cuidado de no modificar la información sobre el grado de precisión de las mediciones; esto es, hay que tener en cuenta el número apropiado de cifras significativas en el valor convertido:

- Convertir el resultado de una medición expresada por 20,3 [m] a milímetros.

Si escribiéramos $20{,}3[\mathrm{m}] \triangleq 20{,}3[\mathrm{m}] \cdot \frac{1000[\mathrm{mm}]}{1[\mathrm{m}]} \triangleq 20300[\mathrm{mm}]$, estaríamos introduciendo nuevas cifras significativas, lo que representaría una mayor precisión en la medida dada. Es evidente que una mayor precisión **no** puede lograrse por el solo hecho de expresar el resultado en diferentes unidades.

Entonces, un método correcto de calcular es:

$$20{,}3[\mathrm{m}] \triangleq 20{,}3[\mathrm{m}] \cdot \frac{10^3[\mathrm{mm}]}{1[\mathrm{m}]} \triangleq 2{,}03 \cdot 10^4[\mathrm{mm}]$$

indicando que 20,3 [m] y $2{,}03 \cdot 10^4$ [mm] representan el mismo grado de precisión.

- Convertir 11 7/16 [in] a [mm].

El valor dado indica que la medición está efectuada con precisión al "16 avo de pulgada", por lo cual :

$$11\ 7/16\ [\mathrm{in}] \triangleq 183/16\ [\mathrm{in}] \quad (3\ \mathrm{C.S.})$$
$$\triangleq 11{,}4375\ [\mathrm{in}] \simeq 11{,}4\ [\mathrm{in}] \quad (3\ \mathrm{C.S.})$$

Usando la equivalencia: $1[\mathrm{in}] \triangleq 25{,}4\ [\mathrm{mm}]$, resulta:

$$1/16\ [\mathrm{in}] \triangleq 1{,}5875\ [\mathrm{mm}] \ :\ 1\ [\mathrm{mm}]$$

y entonces:

$$11\ 7/16\ [\mathrm{in}] \triangleq \frac{183}{16}\ [\mathrm{in}] \triangleq 183 \cdot 1{,}5875\ [\mathrm{mm}]\ ;\ 291\ [\mathrm{mm}] \quad (3\ \mathrm{C.S.})$$

donde hemos aproximado "al milímetro", lo que corresponde a mediciones efectuadas "al 16 avo de pulgada".

- Convertir 9 [mile] 5 [furlong] a [km] .

Conocemos las equivalencias:

$1[\mathrm{mile}] \triangleq 8[\mathrm{furlong}]$ y $1[\mathrm{mile}] \triangleq 1609{,}3\ [\mathrm{m}] \triangleq 1{,}6093[\mathrm{km}]$.

El dato proporcionado indica mediciones con precisión al "furlong"; entonces, convirtiendo a esta unidad "más pequeña":

$$9[\mathrm{mile}]\ 5[\mathrm{furlong}] \triangleq 77[\mathrm{furlong}], \text{ con } 2\ \mathrm{C.S.}$$

Convirtiendo a la unidad "más grande":

$$9[\mathrm{mile}]\ 5[\mathrm{furlong}] \triangleq \frac{77}{8}\ [\mathrm{mile}]\ ;\ 9{,}6[\mathrm{mile}], \text{ con } 2\ \mathrm{C.S.}$$

Al convertir a “kilómetros” tenemos en cuenta que:

$$1[\text{furlong}] \;\hat{=}\; \frac{1}{8}\,[\text{mile}] \;\hat{=}\; \frac{1}{8}\,[\text{mile}] \cdot \frac{1{,}6093\,[\text{km}]}{1\,[\text{mile}]} \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; 0{,}20111625[\text{km}] \;\sim\; 10^{-1}\,[\text{km}]$$

este orden de magnitud determina una aproximación al “décimo de kilómetro” en la conversión:

$$9[\text{mile}]\;\;5[\text{furlong}] \;\hat{=}\; 77 \cdot\; 0{,}201\,[\text{km}] \;\simeq\; 15{,}5[\text{km}] \;\;,\text{ con 3 C.S.}$$

- El desarrollo de un proceso ha requerido un tiempo de 1[h] 25[min] 13,6[s] .

  Expresemos este intervalo de tiempo en la unidad “más pequeña”, el segundo:

$$1[\text{h}]\;\;25[\text{min}]\;\;13{,}6[\text{s}] \;\hat{=}\; (\,1 \cdot 3600 + 25 \cdot 60 + 13{,}6\,)[\text{s}] = 5113{,}6[\text{s}]$$

un resultado con 5 C.S. , ya que la cifra “dudosa” en la medición está en las “décimas de segundo”.

Expresemos este tiempo en [h]:

$$1[\text{h}]\;\;25[\text{min}]\;\;13{,}6[\text{s}] \;\hat{=}\; \frac{5113{,}6}{3600}\,[\text{h}] \;\simeq\; 1{,}42044[\text{h}]\;\;\text{con 6 C.S.}$$

ya que al “décimo de segundo” corresponde el “cienmilésimo de hora” $\left(\frac{0{,}1}{3600} \sim 10^{-5}\right)$.

- Convertir la medida (5,824 ± 0,015)[ft] a metros.

Usamos la equivalencia 1[ft] $\hat{=}$ 0,3048[m] , exactamente. Entonces:

valor mayor	:	5,839[ft]	$\hat{=}$	1,7797[m]
valor nominal	:	5,824[ft]	$\hat{=}$	1,7752[m]
valor menor	:	5,809[ft]	$\hat{=}$	1,7706[m]
rango de incertidumbre	:	0,030[ft]	$\hat{=}$	0,0091[m]

y por lo tanto escribimos:

$$(5{,}824 \;\pm\; 0{,}015)\,[\text{ft}] \;\hat{=}\; (1{,}7752 \;\pm\; 0{,}0046)\,[\text{m}]$$

Hemos aproximado a los “diez milésimos de metro”, que corresponde a los “milésimos de pies” en los datos.

Estos ejemplos le muestran a usted esquemas de trabajo que le conviene seguir al convertir unidades.

Ejercicios

2-14) Indique el número de cifras significativas que tiene cada una de las siguientes expresiones numéricas:

$9{,}504 \cdot 10^{-3}$	3,1415	$1{,}4095 \cdot 10^{-11}$	$5{,}09830 \cdot 10^{24}$
3,472	2000	14,00	0,006
$1{,}3 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{8}$	$2{,}00 \cdot 10^{7}$	$0{,}013 \cdot 10^{-5}$
0,2	14	0,210	

2-15) De los valores: 31.000 [α]; $31{,}0 \cdot 10$ [α]; 0,31 [α]; $0{,}0310 \cdot 10^{6}$ [α] y $0{,}31 \cdot 10^{5}$ [α], indique el que da la misma información que $3{,}1 \cdot 10^{4}$ [α].

2-16) Sume las cantidades físicas 454,2 [···]; 82[···]; 640,35 [···] y 123,9 [···]. Valiéndose de las posibilidades extremas determine el número de cifras significativas de la suma. Sume igualmente: 1,3745 [···]; 37,89 [···] y 73,587 [···].

2-17) Calcule la diferencia entre 157,3 [···] y 47 [···] con el correcto número de cifras significativas. Para esto determine la máxima diferencia y la mínima diferencia.

2-18) Al efectuar la substracción de los valores 11,85 [···] y 9,6 [···] ¿le parece más razonable efectuar aproximaciones a 2 cifras en los datos o en el resultado?

2-19) Realice el producto de $7{,}896 \cdot 10^{5}$ y $6 \cdot 10^{-8}$.

2-20) Realice el producto de 9,0003 por 1,22 y determine "estrictamente" el número de cifras significativas del resultado.

2-21) Las medidas de una caja de forma de paralelepípedo recto, obtenidas con una regla corriente, son: 47,3[cm] de alto, 27,8[cm] de ancho y 17,9[cm] de largo. Calcule el volumen de la caja.

2-22) Los valores 0,1129 [···] y 0,1134 [···] se han obtenido en una misma experiencia. Deben sumarse y esa suma debe multiplicarse por 2,63 [···]. El producto debe restarse del valor 0,93742 [···]. Las unidades, no mencionadas, son las que corresponden. Exprese el resultado con el número correcto de cifras significativas.

2-23) Divida $5{,}6 \cdot 10^{8}$ por $1{,}08 \cdot 10^{-15}$.

2-24) Para medir una resistencia eléctrica se hizo pasar por ella una corriente, la que se midió con un amperímetro, anotándose I = 3,01[A] . Se midió también el voltaje entre los terminales de la resistencia usando un voltímetro, su lectura se anotó $V = 1{,}1 \cdot 10^{2}\left[V \right]$. Calcule el valor de la resistencia R = V/I.

2-25) Reduzca: (a) 5,48 [h] a segundos con las cifras significativas necesarias; (b) 6,428 [s] a horas y minutos manteniendo la precisión de la medida.

2-26) El ancho de un edificio es 27[m] . Exprese el ancho en [cm] manteniendo las cifras significativas. Exprese el ancho en [yd] y luego en [ft].

2-27) Convertir 5,60[in] a [mm].

2-28) Convertir la medida (1,250 $\pm$ 0,015) [in], a milímetros.

2-29) Convertir 12[yd] 2[ft] 5[in], a [m].

2-30) Complete la "tabla de equivalencias" adjunta con valores aproximados al "centésimo de milímetro".

[in]	[mm]
1/64	?
1/16	?
1/2	?

2-31) Suponga que usted le dice a una persona: *"Juntémonos a las 8 horas 45 minutos 3 segundos y 8 décimas."* ¿Encuentra que esa fue una invitación formulada con buen sentido físico? ¿Qué precisión necesita Ud. para medir el tiempo en la vida diaria? ¿Qué precisión necesita para medir la duración de una carrera de 100[m] planos?

2-32) Exprese 4[h] 37[min] 16[s] todo en segundos y, además, todo en horas.

2-33) Examine la posibilidad de expresar 10,38[h] en horas, minutos y segundos.

2-34) El conductor de un tren controla con un cronómetro las duraciones de un viaje entre estaciones sucesivas (A, B, C, D, E). En su libreta de anotaciones se lee:

de A a B : 1[h] 17[min]

de B a C : 4[h] 37[s]

de C a D : 46[min]

de D a E : 51[min] 12[s]

Transforme todos los tiempos a horas. ¿Cuánto ha tardado en ir de A a E ? ¿Cuántas veces mayor es el tiempo empleado en ir de A a C que el empleado en ir de C a E ? ¿Qué porcentaje del tiempo total de viaje es el empleado entre las estaciones B y D ?

Medición de ángulos

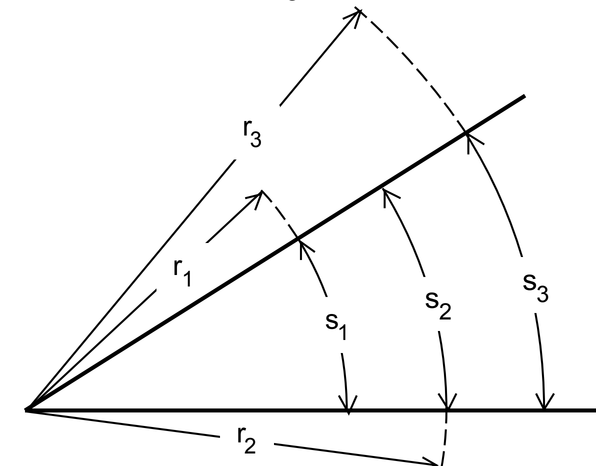
Sobre una hoja de papel trace dos rectas que se corten, se forman 4 ángulos.

Considere uno de esos ángulos.

Use un compás y trace varios arcos de circunferencia con centro en el vértice del ángulo (punto de corte de las rectas).

Mida las longitudes de los arcos, (ingénieselas para hacerlo). Mida los radios de cada arco.

Use las mismas unidades de longitud para expresar los arcos y los radios.



Calcule el **cuociente** entre los valores medidos para cada arco y su correspondiente radio.

Compruebe que todos estos cuocientes tienen, dentro de los errores experimentales, el **mismo** valor:

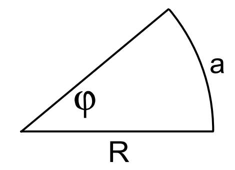
$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \cdots$$

Repita el procedimiento para otros ángulos. Compruebe que si las rectas están más *abiertas*, el cuociente entre un arco y el radio de ese arco es mayor.

Entonces, podemos comparar (medir) ángulos. El procedimiento seguido permite definir:

$$\text{valor de un ángulo} = \frac{\text{arco de circunferencia}}{\text{radio de ese arco}}$$

$$\varphi = \frac{a}{R}$$



Elegimos como unidad de ángulo:

un radián ········ 1[rad] ,

que corresponde a un ángulo tal que al trazar un arco de radio R , con centro en el vértice del ángulo, se obtiene un arco que también mide R.

Cuando el arco subtendido por el ángulo es toda la circunferencia se habla de “ángulo completo”:

$$\varphi_c = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi[\text{rad}]$$

de donde resulta la equivalencia: $2\pi[\text{rad}] \triangleq 360°$

y por tanto:

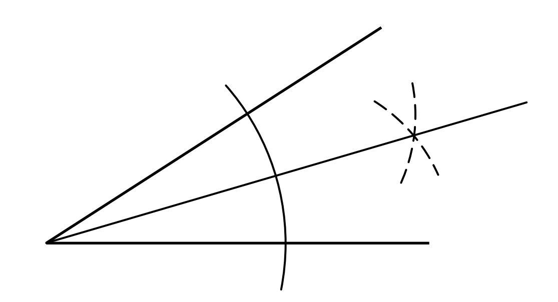
$$1[\text{rad}] \triangleq 57{,}2958° \quad \text{y} \quad 1° \triangleq 0{,}017453[\text{rad}]$$

Construcción de ángulos

Nos interesa que usted haga algunas construcciones de ángulos utilizando regla y compás; para ello le será útil recordar las siguientes construcciones:

* Bisectar un ángulo.

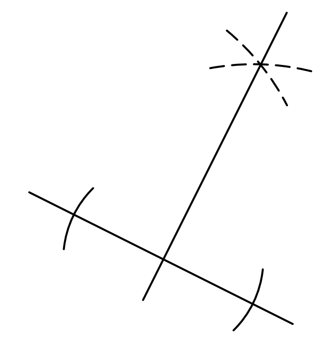
Trace un arco de circunferencia con centro en el vértice y que intercepte los dos lados del ángulo, abra un poco más el compás y trace dos arcos, que se corten, con centros en esos puntos de intersección. Dibujando la recta que pasa por el punto que acaba de producir y por el vértice del ángulo, obtiene la bisectriz.



** Construir un ángulo recto.

Cuando dos rectas forman un ángulo de $\pi/2$ [rad] (90°) se dice que son **perpendiculares** entre sí.

Para construir una perpendicular a una recta dada elija un punto de ella; allí estará el vértice del ángulo recto o pie de la perpendicular. Abra su compás unos 2[cm], haga centro en ese punto y marque dos arcos de circunferencia sobre la recta a ambos lados del punto. Abra ahora el compás 4 ó 5[cm] y haga centro sucesivamente en los dos puntos, trazando arcos que se corten. Una el punto elegido como "pie de la perpendicular" y el de intersección de estos arcos. Esa será la perpendicular que determina el ángulo recto.



Ejercicios

2-35) Estime el ángulo que abarca su mirada en sentido horizontal. No mueva la cabeza.

2-36) Construya un péndulo y hágalo oscilar libremente. Estime el ángulo que forma el hilo entre sus posiciones extremas. Comente.

2-37) Con elementos caseros construya un instrumento adecuado para determinar el ángulo formado entre la posición de la Luna y la horizontal. Haga una serie de mediciones dejando transcurrir iguales intervalos de tiempo entre cada medición, por ejemplo cada 20[min]. Represente cómo cambian los ángulos con el transcurso del tiempo.

2-38) Use sólo regla y compás para construir:

- ángulos de $\pi/4$ [rad] (45°), $\pi/8$ [rad] y $5\pi/4$ [rad] .
- un triángulo equilátero; obtiene ángulos de 60° ($\pi/3$ [rad]).
- ángulos de $\pi/6$ [rad] , $\pi/12$ [rad] y $2\pi/3$ [rad].

2-39) Trisecte un ángulo recto, use solamente regla y compás.

2-40) Suponga que la trayectoria de la Tierra en torno al Sol es una circunferencia con el Sol en su centro. Calcule aproximadamente el ángulo subtendido por la trayectoria de la Tierra entre el 25 de diciembre de 2010 y el 1 de abril de 2011.

2-41) Un neumático instalado en un automóvil tiene un diámetro de 60[cm]. Calcule la distancia recorrida por el automóvil cuando la rueda completa 2540 vueltas.

2-42) Suponga usted que va a Quilpué a ver pasar los aviones que viajan al Norte, saliendo de Pudahuel. Cuando un avión va pasando a unos $5 \cdot 10^3$ [m] sobre su cabeza, usted lo sigue con su mirada. Estime la distancia recorrida por el avión mientras su línea de visión se desplaza en 5°.

2-43) Si usted quisiera construir un *modelo* de un globo terráqueo y dispusiera de un autoadhesivo de Chile que tiene 10 [cm] de largo, ¿de qué tamaño debe hacer el modelo para que Chile le quede a escala?

Medición de superficies

Tome una ducha y jabónese, la superficie del jabón está en contacto con la superficie de su mano y de su cuerpo. Pinte un cuadro con témpera, está cubriendo una superficie. Ayude a su mamá a limpiar el patio de su casa, está barriendo una superficie.

Para medir una superficie o determinar su área, necesitamos escoger “unidades de área”. La idea que se presenta de inmediato es tomar un cuadrado de 1[m] de lado; su área es : $1[m] \cdot 1[m] \triangleq 1[m^2]$

Adoptamos como unidad básica de área:

Un metro cuadrado ········ $1[m^2]$

Obviamente, un área de $1[m^2]$ no tiene que ser siempre la de un cuadrado de 1[m] por 1[m] , es también la de un rectángulo de 0,2[m] por 5[m] , la de un triángulo de 2,5[m] de base y 0,8[m] de altura, etc.

* Un cuadradito de 1[cm] por 1[cm] tiene un área de 1[cm²].

$$1\ [cm^2] \triangleq 1[cm]\cdot 1[cm] \triangleq \frac{1}{100}\ [m]\ \cdot\ \frac{1}{100}\ [m] \triangleq$$

$$\triangleq \frac{1}{10000}\ [m^2] = \frac{1}{10^4}\ [m^2]$$

esto es:

$$1[cm^2] \triangleq 10^{-4}\,[m^2]$$

$$1[m^2] \triangleq 10000[cm^2] = 10^4\,[cm^2]$$

En forma similar usted puede hacer las conversiones entre unidades de área que desee, para ello use las equivalencias entre las unidades de longitud ya proporcionadas.

* Encontremos la equivalencia entre $[in^2]$ y $[cm^2]$.

Buscamos: $1[in^2] \triangleq\ ?\ [cm^2]$.

Usamos la equivalencia: $1[in] \triangleq 2{,}54[cm]$, exactamente. Entonces:

$$1[in^2] \triangleq 1[in]\cdot 1[in] \triangleq 2{,}54[cm]\cdot 2{,}54[cm]$$

$$\triangleq 6{,}4516[cm^2]\ \text{, exactamente.}$$

Otras unidades de área, usadas especialmente en el agro, son:

Un área …………	1[a] =	100 $[m^2]$
Una hectárea ………	1[ha] =	10.000 $[m^2]$
Un acre …………	1[A] =	4840 $[yd^2]$

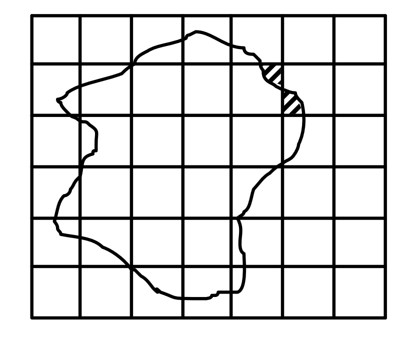
Entreténgase encontrando las equivalencias entre **acre** y otras unidades inglesas para áreas; invente usted mismo algunos ejercicios.

Áreas de figuras planas

Deseamos **medir** la superficie de una figura plana. Un método para hacerlo es copiar el contorno de la figura sobre un papel cuadriculado.

Determinamos el área de cada cuadrado del papel, midiendo su lado y multiplicándolo por sí mismo. Expresamos el área en unidades apropiadas.

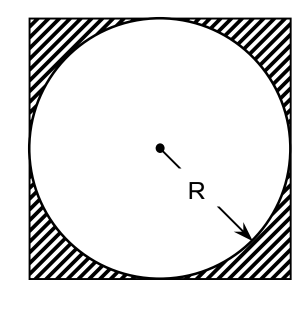
Entonces, para determinar el área de la figura es suficiente que **contemos** el número de cuadrados encerrados por el contorno de la figura.

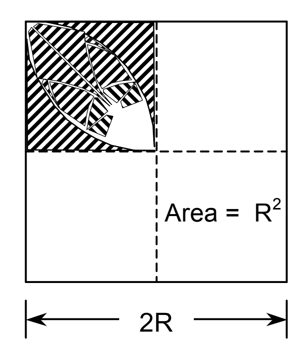


Debemos ser cuidadosos en los bordes: tenemos que ir estimando las fracciones de cuadrados que vayan “sobrando” o “faltando”.

El valor obtenido para el área será tanto mejor cuanto más pequeño sean los cuadrados del papel cuadriculado.

* **Área de un círculo.** Recorte dos cuadrados de papel. Cuide que sean iguales y designe por 2R a sus lados. En uno de los cuadrados trace la circunferencia inscrita (tiene radio R) y recorte las “esquinas”. Pegue las esquinas sobre uno de los cuadrantes del otro cuadrado; no alcanzarán a cubrirlo.





A continuación **mida** el área no cubierta.

Reconozca entonces que el área del círculo $A_{\odot}$, es un “poquito mayor” que la de 3 cuadrantes del cuadrado; $A_{\odot} > 3R^2$, y si ha medido bien tal vez, obtenga $A_{\odot} \simeq 3{,}1R^2$ que es buena aproximación al “área del círculo”:

$$A_{\odot} = \pi R^2$$

** **Área de una elipse**. *Proceda en forma análoga* para determinar el área de una elipse, trabajando en esta ocasión con rectángulos. Compruebe que, dentro de los errores de medición, se cumple que:

$$A_{elipse} = \pi ab$$

2b

2a

¿Cuál es el error porcentual del valor obtenido en **sus** mediciones, respecto al valor calculado usando la fórmula dada?

Una medición de la superficie de una esfera

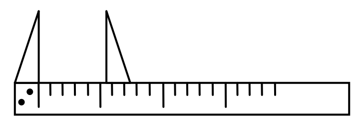
Escoja una naranja lo más esférica y de cáscara lo más delgada posible. Mida el "diámetro" de la naranja y desígnelo por 2R.

Provéase de una hoja de papel cuadriculado de unos 4R de ancho por unos 5R de largo. Trace sobre ella dos rectas paralelas a distancia 3R.

Pele la naranja y vaya colocando las cáscaras entre esas rectas paralelas tratando de cubrir, lo mejor posible, una superficie rectangular.

Mida el largo del rectángulo y calcule su área. ¿Obtiene un valor cercano a $4\pi R^2$, que es el valor del área de una esfera?

Ingéniese para construir un instrumento que le permita medir diámetros de cuerpos redondos.



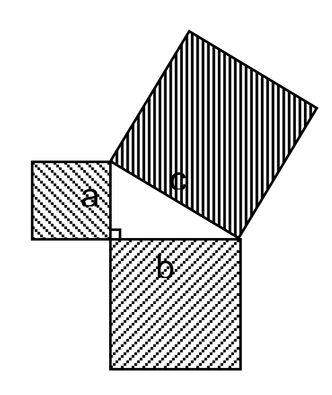
Llamaremos **cuerpos redondos** a los que tienen por lo menos una superficie curva; los más comunes son: esfera, cilindro, cono y tronco de cono.

Pitágoras. Euclides

La Geometría, como su nombre lo indica, nació de la necesidad de medir superficies terrestres. Más tarde se sistematizaron diversas geometrías mediante postulados y teoremas. Se nos ha ocurrido que usted *mida*, no que demuestre, algunos teoremas clásicos:

* Comprobación del "teorema de Pitágoras".

Dibuje un triángulo rectángulo; construya cuadrados que tengan por lados los catetos y la hipotenusa y **mida** el área de tales cuadrados. Exprese los resultados en la misma unidad.



Sume las áreas obtenidas de los catetos y compare la suma con el área obtenida de la hipotenusa.

¿Le resulta $a^2 + b^2 = c^2$?

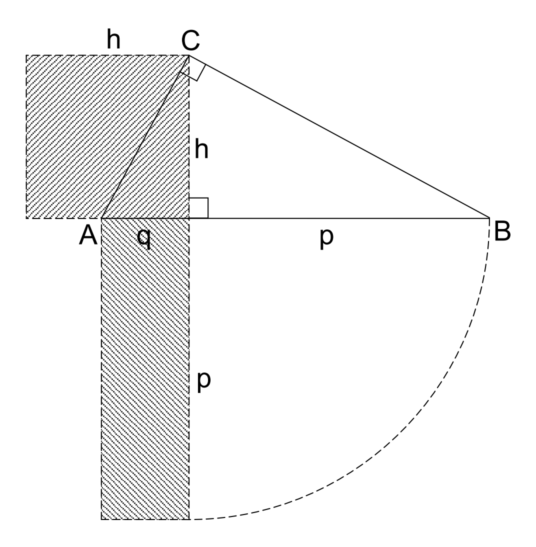
** Comprobación del "teorema de Euclides de la altura".

Dibuje un triángulo rectángulo y trace la altura desde el vértice del ángulo recto a la hipotenusa.

Construya un cuadrado con lado igual a la altura y un rectángulo con los segmentos determinados por la altura sobre la hipotenusa.

Mida las áreas de estas dos figuras, usando las mismas unidades, y compárelas.

¿Obtiene $h^2 = q \cdot p$?



Recomendación

En las siguientes fórmulas para el cálculo del área de las figuras geométricas que se indican:

$$A_r = a \cdot b \quad , \quad \text{rectángulo de lados } a \text{ y } b$$

$$A_t = \frac{b \cdot h}{2} \quad , \quad \text{triángulo de base } b \text{ y altura } h$$

$$A_e = \pi \cdot a \cdot b \quad , \quad \text{elipse de semiejes } a \text{ y } b$$

los símbolos a, b y h, con los significados ya dados para cada caso, corresponden a la cantidad física longitud. Parece natural y resulta conveniente que, al calcular áreas con las fórmulas, se usen estos símbolos con la **misma** unidad de medición.

Ejercicios

2-44) Estime el área de la superficie de: una moneda de $10, su pantalón, su dormitorio, Chile, Sud América. Describa el método usado para cada caso.

2-45) Estime el tamaño de un punto dejado por un lápiz sobre un papel. Calcule su área y el número de puntos contenidos en la superficie de una esfera que tenga el radio de la Tierra.

2-46) Mida el área de un grano de uva y de un huevo.

2-47) En una vitrina ve el aviso: *Televisores de 42"*. Infórmese de lo que ello significa y calcule aproximadamente el área de la pantalla del televisor. Exprese el resultado en [cm^2].

2-48) Se ofrece para la venta un fundo de 7500[ha]. Exprese el área de la superficie del fundo en [$mile^2$].

2-49) Las mediciones de una parcela dan por resultado 105[m] de ancho y 216[m] de largo. Un hombre estima "a ojo" que las medidas son 100[m] y 200[m] respectivamente. Calcule los porcentajes de error en la estimación del largo y del ancho. Calcule el porcentaje de error en el área de acuerdo a esas estimaciones.

2-50) En un pueblo de EE.UU. un denuncio de una mina puede ser presentado para el usufructo de 1200[ft^2] como máximo. Calcule el número de denuncios que deben presentarse para obtener un área de 7[km^2].

2-51) El área de cierto triángulo equilátero vale 4,0[ft^2]. Si su lado aumenta en 18% ¿en qué tanto por ciento varía el área del triángulo?

2-52) Cada arista L de un cubo aumenta en 10,0%. Calcule la nueva superficie total del cubo.

2-53) Calcule el porcentaje en que aumenta el área total de un paralelepípedo recto rectangular cuando cada una de sus aristas se duplica.

2-54) El área de la superficie de una esfera de radio R es 20[in^2]. Calcule el área de la superficie de una esfera de radio 3R.

2-55) Determine la razón entre las áreas de la superficie de una esfera de diámetro D y la superficie de las caras de un cubo de arista D.

2-56) Se desea pintar totalmente el exterior de un cilindro de 57,2[ft] de radio basal y 15,4[yd] de altura. Para este trabajo considere que un tarro de pintura rinde 70[m^2]. Determine el número necesario de tarros de pintura que deben comprarse.

2-57) En un triángulo rectángulo un cateto mide 20[cm] y su área 60[cm^2]. Calcule la altura que corresponde a la hipotenusa.

2-58) Si en un triángulo se duplica la hipotenusa y se mantiene uno de los catetos ¿por qué factor resulta multiplicado el otro cateto?

2-59) Construya un cono recto de base circular usando papel cuadriculado y cinta adhesiva. Mida directamente el área lateral de este cono "contando cuadritos". Exprese el resultado en [cm^2]. Estime el error de esta medición. A continuación mida el perímetro de la base y la generatriz del cono y calcule, usando la fórmula, el área lateral del cono expresándola en [cm^2]. Estime el error de esta medición. Compare los valores obtenidos y sus errores experimentales.

2-60) Compruebe por mediciones el "teorema de Euclides del cateto": En un triángulo rectángulo un cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

Medición de volúmenes

Todos los objetos de la naturaleza ocupan espacio, tienen **volumen**. Cuando los objetos tienen una cavidad, nos referimos al volumen de la cavidad con el término **capacidad**.

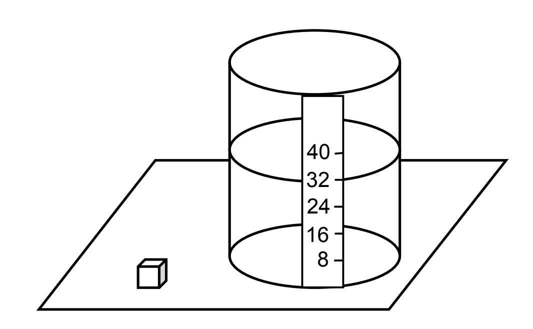
El volumen de un cuerpo de geometría simple se puede determinar directamente por cálculo. Si la forma de un cuerpo no es simple, su volumen puede ser estimado adaptando a su forma uno o más cuerpos de volumen calculable. En algunos casos podremos recurrir a otros métodos de **medición** de volumen.

Un posible método para medir el volumen de un cuerpo sólido consiste en sumergirlo en un frasco con agua y observar el cambio que se ha producido en el nivel del agua.

Elija un frasco de vidrio o de plástico transparente y coloque sobre él una cinta de papel.

Construya un cubo (use cartulina u otro material no absorbente) que tenga, por ejemplo 2[cm] de arista.

Llene el cubo con agua, viértala en el frasco (previamente vaciado) y marque 8[cm^3] en la cinta.



Efectúe esta operación varias veces; obtiene así un "frasco graduado", en el cual un cierto volumen de agua se lee directamente en la cinta, según sea el nivel que alcance el agua.

* Ejercítese determinando el volumen de una piedra; elíjala de tamaño apropiado al frasco que ha graduado.

¿Qué determinaría usted al hacer el experimento con una piedra pómez, con una esponja y con una tableta de antiácido efervescente?

* Mida el volumen de una esfera.

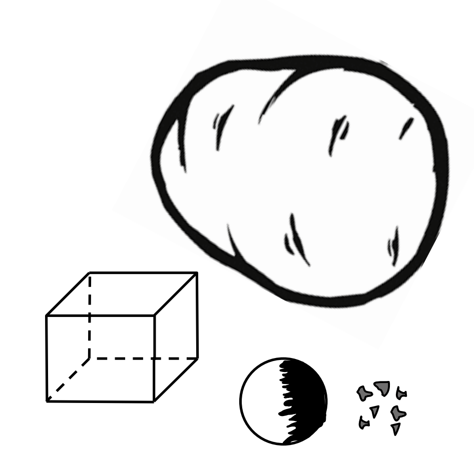
Escoja una papa de tamaño regular, provéase de un cuchillo y fabrique un cubo de ella. Cuide que las aristas sean iguales y llámelas 2R.

Mida el volumen del cubo y compárelo con:

$$V_{cubo} = (2R)^3 = 8R^3$$

Fabrique la esfera inscrita en el cubo (tiene radio R) y guarde todos los pedacitos de papa que va sacando del cubo para ir formando la esfera.

Mida el volumen de la esfera y el de todos los pedacitos.



Compare los volúmenes entre sí y también con el volumen del cubo; encontrará:

$$V_{esfera} \simeq \frac{1}{2} \quad V_{cubo}$$

Haga ahora algunas acomodaciones:

$$V_{esfera} \simeq \frac{1}{2} \quad V_{cubo} = \frac{1}{2} \cdot 8R^3 = 4R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3R^3$$

Ha obtenido un volumen aproximado y como está trabajando con una esfera, debe esperar que aparezca π; si el factor 3 está aproximando a π, resulta:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Usted puede repetir este experimento con un cubo de hielo.

- Otro método que le permitirá comprobar que:

$$V_{esfera} = \frac{4\pi}{3} R^3$$

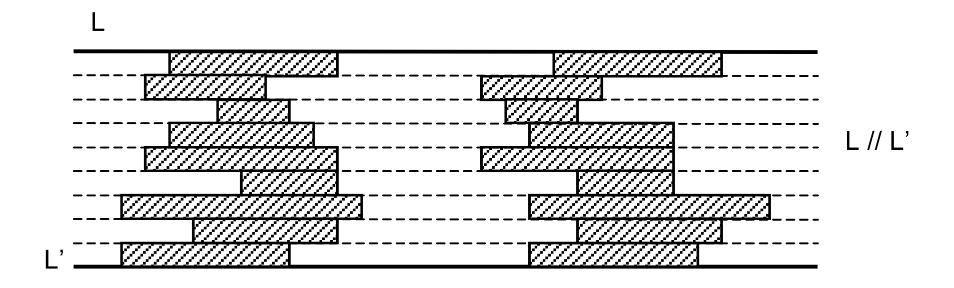
es el siguiente:

Use una pelota de plástico delgado y mida su diámetro. Perfórela en un punto. Llénela con agua y mida el volumen mediante el frasco graduado.

Principio o Postulado de Cavalieri

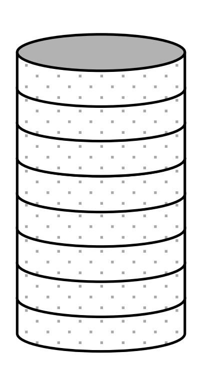
* Para un plano

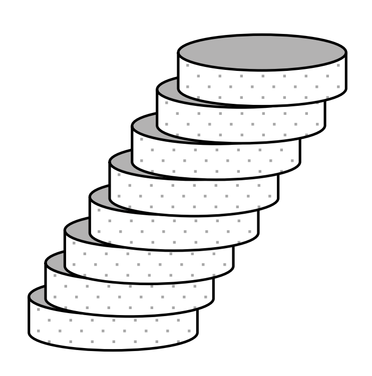
Si entre dos rectas paralelas, se disponen dos series de rectángulos de misma altura, de modo que los rectángulos puestos al frente tienen mismas bases, entonces, las dos figuras resultantes tienen la misma área.



** Para volúmenes

Si entre dos planos paralelos se colocan uno encima de otro dos series de prismas o cilindros, de modo que los sólidos de las dos series situados a la misma distancia de uno de los planos, tengan misma altura y bases equivalentes, las sumas de los sólidos de cada serie forman cuerpos de volúmenes equivalentes.

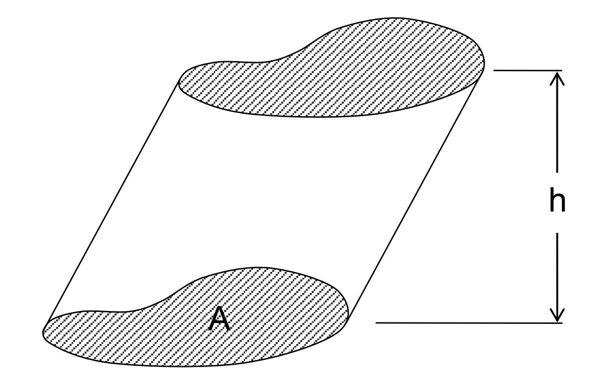




Volúmenes de algunos cuerpos

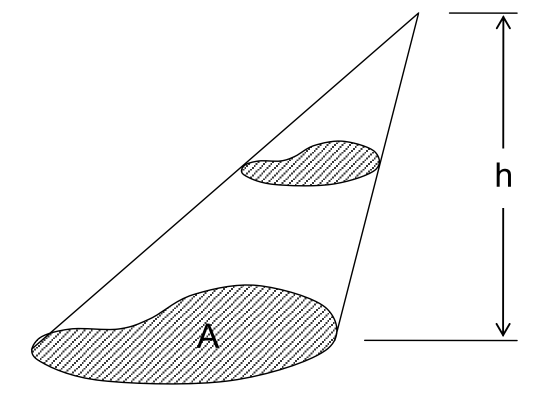
- Prismas y cilindros

área de la base	:	A
altura	:	h
volumen	:	$A \cdot h$



- Pirámides y conos

área de la base	:	A
altura	:	h
volumen	:	$\frac{A \cdot h}{3}$



De estas fórmulas generales usted puede obtener, como casos particulares, el volumen de un cubo, un paralelepípedo de base rectangular, de una pirámide de base triangular, de un cono de base circular, etc.

¡Verifique experimentalmente estas fórmulas: construya algunos cuerpos huecos de las formas indicadas y mida su volumen usando agua!

Unidades de volumen

La unidad básica es:

Un metro cúbico · · · · · · $1[m^3]$

Un submúltiplo de él es:

un centímetro cúbico (1 c.c.) · · · $1[cm^3] \triangleq 10^{-6}[m^3]$

Una unidad de volumen muy usada es:

un litro · · · · · $1[\ell] \triangleq 1[dm^3] \triangleq 10^{-3}[m^3]$

- Compruebe en forma directa esta equivalencia : construya una caja de papel de 5[cm] x 10[cm] x 20[cm] , llene una botella "litrera" con agua, vierta su contenido en la caja y compare.

En el sistema inglés de mediciones se usan las siguientes unidades para volúmenes de fluidos: un galón (gallon), un quarto (quart), una pinta (pint), una onza para fluidos (fluid ounce), un barril (barrel), etc.

Hay que distinguir entre galones usados en Inglaterra y en USA:

Un "imperial gallon" · · · · · · $1[Imp.gal] \triangleq 277{,}42[in^3]$

Un USA gallon · · · · · · $1[gal] \triangleq 231[in^3]$

Mencionemos algunas equivalencias que rigen entre tales unidades:

$1[gal] \triangleq 4[quart]$ $\qquad$ $1[quart] \triangleq 2[pint]$

$1[pint] \triangleq 16[fluid\ ounce]$ $\qquad$ $1[barrel] \triangleq 36[Imp.gal]$

- Determinemos la equivalencia entre el *imperial gallon* y el litro.

Buscamos $1[Imp.gal] \triangleq\ ?\ [\ell]$

Usando la equivalencia: $1[in] \triangleq 2{,}54[cm]$, resulta:

$$
\begin{aligned}
1[Imp.gal] &\triangleq 277{,}42[in^3] \triangleq \\
&\triangleq 277{,}42[in^3] \cdot \left(\frac{2{,}54[cm]}{1[in]}\right)^3 \cdot \frac{1[\ell]}{1000[cm^3]} \triangleq \\
&\triangleq \frac{277{,}42 \cdot (2{,}54)^3}{1000}[\ell] \simeq 4{,}5461[\ell]
\end{aligned}
$$

esto es: $1[Imp.gal] \triangleq 4{,}5461[\ell]$ con 5 C.S.

Determine usted la equivalente entre 1[gal] y $1[\ell]$.

Ejercicios

2-61) Estime el volumen de un lápiz, de una uña, de una taza y el de la cavidad de un zapato. Describa el método usado en cada caso.

2-62) Estime el volumen de aire en el interior de su casa.

2-63) Estime el volumen del agua de todos los océanos.

2-64) Un átomo de hierro tiene un diámetro de $2\left[\mathring{A}\right]$, aproximadamente. Considere que el átomo sea aproximadamente esférico y estime el orden de magnitud del número de átomos de hierro que habría en un cubo de 1[mm] de arista.

2-65) En una bolsa de género se echan 25 bolitas idénticas. El volumen de cada bolita es 1,76[cm^3]. Estime el volumen que ocupan todas las bolitas en la bolsa.

2-66) Suponga usted que un iceberg se traslada desde la Antártica hasta Antofagasta y que durante el trayecto se funde (se derrite) el 30% del volumen total del iceberg. Calcule el volumen total que tenía el iceberg en la Antártica si su volumen visible (un 10% del volumen total) es de $1{,}5 \cdot 10^3$[m^3] en Antofagasta.

2-67) En un periódico aparece el siguiente aviso económico: *"Vendo refrigerador de 7 pies ...."*. Averigüe lo que se pretende informar al colocar en el aviso "7 pies". Haga mediciones en un refrigerador y estime el volumen interior de éste. (Si no tiene acceso a un refrigerador de "7 pies", hágalo con cualquier otro).

2-68) Cierto automóvil norteamericano rinde 15[mile] por cada "gallon" de bencina. Calcule el número de litros que necesitaría este automóvil para un viaje de 240[km].

2-69) Un recipiente, cuya capacidad es 8,0[ℓ] tiene forma de un paralelepípedo recto de base cuadrada, de lado L, y de altura 2L . Calcule L , en [cm].

2-70) Un agricultor encarga a un hojalatero que construya un depósito cúbico para almacenar agua. Para ello le entrega una lámina de fierro galvanizado de 4,0[m] de largo por 0,80[m] de ancho para que la corte en 5 pedazos cuadrados y arme el depósito, soldando los pedazos. Para facilitar su trabajo, el hojalatero corta la lámina en 20 pedazos cuadrados iguales y con ellos arma 4 depósitos en vez de uno. Calcule el volumen total de agua que pueden contener los 4 depósitos fabricados. Calcule el volumen total que podría contener el depósito encargado por el agricultor. Compare.

2-71) Para pintar una pared de 5,0[m] de largo por 4,0[m] de ancho se usan 2,00[gal] de pintura. Calcule el espesor de la capa de pintura.

2-72) Suponga que los océanos cubren 4/5 la superficie del globo terrestre y que la capa de hielo en Islandia tiene un volumen aproximadamente equivalente a $2 \cdot 10^6$[km^3] de agua. ¿Cuánto se elevaría el nivel de los océanos si esa capa de hielo se fundiera? Exprese el resultado en centímetros.

2-73) Un mecánico mide una placa de fierro y registra los siguientes valores: 10,3[cm] de largo; 1,50[dm] de ancho y 0,75[cm] de espesor. Calcule el volumen de la placa en [cm^3]. Suponga que las medidas del ancho y del espesor son "exactas" y que en la medida del largo hay un error de 0,1[cm]. ¿Qué tanto por ciento del volumen total es la variación máxima del volumen debido a tal error?

2-74) Calcule la superficie de una esfera que tiene un volumen de $1{,}08 \cdot 10^{-3}$[m^3].

2**-75)** En un cubo de arista L se disponen esferas macizas e iguales centradas en los vértices y centros de las caras. El diámetro de las esferas es tal, que la esfera de una cara queda en contacto con las cuatro de los vértices correspondientes. Determine el volumen total de las partes de las esferas que quedan dentro del cubo.

2-76) Una silla de madera se sumerge en un tambor cilíndrico de 7,0[dm] de diámetro, con agua hasta cierto nivel. Al sumergir la silla se observa que el nivel del agua sube en $2\frac{3}{8}\left[\text{in}\right]$. Calcule el volumen de la madera, expresándolo en [cm^3].

2-77) Calcule el volumen de un cono recto de radio basal R = 15,2[cm] y altura h = 22,5[cm]. Si este cono se corta por un plano paralelo a la base a una altura de 12,0[cm], ¿cuál es el volumen del "tronco de cono" obtenido?

2-78) Use un vaso que tenga aproximadamente la forma de un tronco de cono. Mida el diámetro de la base; vierta en él, sucesivamente, un determinado volumen de agua y mida el nivel de agua alcanzado en cada ocasión y el diámetro de la superficie libre del agua. Anote sus mediciones en una "tabla de valores". Calcule el volumen de agua en cada ocasión y compare con la cantidad de agua vertida cada vez.

Vocabulario: dimensión, magnitud física

En el lenguaje de la vida diaria se usa la palabra **dimensión** como sinónimo de tamaño o medida; aunque ocasionalmente la empleamos en tal sentido, queremos atribuirle ahora un significado más preciso para su uso en Física.

Hemos enfatizado que el valor de una cantidad física debe ser expresado conjuntamente por un número y una unidad de medición.

- El tiempo transcurrido entre dos eventos puede describirse como $18 \cdot 10^2$[s] ó 30[min] ó 0,50[h]. Estos son diferentes modos de describir una medición de una misma cantidad física, **tiempo**, en una misma situación.
- Análogamente, la distancia entre dos puntos de una barra puede expresarse por 254[mm] ó 0,254[m] ó 10,0[in], informando sobre una medición de la cantidad física **longitud** en cierto caso particular.

Usaremos la expresión **magnitud física** como sinónimo de "valor de una cantidad física".

Introduciremos el concepto de **dimensión física** para referirnos a una cualidad intrínseca de la cantidad física que es independiente de la forma en que se expresa o valora dicha cantidad física.

El largo, el ancho y el espesor de una lámina, la altura de un objeto y la profundidad de un pozo son casos particulares de la cantidad física **longitud**. Decimos que largo, ancho, espesor, altura y profundidad tienen la misma "dimensión física". En casos como estos anotamos:

$$\text{dimensión de longitud} \cdots\cdots \text{dim(longitud)} = \mathcal{L}$$

Para calcular el área de una superficie rectangular debemos multiplicar el largo por el ancho, esto sugiere que la **dimensión de área** es igual a la "dimensión de longitud al cuadrado":

$$\text{dim(área)} = \text{dim(largo)} \cdot \text{dim(ancho)} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L} \cdot = \mathcal{L}^2$$

Análogamente, la **dimensión de volumen** es la de "longitud al cubo":

$$\text{dim(volumen)} = \mathcal{L}^3$$

Un "número puro" **no** tiene dimensión física y convendremos en anotar:

$$\dim(\text{ número }) = 1$$

- Por ejemplo, de la definición de "ángulo en radianes" deducimos:

$$\dim(\text{ ángulo }) = \frac{\dim(\text{ arco })}{\dim(\text{ radio })} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}} = 1$$

lo que interpretamos diciendo *"un ángulo* ***no*** *tiene dimensión física".*

Se ha reconocido que es posible expresar las dimensiones de todas las cantidades físicas en término de las dimensiones de algunas cantidades como:

TIEMPO LONGITUD MASA CARGA ELÉCTRICA
TEMPERATURA CANTIDAD DE SUBSTANCIA

pudiendo elegirse como cantidades independientes tres o más de éstas, en diferentes campos de la Física.

Usando la notación:

$$\text{dimensión de la cantidad física F} \cdots \dim(F) = \mathcal{F}$$

donde F es el símbolo que representa a tal dimensión, acordaremos escribir:

$\dim(\text{ tiempo }) = \tau$
$\dim(\text{ longitud }) = \mathcal{L}$
$\dim(\text{ masa }) = \mathcal{M}$
$\dim(\text{ carga eléctrica }) = \mathcal{C}$
$\dim(\text{ temperatura }) = \Theta$
$\dim(\text{ cantidad de substancia }) = \mathcal{S}$

Hemos trabajado con un esquema en que las **cantidades físicas** nombran a conceptos físicos y por lo tanto observables o medibles en situaciones particulares; a cada cantidad física asociamos una **dimensión física**. Al valorar una cantidad física hablamos de **magnitud física**.

Tales acepciones de los términos cantidad, dimensión y magnitud física pueden ser ilustrados considerando la proposición:

"La capacidad de un estanque es 420[ℓ]"

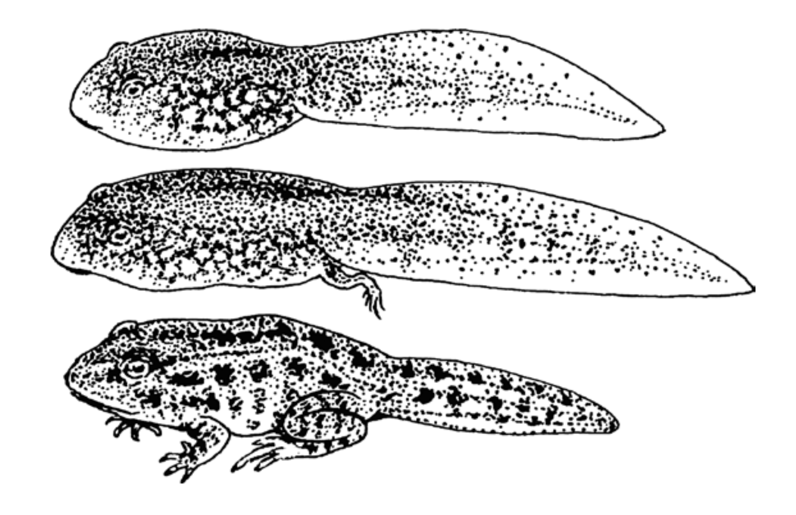
en la cual se hace referencia a:

cantidad física	:	volumen
dimensión física	:	$\mathcal{L}^3$
magnitud física	:	420[ℓ]

Debemos advertirle que para los conceptos que hemos designado con las expresiones "cantidad física", "dimensión física" y "magnitud física", otros autores usan nombres diferentes. Por ejemplo, se suele usar el término "magnitud física" para indicar toda cualidad medible de las cosas, lo que corresponde al significado del término "cantidad física" que empleamos en este texto. Sin embargo, el uso sistemático de una determinada nomenclatura no afecta la consistencia de la descripción de los diversos fenómenos físicos.

CAPÍTULO III

RAPIDEZ DE CAMBIO



Entre los aspectos más significativos de nuestras experiencias y observaciones destaca el carácter variable de la naturaleza.

La Tierra y todos los sistemas biológicos han experimentado y experimentan cambios evolucionarios; la población de la Tierra y el número de habitantes de un país varían de minuto en minuto. La población de bacterias en una gota de agua puede cambiar aún más rápidamente.

Los procesos de crecimiento de microorganismos, de plantas y de animales revelan cambios de forma, de altura, de peso, de comportamiento y de muchas otras características internas y externas.

La temperatura de la atmósfera cambia en el transcurso del día, y de día en día. También varía la temperatura de nuestro cuerpo y, en general, la de todos los objetos.

Un objeto que se mueve va cambiando de posición a medida que transcurre el tiempo. Se mueven las galaxias al alejarse entre sí y se mueven los planetas y cometas en su viaje en torno al Sol. Observamos movimiento cuando las aves, los aviones y los cohetes vuelan y también cuando seguimos con la vista la pelota en un juego de tenis o de fútbol. Cuando por una carretera los automóviles transitan, lenta o rápidamente, los pistones de sus motores ejecutan movimientos de vaivén en determinadas direcciones; estos movimientos mediante ingeniosos mecanismos producen la rotación de sus ruedas.

Los oponentes en un juego de ajedrez mueven sucesivamente las piezas a intervalos irregulares de tiempo, en variadas e imprevisibles direcciones con avances o retornos desiguales.

Hay también movimiento en los diversos tropismos de especies vegetales; por ejemplo, cuando cambia la orientación de ciertas flores siguiendo al Sol o cuando las raíces crecen buscando agua.

Cada proceso metabólico, mediante el cual el organismo obtiene energía de los alimentos, se desarrolla con rapidez variable dependiendo de la presencia de catalizadores, de las condiciones de temperatura y acidez, etc. En general, todo proceso químico representa cambios.

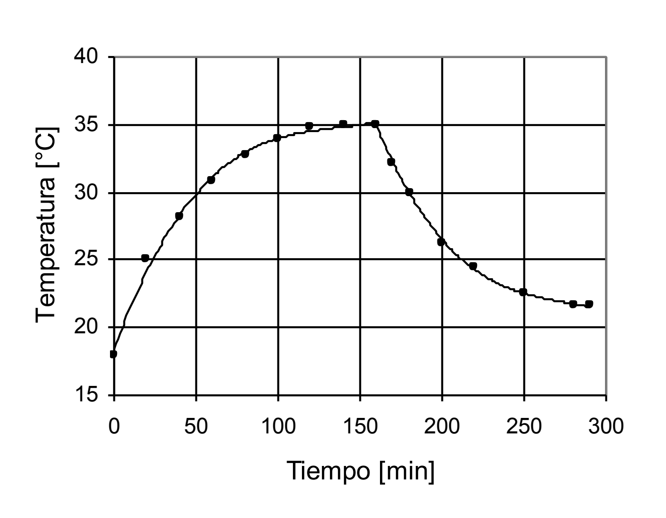
En consecuencia, es inevitable e importante pensar la naturaleza en términos de **cambios.**

Al considerar los cambios que las cantidades físicas manifiestan en el transcurso del tiempo, estamos aceptando que el tiempo es variable y que su valor siempre aumenta. Nuestras experiencias cotidianas y nuestros relojes nos dirían que el progreso del tiempo es bien definido; en el transcurso del tiempo cualquier cosa puede variar de cualquier modo, pero el tiempo aumenta uniformemente para todos los cambios y en forma independiente de ellos. Vamos a suponer que tales características para el tiempo son válidas en situaciones comunes; eso sí, le advertimos que usted podrá aprender cuándo tal suposición no es correcta (Teoría de la relatividad).

A continuación, examinaremos algunas de las manifestaciones de cambio recién mencionadas. Empecemos observando cómo cambia la temperatura de un objeto en el curso del tiempo.

- Un día de verano hicimos un experimento: a las 10 de la mañana llenamos un vaso con agua corriente, lo pusimos detrás de una ventana iluminada por el sol, introdujimos un termómetro en el agua y miramos la hora en un reloj. Medimos la temperatura a intervalos regulares de tiempo; cuando observamos que la temperatura del agua había dejado de subir, pusimos el vaso a la sombra y continuamos las mediciones de tiempo y temperatura. Obtuvimos los siguientes resultados:

tiempo [min]	**temperatura** [ºC]
0	18,0
20	25,1
40	28,2
60	30,8
80	32,7
100	34,0
120	34,8
140	35,0
160	35,0
170	32,1
180	30,0
200	26,3
220	24,5
250	22,5
280	21,6
290	21,6



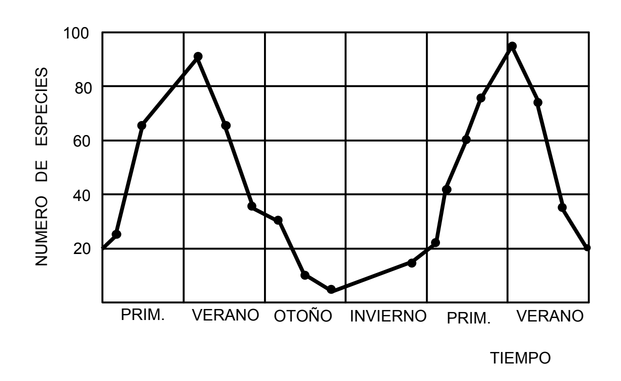
Mirando la representación gráfica de los datos apreciamos la forma en que aumenta la temperatura del agua mientras está expuesta al sol y como se enfría el agua al colocar el vaso a la sombra; igualándose finalmente la temperatura del agua con la del ambiente.

Notamos que al comienzo la temperatura sube rápidamente y que luego lo hace más lentamente, alcanzando un valor que se mantiene constante por varios minutos; en forma análoga, en la etapa de enfriamiento el descenso de la temperatura es más rápido al comienzo que al final, cuando va acercándose a un valor estable.

Le recomendamos que usted reproduzca este experimento o que haga uno similar, según sean los elementos de que disponga o de las condiciones climáticas. Por ejemplo, si tiene un “termómetro de baño” puede medir la temperatura del agua desde que comienza a llenar la tina hasta que cierra la llave de agua caliente y luego mientras se enfría el agua. Con un “termómetro clínico” podrá hacer esta experiencia, pero tomando precauciones adicionales.

Veamos algunas situaciones en las cuales la cantidad que cambia con el tiempo es el “número de cosas”:

- En el gráfico se representa el número de especies de Lepidóptera (mariposas y polillas) que fueron capturadas en el desarrollo de un cierto experimento. Observamos que el número de especies diferentes revela variaciones cíclicas según las estaciones, esto es, según las condiciones climáticas. El mayor número de especies aparece en verano, cuando las condiciones ambientales son óptimas para la reproducción de estas especies; los valores más bajos ocurren en invierno, cuando las condiciones son las más difíciles.



- Ciertos organismos unicelulares se reproducen por simple división. Este proceso requiere, en término medio, el transcurso de un determinado intervalo de tiempo, llamado tiempo de generación (τ).

Si en cierto instante, que llamamos $t = 0$, aislásemos un organismo recién generado, al transcurrir un intervalo de tiempo τ $(t = \tau)$ se produciría la primera división, quedando 2 organismos. Al transcurrir otro intervalo de tiempo τ $(t = 2\tau)$ se produciría la segunda división, obteniéndose 4 organismos y así sucesivamente.

Usando lenguaje aritmético esto se expresa en la siguiente forma:

para $t = 0$	$(t/\tau = 0)$	tenemos	$1 = 2^0$ organismo
para $t = \tau$	$(t/\tau = 1)$	tenemos	$2 = 2^1$ organismos
para $t = 2\tau$	$(t/\tau = 2)$	tenemos	$4 = 2^2$ organismos
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
para $t = k\tau$	$(t/\tau = k)$	tenemos	2^k organismos

Al continuar de tal forma, el número N de organismos en el tiempo t queda representado por:

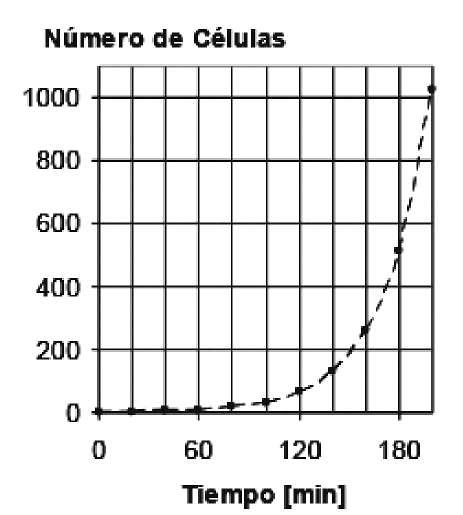
$$N = 2^{t/\tau}$$

ecuación que, en este ejemplo, sólo tiene significado cuando t es un múltiplo de τ ($t = p\,\tau$, con $p = 0, 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$).

Cuando nos referimos a esta forma de crecimiento decimos que la población aumenta en *progresión geométrica* en el tiempo o que tal crecimiento es “exponencial”.

Un ejemplo numérico en que el tiempo de generación vale τ = 20[min] se presenta en la siguiente tabla 2:

Tiempo [min]	**Reproducción** #	**Número de organismos**
0		1
20	1	2
40	2	4
60	3	8
80	4	16
100	5	32
120	6	64
140	7	128
160	8	256
180	9	512
200	10	1024

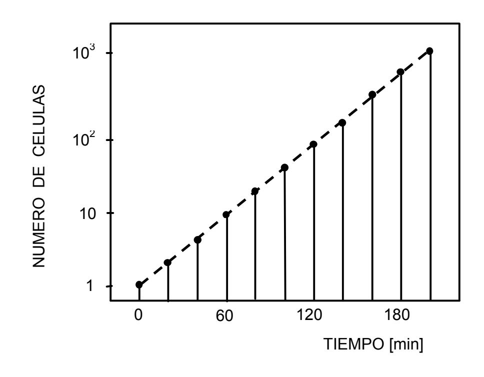


En el gráfico anterior, construido con los números de la tabla, las escalas usadas para representar al tiempo y al número de organismos son ambas escalas *líneales*.

Un cultivo bacteriano en crecimiento puede contener sólo unas pocas células al comienzo y miles de millones al final; si usáramos escalas uniformes, no podríamos emplear la misma figura para mostrar la conducta reproductiva de poblaciones pequeñas y grandes.

Si resultara aconsejable representar el desarrollo de un cultivo bacteriano en una sola figura, se puede usar una escala de *potencias de 10* para la población y una escala uniforme para el tiempo.

Aplicando este método a los datos del ejemplo numérico previo, obtenemos el gráfico adjunto.



Vocabulario: variables

Si dos cantidades están relacionadas en tal forma que al dar un valor a una de ellas, escogida como **variable independiente**, existe un modo sistemático (una tabla numérica, un gráfico, una ecuación) para encontrar el valor correspondiente de la otra, llamada **variable dependiente**, decimos que esta última cantidad es una FUNCIÓN de la variable independiente.

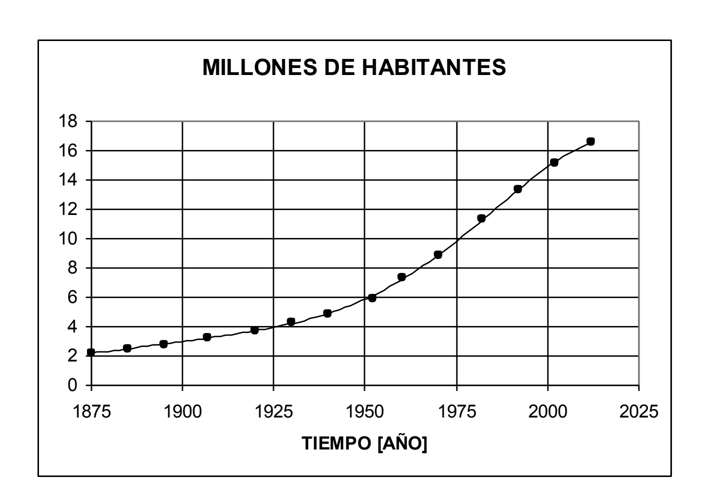
Esta definición que es breve y simple, aunque no se estime rigurosa del punto de vista matemático, implica que una función puede ser representada por:

una tabla de valores numéricos
un gráfico
una ecuación matemática

Por ahora estamos interesados en expresar muchas variables en término de sus cambios en el tiempo, lo que es simplemente otro modo de decir que queremos expresar esas variables como **funciones del tiempo**. Consideraremos al **tiempo** como **variable independiente** (de acuerdo a la suposición previamente establecida) y nos referiremos a las otras variables como **variables dependientes**.

- Hemos recopilado los siguientes datos aproximados sobre la población de Chile en los últimos 150 años:

Año	**Número de habitantes**
1875	2.219.000
1885	2.492.000
1895	2.804.000
1907	3.229.000
1920	3.732.000
1930	4.287.000
1940	4.885.000
1952	5.933.000
1960	7.375.000
1970	8.853.000
1982	11.330.000
1992	13.348.000
2002	15.116.000
2012	16.572.475



Queremos usar estos números para adquirir cierta idea sobre el modo en que cambia la población de un país. Calculemos algunas variaciones de la población en diferentes intervalos de tiempo:

Entre los años 1875 y 1885, esto es durante 1885 - 1875 = 10[año], la población cambió de 2.219.000 a 2.492.000 habitantes. Hubo un aumento de 273.000 habitantes, lo que representa un aumento porcentual de

$$\frac{273.000}{2.219.000} \cdot 100\% \simeq 12,3\%$$

Análogamente, en los 12[año] entre 1940 y 1952 la población aumentó en 5.933.000 - 4.885.000 = 1.048.000[habitante] ; el aumento porcentual correspondiente es $\frac{1.048.000}{4.885.000} \cdot 100\% \simeq 21,5\%$

En estos casos, los porcentajes de aumento **promedio** anual son:

$$\frac{12,3\%}{10} \simeq 1,2\% \quad \text{y} \quad \frac{21,5\%}{12} \simeq 1,8\%, \quad \text{respectivamente.}$$

Efectúe este tipo de cálculos con todos los datos de la tabla. ¿Qué ideas le sugieren los resultados de sus cálculos?

Notación y convenio para diferencias

Cuando nos interesa saber en cuánto ha variado cierta cantidad física calculamos diferencias.

- La duración de un cierto suceso se determina por la diferencia entre dos instantes de tiempo:

$$\text{intervalo de tiempo} = \text{instante posterior} - \text{instante anterior}$$

$$\Delta t = t_p - t_a$$

- Usamos la letra griega Δ (delta mayúscula, equivalente a nuestra letra D) para indicar una **diferencia** o **cambio**. Entonces ΔF, que leemos " *delta F* ", denota un cambio en la cantidad física F:

$$\text{cambio de } F = \text{valor posterior de } F - \text{valor anterior de } F$$

$$\Delta F = F_p - F_a$$

Obviamente, la expresión ΔF no significa el producto entre Δ y F.

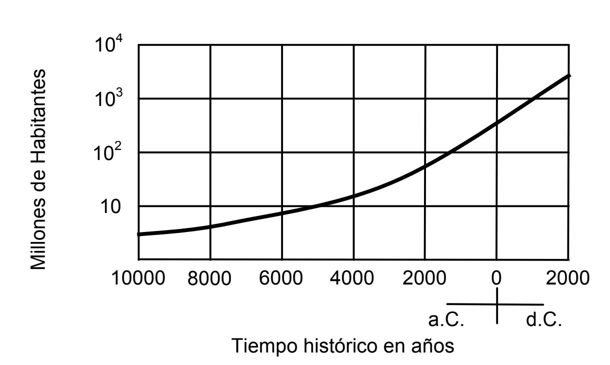
- El orden en que hemos colocado los términos en la diferencia, lo que adoptaremos como un **convenio**, permite concluir que los **incrementos** en la cantidad física F son:

$\Delta F > 0$	(positivo)	si	$F_p > F_a$
$\Delta F = 0$	(cero)	si	$F_p = F_a$
$\Delta F < 0$	(negativo)	si	$F_p < F_a$

Nota cultural

Una de las preocupaciones del hombre es y ha sido la determinación del número de habitantes en la Tierra. En el gráfico adjunto presentamos el crecimiento de la población mundial, estimada, desde 10.000 años A.C. hasta la actualidad.

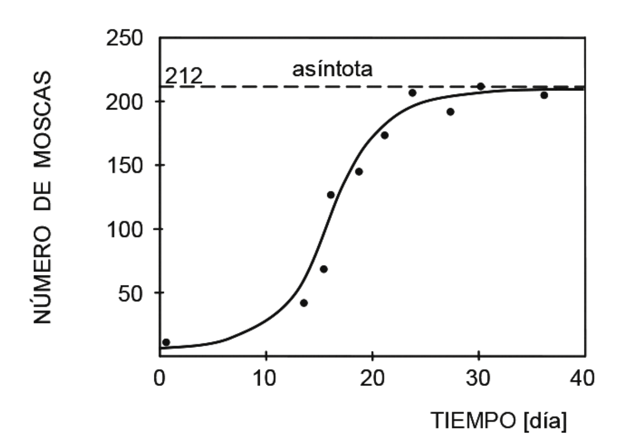
Esta forma de crecimiento coincide con las ideas de Malthus de que la población crece en progresión geométrica.



Compare esta curva de crecimiento con las ya obtenidas para la población de un organismo unicelular.

Sin embargo, al estudiar el crecimiento de poblaciones de otros seres vivos, el bioestadista Verlhust observó que el aumento de población se detiene; ello se explica por efectos de limitación de espacio vital y de recursos alimenticios.

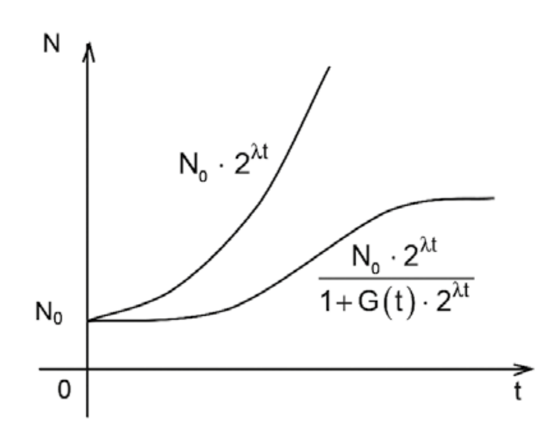
La curva representativa de este tipo de crecimiento toma la forma de una S alargada, como la mostrada en el gráfico adjunto. Esta figura corresponde a datos obtenidos para una población de moscas del vinagre (Drosophila Melanogaster).



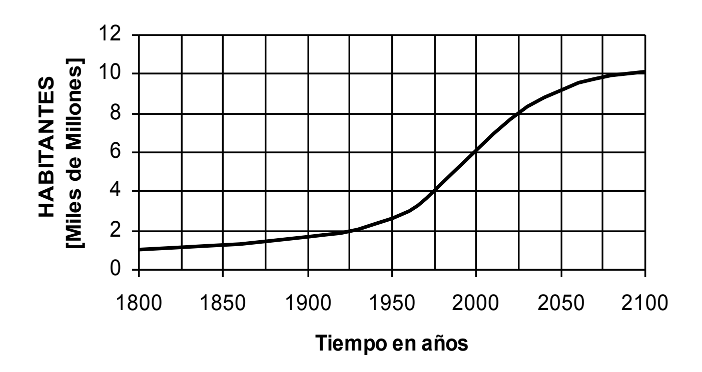
Las formas de crecimiento poblacional de Malthus y de Verlhust se pueden expresar por las ecuaciones:

$$N = N_0 \cdot 2^{\lambda t} \quad \text{y} \quad N = \frac{N_0 \cdot 2^{\lambda t}}{1 + G(t) \cdot 2^{\lambda t}} \ ,$$

respectivamente. Ambas funciones están representadas en el gráfico adjunto para facilitar la comparación.



Considerando que el crecimiento de la especie humana está condicionado por ciertos factores como producción de alimentos, limitación de espacio, transformaciones ecológicas, formas de cultura, etc., varios científicos han efectuado predicciones sobre la población mundial; los resultados de uno de tales estudios están representados en el gráfico adjunto.



Ejercicios

3-1) Haga mediciones durante varios días con el objeto de determinar el intervalo de tiempo que emplea en:

ducharse

comer alguna fruta

trasladarse de su casa a la USM

subir la escala desde Avda. España al frontis del Aula Magna.

Exprese sus resultados en una misma unidad.

3-2) Suponga que usted entra a un cine a las 18:53 y que sale de él a las 20:46 horas. ¿Cuál es la duración del intervalo de tiempo que usted habría permanecido en el cine?

3-3) Censos de población en USA han dado los resultados (aproximados a miles de habitantes) siguientes:

Año:	1790	1900	1950	1960
Habitantes:	3.929.000	76.212.000	151.326.000	179.326.000

Calcule y compare los porcentajes de aumento de población para USA y Chile entre los años 1900 y 1950 y entre los años 1950 y 1960.

3-4) Una persona decidió ponerse a dieta durante los meses de enero y febrero. Se adjuntan los datos de su control de peso.

Construya un gráfico que muestre el peso de la persona en función del tiempo. Elija escalas apropiadas para colocar los días y los pesos; en particular, fíjese que para indicar los pesos es suficiente colocar números entre 60,2 y 63,2 lo que no hace necesario empezar la escala con cero.

Identifique los días en que pesó más y los días en que pesó menos. Determine los intervalos de tiempo en que disminuyó de peso y en los que aumentó de peso.

Fecha	**Peso [kp]**
3 Enero	63,2
6 Enero	63,2
10 Enero	62,6
15 Enero	61,8
22 Enero	61,3
30 Enero	60,7
4 Febrero	60,4
8 Febrero	60,7
10 Febrero	60,4
14 Febrero	60,2
19 Febrero	60,9
25 Febrero	60,4
28 Febrero	60,2

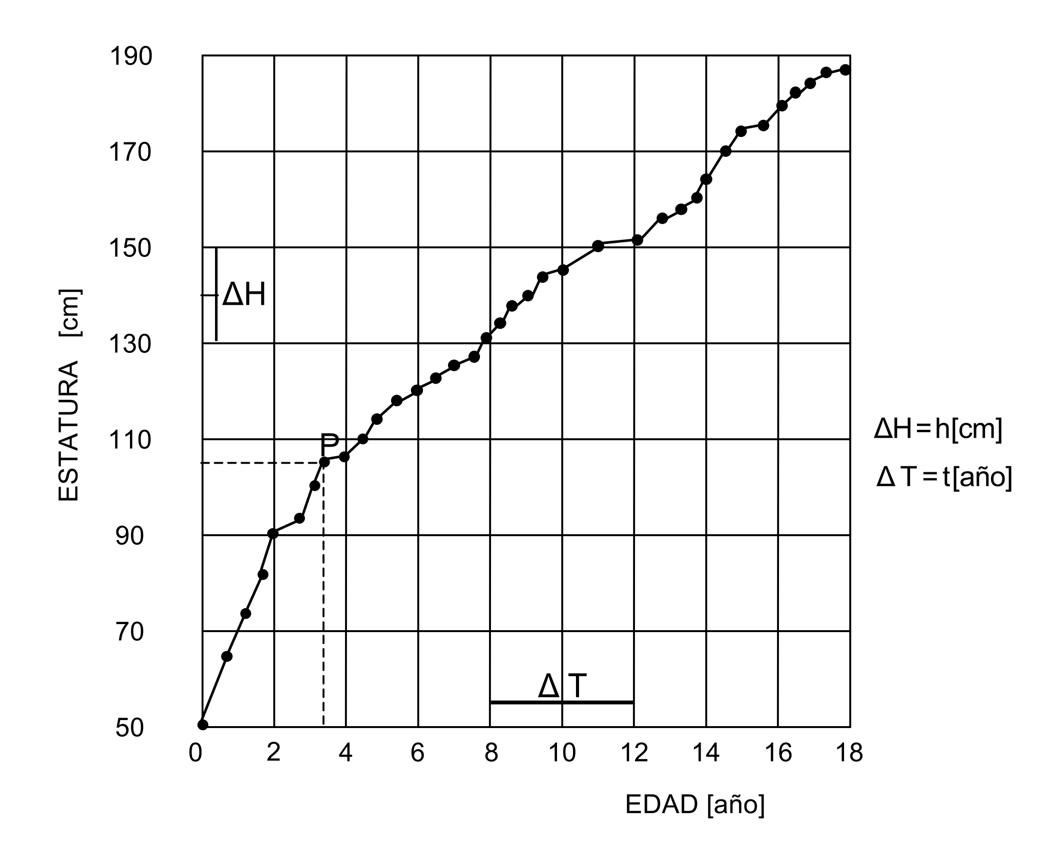
3-5) La profundidad de un río fue medida, en un mismo lugar, durante los días hábiles de junio de 1972. Los resultados obtenidos en días consecutivos, expresados en **metros**, son los siguientes:

3,52; 3,50; 3,45; - ; 3,40; 3,35; 3,35; 3,40; 3,50; 3,65; - ; 3,80; 3,75; 3,70;
3,70; 3,65; 3,62; - ; 3,56; 3,55; 3,50; 3,46; 3,45; 3,71; - ; 4,10; 4,03; 4,01;
3,90; 3,84.

Haga un gráfico, escogiendo escalas apropiadas, de la profundidad del río en función del tiempo. Señale los días en que el río trae más agua. Señale los días en que la profundidad del río permanece constante. Calcule las profundidades medias para las semanas sucesivas y represéntelas en el gráfico. Calcule la profundidad media mensual. Comente.

Otro tipo de cambios que podemos observar con el paso del tiempo es el crecimiento de animales y de plantas.

- Un científico francés del siglo XVIII se preocupó de controlar la estatura de su hijo desde su nacimiento hasta la edad de 18 años. De sus mediciones nos queda el gráfico siguiente.



De este gráfico podemos "extraer" datos y luego analizarlos.

Al examinar este gráfico verificamos que en él las escalas usadas para representar **edad** y **estatura** son ambas uniformes. Entonces podemos determinar los **factores de escala** correspondientes en la siguiente forma:

Elegimos cierta diferencia de edad ΔT , sea $\Delta T = t[\text{año}]$. A ella corresponde una longitud $\Delta l = a$ [cm de gráfico] medida en el *eje de edades*. El *factor de escala para edad* resulta:

$$\sigma_T = \frac{\Delta T}{\Delta l} = \frac{t}{a} \left[\text{año / cm de gráfico} \right]$$

Análogamente, si para una diferencia de estatura $\Delta H = h[cm]$ medimos una longitud $\Delta l' = b$ [cm de gráfico] en el *eje de estatura*, el *factor de escala para estatura* es:

$$\sigma_H = \frac{\Delta H}{\Delta l'} = \frac{h}{b} \; [\text{ cm/cm de gráfico }]$$

Consideremos el punto P del gráfico. La medición de las longitudes, a lo largo de las líneas segmentadas representativas de estatura y edad y la aplicación de los respectivos factores de escala nos permite obtener la estatura alcanzada por el niño a la edad correspondiente:

la estatura es 104[cm] a los 3,3[año] de edad.

<u>Nota</u>: Hemos expresado la estatura por un número entero de centímetros y la edad por uno con décimos de años. Al calcular los factores de escalas (divisiones) y luego al usarlos (multiplicaciones) pueden salir más cifras, pero ellas no son significativas; piense en lo difícil que sería medir la estatura de un niño con precisión de décimas de centímetro, en los errores cometidos al medir en el gráfico con una regla graduada en milímetros, etc.

Aplicando el método recién indicado hemos obtenido los siguientes valores:

T[año] :	0	0,4	0,8	1,0	2,0	4,5	9,0	13,0	15,0
H[cm] :	50	65	73	76	92	111	137	156	175

donde hemos usado T y H para simbolizar la edad y la estatura respectivamente.

Con estos valores podemos calcular el crecimiento (incremento de estatura) durante ciertos intervalos de tiempo, por ejemplo:

Durante el primer año de vida (desde el nacimiento, T = 0, hasta T = 1,0[año]) el crecimiento fue:

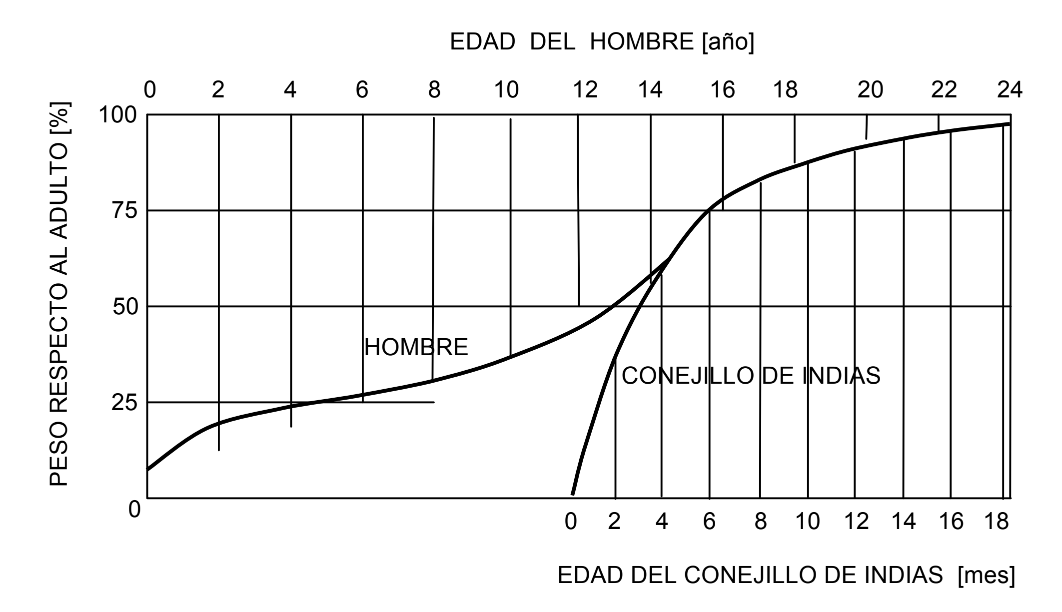
$$\Delta H = (76 - 50)[cm] = 26[cm]$$

El *estirón* entre los 13 y 15 años, ΔT = 2,0[año] fue:

$$\Delta H = (175 - 156)[cm] = 19[cm]$$

Continúe usted con la determinación de la estatura y edad para todos los puntos del gráfico. Calcule los aumentos de estatura entre pares de valores consecutivos. Haga una tabla con los valores de edades, estaturas e incrementos de estatura; la tabla puede encabezarla con *T* [año] , *H* [cm] y ΔH [cm] respectivamente. Construya un gráfico para representar los incrementos de estatura versus tiempo, y comente.

- El crecimiento de un animal no sólo se refleja en el aumento de estatura; podemos considerar también, entre otras características, el aumento de peso. En el gráfico siguiente le mostramos la variación temporal de peso, como porcentaje del peso del adulto, de un hombre y de otro mamífero (un conejillo de Indias):



Resulta interesante que, después de una etapa inicial de crecimiento, la variación porcentual de peso es la misma en ambas especies. Naturalmente, la escala de tiempo es diferente; ello se debe a que el tiempo medio de vida para cada especie es distinto. El crecimiento de otros mamíferos revela igual comportamiento.

Vocabulario: interpolación

Las mediciones efectuadas en un experimento nos proporcionan, en general, un conjunto finito de pares de **datos numéricos** correspondientes a dos variables. Con el objeto de visualizar el fenómeno físico involucrado en el experimento construimos un gráfico con tales datos.

A menudo podemos obtener fácilmente información útil de un gráfico. En realidad, la única información cierta en un gráfico son los **puntos** representativos de los datos y esto siempre que junto a ellos se indiquen los límites de precisión de las respectivas mediciones. Más aún, en ciertos casos se pierde precisión al colocar los puntos en un gráfico.

Usualmente dibujamos una **curva** que pase por estos puntos. El trazado de la curva depende de actos de decisión personal; la experiencia, conocimiento o interpretación del fenómeno físico en estudio nos guía al hacerlo.

El proceso de estimar valores **entre** puntos correspondientes a datos se llama **interpolación**.

Al dibujar una curva pasando por los datos obtenidos en mediciones estamos esencialmente interpolando, ya que al hacerlo generamos infinitos puntos que no provienen de mediciones.

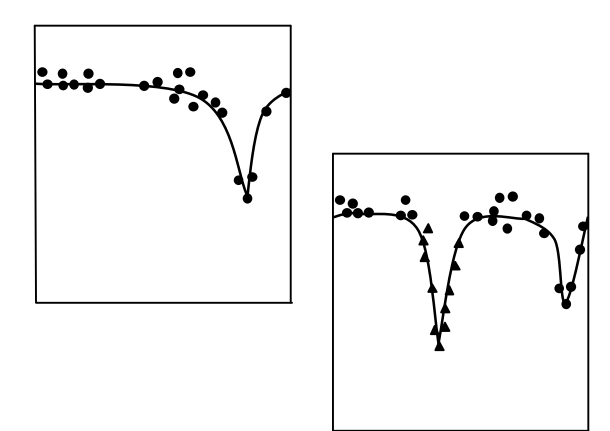
El proceso de hacer predicciones basadas en la **extensión** de una curva más allá de los puntos límites que corresponden a mediciones se llama **extrapolación**.

Cuando trabajamos con un gráfico es conveniente conocer las condiciones bajo las cuales fue obtenida la información y es necesario usar el gráfico con cuidado, especialmente en los procesos de interpolación y extrapolación. Queremos ilustrar este punto con dos casos extremos:

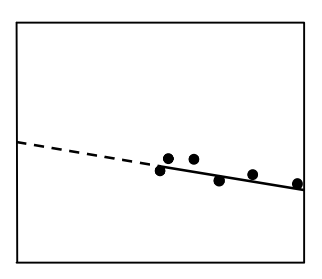
* Los resultados de un experimento se han representado por pequeños círculos en el gráfico superior y se ha trazado una curva (interpolación) considerando ese conjunto de puntos.

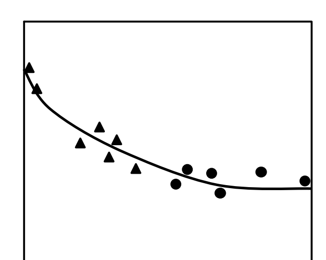
Sin embargo, una repetición del experimento tomando más datos para la sección central de la variable estudiada, dio los resultados representados por los triángulos en el dibujo inferior.

En este caso la interpolación inicial no era válida.



** Las mediciones de otro experimento están representadas por los círculos en el gráfico que se muestra abajo a la izquierda. Se ha trazado una curva que pasa entre esos puntos y luego se ha extrapolado linealmente (recta segmentada en ese gráfico). Predicciones teóricas posteriores indicaron que los resultados experimentales deberían corresponder a la curva del gráfico de la derecha. Cuando se dieron las condiciones técnicas para completar el experimento, se obtuvieron los datos representados por los triángulos en tal gráfico. Observe que en este caso la extrapolación había fallado.





En varias oportunidades usted tendrá necesidad de interpolar o extrapolar para resolver algunos de los ejercicios que le propondremos; sin embargo, a menos que se lo pidamos explícitamente, hágalo con cuidado y tranquilidad, pero sin considerar la posibilidad de que se presenten las situaciones extremas que acabamos de ilustrar. Hemos querido que usted se dé cuenta que tales situaciones pueden ocurrir; tal vez en algunos de sus trabajos futuros se encuentre con ellas.

En algunas situaciones, las curvas representativas de fenómenos físicos que varían con el tiempo son trazadas directamente por instrumentos registradores; es el caso, por ejemplo, de sismógrafos, cardiógrafos y encefalógrafos. Análogamente en la pantalla de un osciloscopio un instrumento que usted aprenderá a utilizar en el futuro se puede ver y fotografiar las curvas que describen el comportamiento de cantidades físicas en función del tiempo. En tales casos no necesitamos interpolar: los instrumentos lo hacen por nosotros.

Un método para comparar

Un día decidimos comprar duraznos. Antes de adquirirlos, comparamos precios de venta de duraznos, de igual tipo y calidad, en diferentes lugares. Leímos los siguientes avisos:

$ A   la docena de duraznos

$ B   el *kilo* de duraznos

Para decidir dónde nos convenía comprar, nos pareció lógico comparar el precio por **unidad de duraznos**.

En el primer caso calculamos directamente:

$$\text{precio de 1 durazno} = \frac{\$A}{12} = \frac{A}{12} \left[\$/\text{durazno} \right]$$

En el segundo caso, primero contamos el número de duraznos en el *kilo*, resultaron N ; entonces calculamos :

$$\text{precio de 1 durazno} = \frac{\$B}{N} = \frac{B}{N} \left[\$/\text{durazno} \right]$$

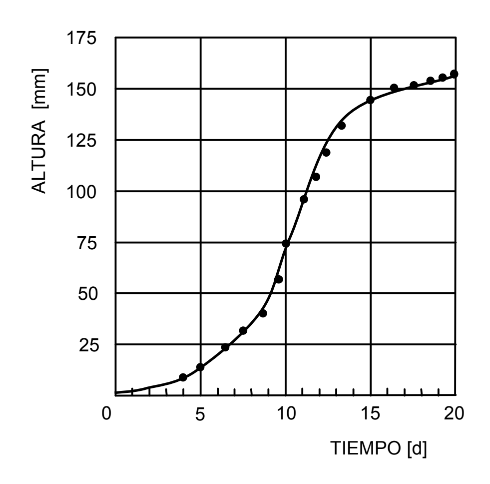
Esto es, con el objeto de establecer una buena base de comparación, valores por unidades, calculamos **cuocientes**.

Aunque tal vez a usted no le parezca efectivo a primera vista, un gran número de situaciones en física y en matemática se resuelven por analogía con el caso de "compra de duraznos".

Crecimiento de una plántula

Plántula es el nombre que se da a la planta joven desde el momento en que el embrión emerge de la semilla hasta que se independiza de los alimentos almacenados en esta última.

En el gráfico adjunto están representados datos obtenidos diariamente durante el crecimiento de una plántula de lupino (una gramínea). El instante en que comienza el desarrollo de la plántula se ha elegido como $t = 0[d]$ y a la altura correspondiente se ha dado el valor $h = 0[mm]$.



Podemos informar sobre el crecimiento de la plántula dando el valor de la mayor altura registrada y el tiempo requerido para tal desarrollo o indicando las alturas alcanzadas en diferentes tiempos y los correspondientes aumentos de altura promedio por día; también podemos decir cuáles son los aumentos de altura por unidad de tiempo para intervalos de tiempo entre mediciones sucesivas o entre varias mediciones.

Siguiendo esta pauta con datos que leemos del gráfico obtenemos resultados como los siguientes:

- La plántula alcanza una altura máxima de 159[mm] a los 19 días. Esto implica que el crecimiento **promedio** por día queda determinado por el **cuociente**:

$$\frac{159\left[\text{mm}\right]}{19\left[\text{d}\right]} \simeq 8{,}4\left[\text{mm/d}\right],$$

lo que leemos "*8,4 milímetros* <u>*por*</u> *día*".

Expresamos esta información de otro modo, haciendo referencia al comienzo del desarrollo de la plántula, diciendo que:

durante el intervalo de tiempo $\Delta t = 19 - 0 = 19[\text{d}]$ el incremento de altura es $\Delta h = 159 - 0 = 159[\text{mm}]$ y en consecuencia, la **rapidez media de crecimiento** es

$$\bar{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{159\left[\text{mm}\right]}{19\left[\text{d}\right]} \simeq 8{,}4\left[\text{mm/d}\right]$$

- Consideremos la altura *h* alcanzada por la plántula en cualquier tiempo *t*, lo que escribimos $h(t)$ y leemos *" la función h de t ".*

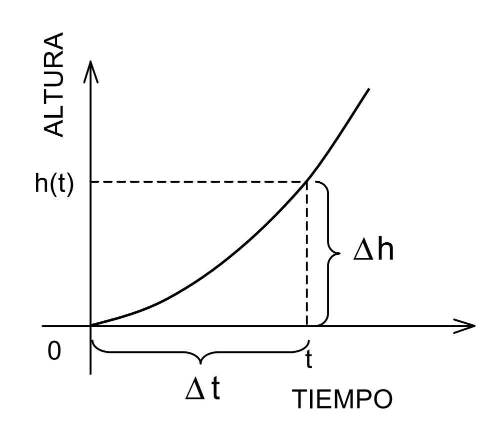
Los incrementos de tiempo y de altura relativos a los valores iniciales $t = 0$ y $h = 0$ son respectivamente:

$$\Delta t = t - 0 = t$$

$$\Delta h = h(t) - 0 = h(t)$$

entonces, la rapidez media de crecimiento (acumulativo) es:

$$\bar{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(t) - 0}{t - 0}$$



Leyendo algunos puntos del primer gráfico y calculando las respectivas *rapideces de crecimiento* obtenemos los siguientes valores:

t [d]	h [mm]	$\bar{v}_h$ [mm/d]
5	18	3,6
9	56	6,2
15	141	9,4
19	159	8,4

Mirando estos valores, nos damos cuenta de que el crecimiento **no es uniforme**: durante algunos intervalos de tiempo la plántula crece más rápidamente que durante otros.

- Esto nos conduce a interrogarnos sobre las *rapideces medias de crecimiento* para diferentes intervalos de tiempo, no necesariamente referidas al instante inicial $t = 0[d]$. Por ejemplo:

Entre el quinto y el sexto día, $\Delta t = (6 - 5)[d] = 1[d]$, se produce un incremento de altura igual a $\Delta h = (22 - 18)[mm] = 4[mm]$ y la *rapidez media de crecimiento* resulta

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{4[mm]}{1[d]} = 4[mm/d]$$

Repitiendo la secuencia de operaciones para lo ocurrido entre el noveno y el décimo día tenemos:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{(75-56)[mm]}{(10-9)[d]} = \frac{19[mm]}{1[d]} = 19[mm/d]$$

Concluimos que en el segundo ejemplo la rapidez de crecimiento es mayor.

- Elijamos, con el objeto de generalizar la discusión inmediatamente anterior, una secuencia de valores crecientes de tiempo:

$$t_1 \;,\; t_2 \;\ldots.\;,\; t_i \;,\;\ldots.\; t_m \;,\;\ldots.$$

a la que corresponde una secuencia de valores respectivos de altura de la plántula:

$$h_1 \;,\; h_2 \;,\;\ldots.\;,\; h_i \;,\;\ldots.\; h_m \;,\;\ldots.$$

Entonces, durante el intervalo de tiempo:

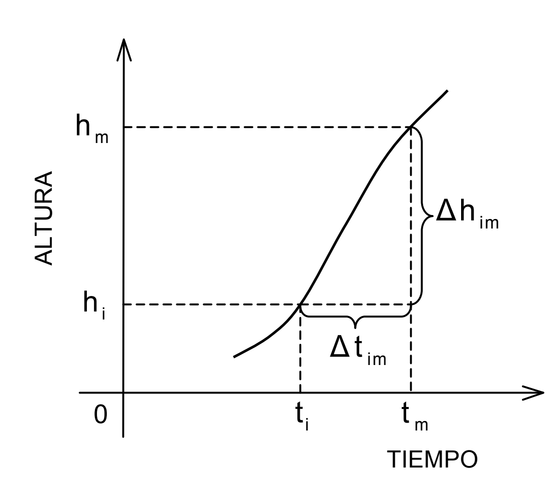
$$\Delta t_{im} = t_m - t_i$$

se ha producido un cambio de altura:

$$\Delta h_{im} = h_m - h_i$$

y la rapidez media de crecimiento, para tal intervalo de tiempo, queda determinada por el cuociente:

$$\bar{v}_{im} = \frac{\Delta h_{im}}{\Delta t_{im}}$$



- En particular, utilizando las mediciones diarias representadas por **puntos** en el gráfico "crecimiento de una plántula", confeccionamos la tabla siguiente de valores:

t [d]	Δ t [d]	h [mm]	Δ h [mm]	$\frac{\Delta h}{\Delta t}\left[\frac{mm}{d}\right]$
0		0		
	4		12	3
4		12		
	1		6	6
5		18		
	1		4	4
6		22		
	1		10	10
7		32		
	1		9	9
8		41		
	1		16	16
9		57		
	1		19	19
10		76		
	1		16	16
11		92		
	1		14	14
12		106		
	1		12	12
13		118		
	1		14	14
14		132		
	1		9	9
15		141		
	1		9	9
16		150		
	1		4	4
17		154		
	1		3	3
18		157		
	1		2	2
19		159		
	1		0	0
20		159		

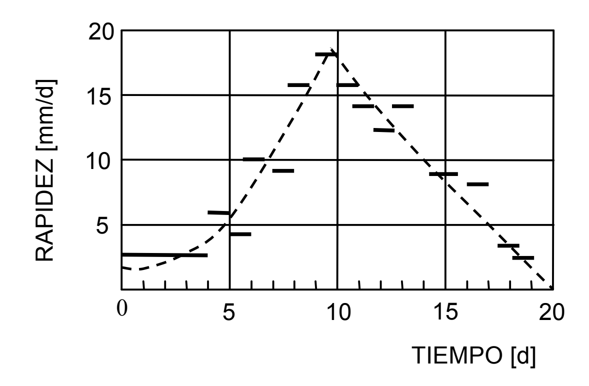
Advertimos que cuando el intervalo de tiempo tiene el valor **uno** en cierta unidad de medición (en este caso $\Delta t = 1[d]$), el valor numérico del *cambio de altura* dado en una unidad de medición conveniente (en este caso $\Delta h\,[mm]$) y el valor numérico de la *rapidez de crecimiento* expresada en términos de las mismas unidades usadas para h y t, son iguales. Por supuesto, *cambio de altura* y *rapidez de cambio de altura* son conceptualmente diferentes y el que tengan igual valor numérico es algo circunstancial; al efectuar cambios de unidades, por ejemplo:

$$\overline{v}_h = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{15\left[mm\right]}{1\left[d\right]} = 15\left[mm/d\right] \hat{=} \frac{15}{24}\left[mm/h\right] \simeq 0{,}63\left[mm/h\right]$$

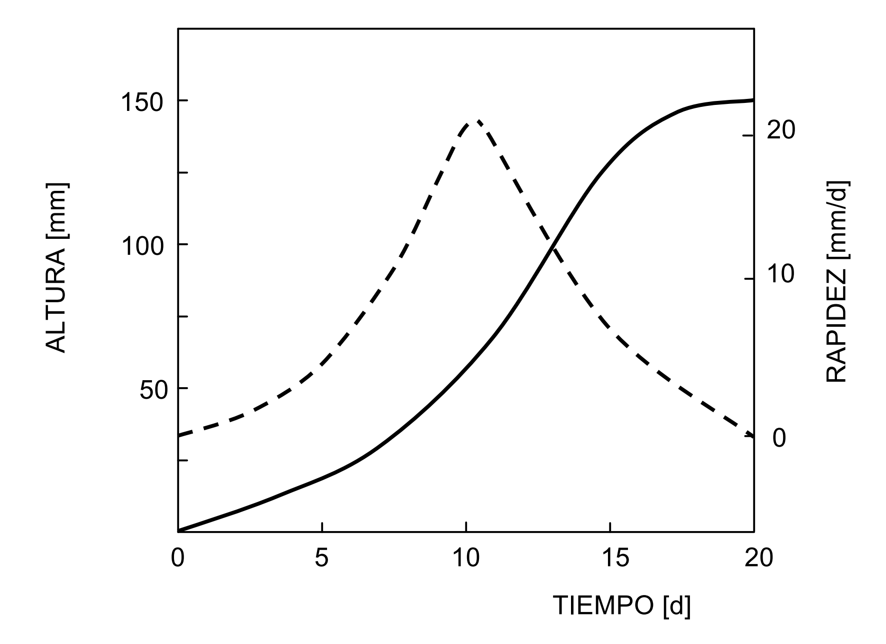
vemos que los valores numéricos de Δh y $\overline{v}_h$ son diferentes.

Los valores de rapidez **media** de crecimiento $\bar{v}_h = \dfrac{\Delta h}{\Delta t}$, determinados en la tabla previa, están representados en la figura adjunta por trazos horizontales. Cada trazo abarca el intervalo de tiempo usado para calcular la rapidez media correspondiente.

Nuevamente notamos que la rapidez de crecimiento no es constante en el tiempo.



En el gráfico que sigue, se muestra una representación conjunta de la altura de la plántula y de su rapidez media de crecimiento, ambas en función del tiempo.



En el gráfico anterior podemos darnos cuenta que la **inclinación** o **pendiente** de la curva $h(t)$, para la altura, proporciona una imagen visual de la magnitud de la *rapidez de crecimiento*.

Le recomendamos que usted reconstruya la tabla numérica previa leyendo valores directamente del gráfico inicial. Después elija un cierto rango de dos o tres días de duración y calcule *rapideces medias de crecimiento* para intervalos de tiempo cada vez menores, por ejemplo cada medio día, cada cuarto de día, etc. Compare y comente.

A través del presente estudio sobre la forma de crecimiento de una plántula hemos introducido la noción de rapidez media de crecimiento; en forma análoga definiremos la rapidez media de cambio para otras cantidades físicas.

Rapidez media de cambio

La producción de un determinado cambio en cierta magnitud física puede requerir tiempos diferentes; mientras menor (mayor) sea el tiempo requerido para un mismo cambio, decimos que éste se produce más rápidamente (lentamente). Aunque tengamos una idea intuitiva de que los cambios pueden ser lentos o rápidos, esto no basta para la Física. Debemos dar un carácter cuantitativo a la noción de rapidez.

La sola indicación del valor del cambio ΔF de la cantidad física F no da ninguna información sobre el intervalo de tiempo Δt empleado para que tal cambio haya ocurrido. Relacionamos ambos conceptos definiendo **rapidez media de cambio** de la cantidad física F por el cuociente:

$$\text{rapidez media de cambio de } F = \frac{\text{cambio de la cantidad física } F}{\text{intervalo de tiempo requerido para tal cambio}}$$

lo que escrito simbólicamente es:

$$\overline{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

Si denotamos la "dimensión de la cantidad física F" por

$$\dim(F) = \mathcal{F}$$

resulta:

$$\dim(\overline{v}_F) = \frac{\dim(F)}{\dim(\text{tiempo})} = \frac{\mathcal{F}}{\tau} = \mathcal{F} \cdot \tau^{-1}$$

Análogamente, las unidades de medición para la rapidez de cambio $\overline{v}_F$ se producen calculando el cuociente entre una unidad elegida para la cantidad F y una cantidad elegida para expresar el intervalo de tiempo. Entonces:

$$\overline{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{a\left[\text{unidad de } F\right]}{b\left[\text{unidad de } t\right]} = \frac{a}{b}\left[\frac{\text{unidad de } F}{\text{unidad de } t}\right]$$

Ejercicios

3-6) Estime la rapidez media con la cual se quema un palo de fósforo y con la que se consume una vela. Exprese los resultados en [cm/min].

3-7) Estime la rapidez media de crecimiento de su pelo y de sus uñas. Exprese los resultados en [m/s].

3-8) Determine su *rapidez media de lectura* al leer por ejemplo, una novela. Exprese el resultado en [página/h].

3-9) Deje caer en un pedazo de papel unas gotas de aceite. Determine la *rapidez de expansión* de la mancha; exprese el resultado en unidades convenientes. Comente.

3-10) Infle un globo. Idee métodos para medir la rapidez con la cual lo infla; exprese el resultado en unidades convenientes. Comente.

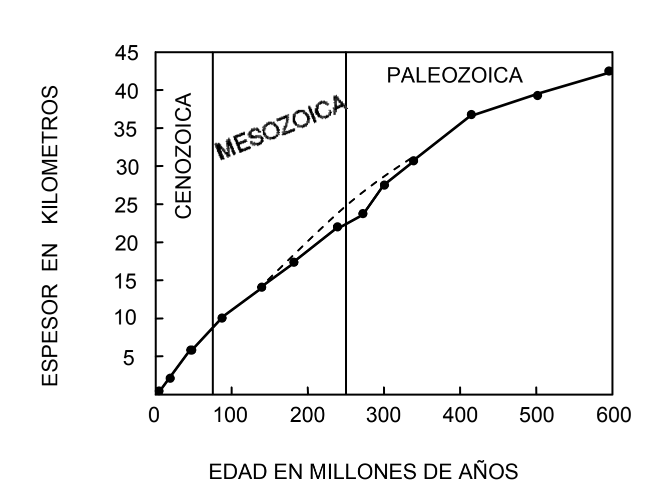
3-11) Elija un recipiente (botella, tarro, olla, ...) y mida su volumen. Mida el tiempo que necesita para llenar el recipiente con agua corriente, abriendo bien la llave de agua. Determine la *rapidez de llenado*; exprese el resultado en [ℓ /min]. Calcule cuánto demora en llenarse un estanque cilíndrico de 8 [dm] de diámetro y 60[cm] de altura usando la misma llave de agua, igualmente abierta.

3-12) Suponga que el 28 de diciembre del año pasado le regalaron una bolsa con 800 calugas y que al día siguiente abre la bolsa y saca **una** caluga y luego, cada dos días saca el doble número de calugas que la vez anterior, hasta que ellas se terminen. Determine una expresión matemática y haga un gráfico que indiquen el número de calugas que van quedando en la bolsa en función del tiempo.

3-13) En el gráfico adjunto se muestra el espesor que hipotéticamente tendría una capa sedimentaria en función de su edad.

Usando este gráfico, calcule en qué Era, Cenozoica, Mesozoica o Paleozoica, la "rapidez media de sedimentación" fue mayor.

Por la tendencia indicada en el gráfico ¿cuál sería el espesor de esa capa sedimentaria de 750 millones de años de edad?



3-14) Considere el experimento sobre la variación de la temperatura del agua en función del tiempo previamente presentado (pág. 88). Calcule y represente la "rapidez media de cambio de temperatura", esto es:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} \; [\text{ºC}/\text{min}], \quad \text{en función del tiempo.}$$

3-15) Usando la técnica de cultivo hidropónico (las semillas se depositan sobre toalla de papel humedecida con líquidos nutritivos) obtuvimos una matita de trigo y medimos el crecimiento de su tallo. Denotando por **L** el largo del tallo y por **t** el tiempo transcurrido desde la colocación de la semilla en el papel secante, los resultados fueron:

t [h] :	72	120	168	216	264	312
L [cm] :	0,2	0,7	1,9	4,2	6,7	9,4

Represente el largo del tallo en función del tiempo. Calcule y represente la rapidez media de crecimiento: $\frac{\Delta L}{\Delta t}\left[\text{cm}/\text{h}\right]$.

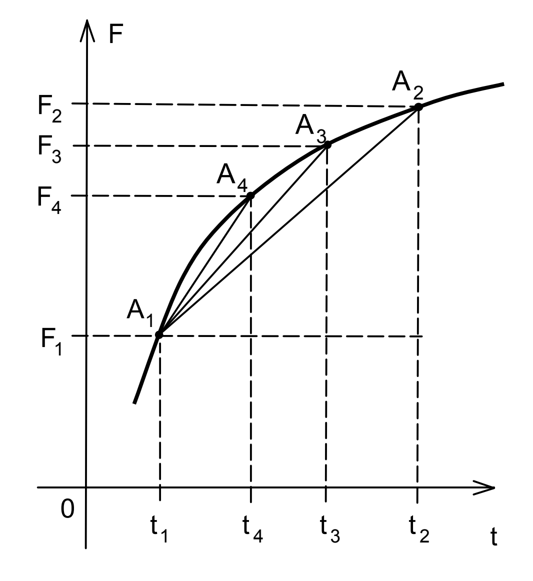
3-16) Los datos sobre el número de habitantes de una pequeña ciudad están indicados en la tabla adjunta. Calcule los porcentajes de aumento de población durante intervalos de tiempo sucesivos. Haga un gráfico con estos valores. Compare con los valores para la población de Chile y comente. Calcule la "rapidez media de cambio de población" para cada uno de los intervalos de tiempo ya considerados. Identifique en el gráfico el año en que no hay variación en la rapidez de cambio de la población y el año en que la rapidez de cambio comienza a disminuir.

Año	**Población**
1860	41.000
1870	46.000
1880	53.000
1890	61.000
1900	66.000
1910	70.000
1920	74.000
1930	77.500
1940	80.000
1950	81.500
1960	82.000

3-17) Considere los datos de perforación de cierto pozo petrolífero. Los primeros 250[m] se perforaron con una rapidez media de 10[m/h]. A esa profundidad se encontró roca dura, debido a lo cual la rapidez media de perforación decreció a 2,2[m/h] para los siguientes 400[m]. Calcule el tiempo empleado y la "rapidez media de perforación" para la apertura completa del pozo.

Rapidez instantánea de cambio

Suponga que una cantidad física varía de acuerdo a la curva del gráfico adjunto.



Piense usted que esa cantidad física es la temperatura registrada por un termógrafo. La rapidez media de la cantidad física F entre los instantes $(t_1\ ,\ t_2)$, $(t_1\ ,\ t_3)$ y $(t_1\ ,\ t_4)$ es:

$$\bar{v}_{1-2} = \frac{F_2 - F_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta F_{1-2}}{\Delta t_{1-2}}$$

$$\bar{v}_{1-3} = \frac{F_3 - F_1}{t_3 - t_1} = \frac{\Delta F_{1-3}}{\Delta t_{1-3}}$$

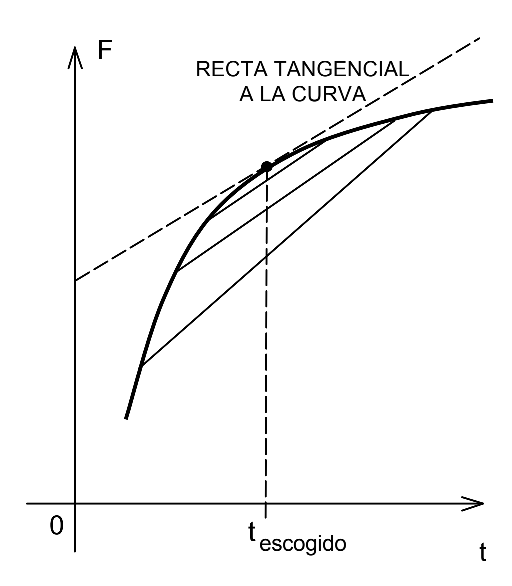
$$\bar{v}_{1-4} = \frac{F_4 - F_1}{t_4 - t_1} = \frac{\Delta F_{1-4}}{\Delta t_{1-4}}$$

Vemos que las rapideces medias de los diversos intervalos de tiempo se corresponden con las pendientes de las rectas $(A_1\ ,\ A_2)$, $(A_1\ ,\ A_3)$ y $(A_1\ ,\ A_4)$.

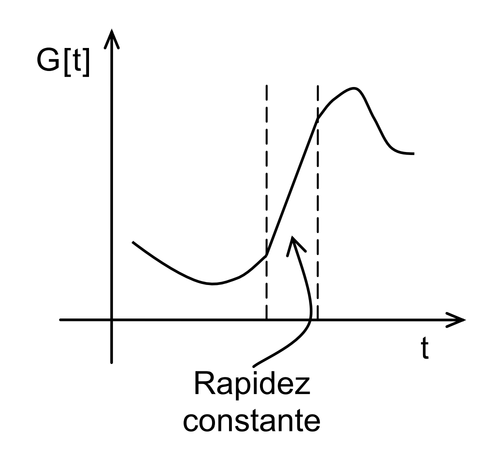
Escojamos un tiempo determinado o **instante**. Tomemos intervalos de tiempo cada vez más pequeños que "encierren" al instante escogido. Si resulta que el valor del cuociente $\Delta F/\Delta t$ se va "estabilizando", hablamos de "la rapidez en ese **instante**" o de **rapidez instantánea** de cambio.

El mejor valor de la rapidez de cambio en el instante $t_{escogido}$ corresponde a la pendiente de la curva en ese instante. Esta puede obtenerse aproximadamente dibujando una recta tangencial a la curva en el punto correspondiente, y calculando su pendiente.

$$v_F = \left(\bar{v}_F , \text{para } \Delta t \text{ pequeño}\right) = \begin{pmatrix}\text{pendiente} \\ \text{de la curva}\end{pmatrix}$$



Considere la función G(t) representada en el gráfico adjunto. Si el cuociente $\Delta G / \Delta t$ tiene el mismo valor para cada intervalo de tiempo dentro de cierto rango o, lo que es equivalente, si la rapidez instantánea es igual para cada "instante de este rango", hablamos de rapidez constante de cambio. En este caso decimos que el cambio de la cantidad física es uniforme con el tiempo.



En resumen, distinguimos tres conceptos:

rapidez media **rapidez instantánea** **rapidez constante**

Aceleración media de cambio

Al observar los gráficos recién estudiados, vemos que la rapidez instantánea de cambio suele variar con el tiempo. En la Naturaleza tenemos claros ejemplos. El crecimiento de los niños tiene notables cambios de rapidez de acuerdo con la edad. Las plantas disminuyen sus cambios en invierno y son admirables en primavera. Además, cada vez que nos trasladamos en bus por la ciudad, su rapidez es extraordinariamente variable. El estudio de las variaciones de las rapideces de cambio nos induce a definir la aceleración de cambio, como:

Para una cantidad física G definimos:

$$\text{aceleración media de cambio de } G = \frac{\text{cambio de la rapidez instantánea de cambio de } G}{\text{intervalo de tiempo requerido para tal cambio}}$$

$$\bar{a}_G = \frac{\Delta v_G}{\Delta t}$$

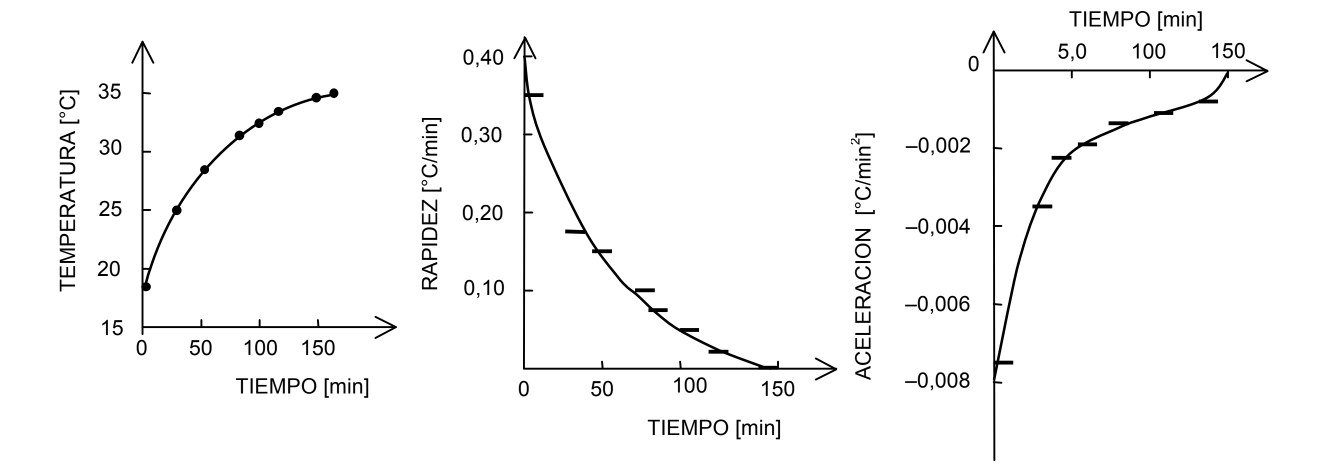
$$\dim(\bar{a}_G) = \frac{\dim(v_G)}{\dim(\Delta t)} = \frac{\dim(G)/\dim(\Delta t)}{\dim(\Delta t)}$$

$$\dim(\bar{a}_G) = \frac{\dim(G)/\tau}{\tau}$$

$$\dim(\bar{a}_G) = \frac{\dim(G)}{\tau^2}$$

- Refirámonos nuevamente al experimento sobre la variación de la temperatura T[ºC] que experimenta el agua contenida en un vaso en función del tiempo (página 88). Al desarrollar el ejercicio 3-14 usted ha calculado y representado la "rapidez media de cambio de temperatura" $\bar{v} = \Delta T / \Delta t$ [ºC/min]. Calcule usted ahora, interpolando cuando sea necesario, la "aceleración media de cambio de temperatura" $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ [ºC/min^2].

Para la parte del ensayo correspondiente al calentamiento del agua, representamos la temperatura, la rapidez y la aceleración de cambio de temperatura en función del tiempo:



Ejercicios

3-18) Un globo, supuesto esférico, es inflado a partir de un diámetro de 10[cm]. Se controla al diámetro del globo cada 5[min]. Luego el globo se desinfla, continuándose con el control.

- Construya una tabla con la rapidez media de cambio del área del globo, en función del tiempo en intervalos de 10[min].
- Grafique la rapidez media de cambio del volumen en función del tiempo a intervalos de 5[min].
- Determine y represente, en función del tiempo, las aceleraciones medias de cambio de área y de cambio de volumen.

hora	**d[cm]**
12:00	10
12:05	12
12:10	13
12:15	15
12:20	17
12:25	21
12:30	24
12:35	31
12:40	33
12:45	31
12:50	23
12:55	20
13:00	18
13:05	17
13:10	14
13:15	12
13:20	10
13:25	10
13:30	10

Vocabulario: proporcionalidad

Si las cantidades F y G están relacionadas en tal forma que:

$$\text{al} \left\{ \begin{array}{c} \text{duplicar} \\ \text{triplicar} \\ \text{.....} \\ \text{multiplicar} \\ \text{por } \beta \end{array} \right\} \text{ el valor de G se } \left\{ \begin{array}{c} \text{duplica} \\ \text{triplica} \\ \text{....} \\ \text{multiplica} \\ \text{por } \beta \end{array} \right\} \text{ el valor de F ,}$$

decimos que " **F es proporcional** a G ".

Esto lo anotamos $F \propto G$, con el significado $F = \lambda \cdot G$

y damos a λ el nombre de **constante de proporcionalidad**.

En este caso también decimos que " F es una **función lineal** de G"

y escribimos: $F(G) = \lambda \cdot G$

Dando a G los valores b, 2b y 3b sucesivamente, obtenemos:

$F(b) = \lambda \cdot b = a$

$F(2b) = \lambda \cdot 2b = 2a$

$F(3b) = \lambda \cdot 3b = 3a$

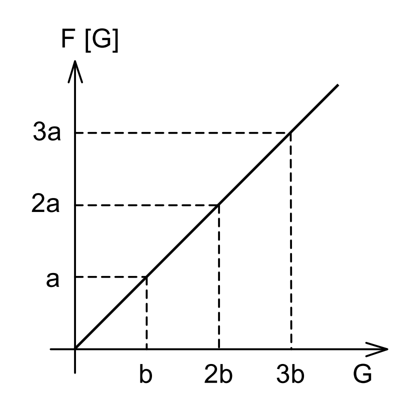
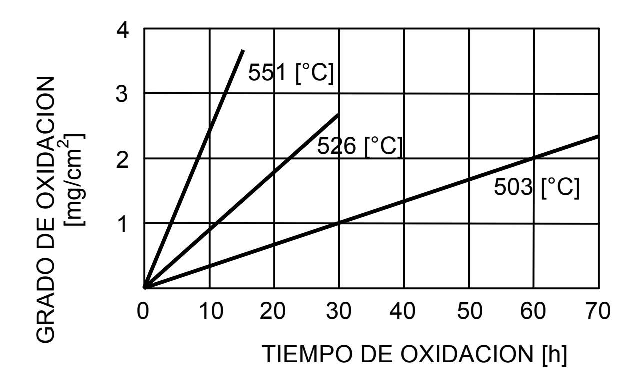


Ilustración. La mayoría de los metales al estar en contacto con el aire reaccionan con él y se van produciendo óxidos metálicos. Excepciones son los llamados "metales nobles" como el oro y el platino. Podría concluirse que tal efecto impediría el uso de metales en la atmósfera terrestre; sin embargo, tal afirmación no tiene mayor valor por no considerar la **rapidez** con que se efectúa la reacción y es precisamente el hecho que en algunos casos tal tipo de reacción sea "lenta", o que se tomen precauciones para que así lo sea lo que nos permite usar metales para construcciones y artefactos proyectados para larga duración.

Bajo ciertas condiciones el "grado de oxidación" (aumento de masa por unidad de superficie) de algunos metales es proporcional al tiempo: $G.O. = A \cdot t$, donde A es un coeficiente que depende de la temperatura y t es el tiempo que el metal está expuesto al oxígeno.

Algunos datos obtenidos en un proceso de oxidación de magnesio puro en oxígeno se representan en el gráfico adjunto.



Compruebe usted que la "rapidez de oxidación" aumenta al aumentar la temperatura a la que se efectúa la reacción.

Cálculo algebraico de "rapidez media de cambio"

Consideremos una cantidad física $F(t)$ descrita por una expresión matemática dada.

Recuerde, por ejemplo, que si una muestra de isótopos radiactivos tiene N núcleos en el instante que decimos llamar $t = 0$, el número de núcleos que no se han desintegrado (en término medio) en un instante cualquiera t está expresado por:

$$n(t) = N \cdot 2^{-t/T}$$

donde T es la semivida del correspondiente tipo de isótopos. Note que debe usar la misma "unidad de tiempo", tanto en t como en T.

Designamos por $F(t)$ el valor de la cantidad F cuando el tiempo tiene el valor t y por $F(t + \Delta t)$ el valor correspondiente al tiempo $t + \Delta t$.

Entonces, el **cambio** de la cantidad física F durante el transcurso de tiempo desde el instante t al $t + \Delta t$ (intervalo de tiempo Δt), lo anotamos por:

$$\Delta F = F(t+\Delta t) - F(t)$$

con lo cual la "**rapidez media** de cambio de F" durante tal intervalo de tiempo resulta :

$$\bar{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \quad ,$$

expresión algebraica que debe ser desarrollada para cada situación que deseemos estudiar.

- Examinemos el caso particular en que una cantidad física F varía **proporcionalmente** con el tiempo, esto es:

$$F(t) = \lambda \cdot t$$

Le advertimos que esta expresión tiene significado físico sólo si:

$$\dim(F) = \dim(\lambda) \cdot \dim(t) = \dim(\lambda) \cdot \tau = \mathcal{F}$$

implicando que la "dimensión de λ" debe ser: $\dim(\lambda) = \mathcal{F} \cdot \tau^{-1}$.

Además, para cálculos numéricos deben usarse las unidades de medición correspondientes, lo cual requiere:

$$\lambda = b \left[\frac{\text{unidad usada para } F}{\text{unidad usada para } t} \right]$$

Al considerar el transcurso del tiempo de un valor t a un valor $t + \Delta t$ obtenemos:

$$F(t + \Delta t) = \lambda \cdot (t + \Delta t) = \lambda \cdot t + \lambda \cdot \Delta t$$

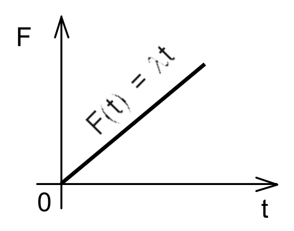
por lo tanto:

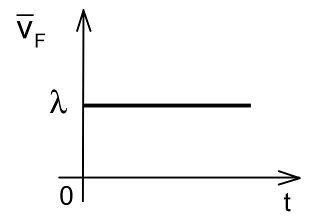
$$\Delta F = F(t + \Delta t) - F(t) = (\lambda \cdot t + \lambda \cdot \Delta t) - \lambda t = \lambda \cdot \Delta t$$

lo que da para la "rapidez media de cambio" la expresión:

$$\bar{v}_F = \frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\lambda \cdot \Delta t}{\Delta t} = \lambda$$

Observe que la rapidez media tiene un valor **constante**, el que es independiente del instante escogido y del intervalo de tiempo transcurrido a partir de ese instante. Esto significa que mientras el valor de una cantidad física sea **proporcional** al tiempo, el valor de la rapidez media y el valor de la rapidez instantánea son iguales y constantes.

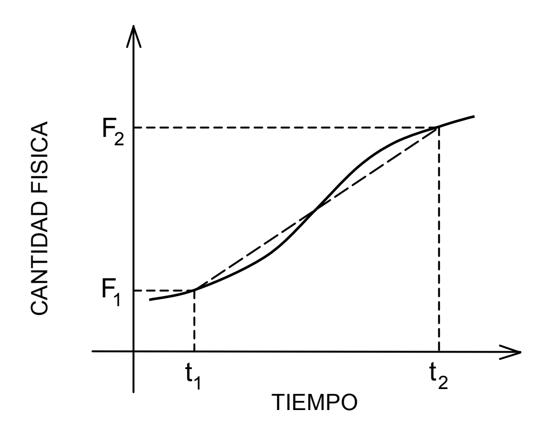




Comentario

En la mayoría de los casos las cantidades que se presentan en la naturaleza no cambian uniformemente con el tiempo, esto es, su rapidez de cambio no es constante.

La curva $F(t)$ del gráfico adjunto representa el cambio de cierta cantidad física F en función del tiempo; el trazo recto segmentado representa un cambio "equivalente" con rapidez constante durante el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2.



- Encontremos una expresión para la rapidez media de cambio $\bar{v}_n$ del número de núcleos en una muestra radioactiva durante el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + \Delta t$.

Como hemos visto en una muestra radioactiva de semivida T, el número de núcleos que queda sin decaer al cabo de un tiempo t está dado por la expresión:

$$n(t) = N \cdot 2^{-t/T}$$

siendo N el número inicial de núcleos y T la semivida del isótopo.

En un instante posterior $t + \Delta t$, el número de núcleos sin decaer que queda en la muestra puede expresarse como:

$$n(t + \Delta t) = N \cdot 2^{-(t+\Delta t)/T}$$

por lo tanto, la variación en el número de núcleos en el intervalo Δt es igual a:

$$\Delta n = N \cdot 2^{-(t+\Delta t)/T} - N \cdot 2^{-t/T}$$

la cual puede reducirse por factorización a :

$$\Delta n = N \cdot 2^{-t/T} \cdot \left(2^{-\Delta t/T} - 1\right)$$

Compruebe usted que la expresión entre paréntesis es negativa, por lo tanto Δn es negativo, como debe ser, ya que el número de núcleos radioactivos está disminuyendo.

Finalmente, la rapidez media de cambio $\bar{v}_n$ queda expresada como:

$$\bar{v}_n = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{N \cdot 2^{-t/T} \cdot \left(2^{-\Delta t/T} - 1\right)}{\Delta t} .$$

Observe que el factor $N \cdot 2^{-t/T}$ es simplemente el número de núcleos en el instante *t*, de modo que podemos escribir:

$$\overline{v}_n = \frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{n(t) \cdot \left(2^{-\Delta t/T} - 1\right)}{\Delta t}$$

es decir, la rapidez media de cambio disminuye proporcionalmente al número de núcleos en la muestra: mientras menos núcleos quedan, más lentamente disminuye el número.

Finalmente observe que, mientras que n es una función sólo del tiempo t, la rapidez media es función del tiempo t y del intervalo de tiempo Δt:

$$\overline{v}_n = f(t, \Delta t)$$

Ejercicios

3-19) Una cantidad física *P* cambia con el tiempo *t* según la expresión

$$P(t) = A \cdot \left(B + C\, t^3\right)$$

donde $\dim(P) = \varepsilon$, $\dim(t) = \tau$ y $\dim(B) = 1$.

Determine dim(A) y dim(C) para que tal expresión sea dimensionalmente consistente.

3-20) Cuando cierto estanque está lleno, la altura del agua es $49[\text{dm}]$. Debido al consumo, la altura H del agua cambia con el tiempo según la relación:

$$H(t) = (-9t + 49)\ [\text{dm}]$$

donde t es el tiempo, en días, medido desde que comienza a usarse el estanque.

Calcule la "rapidez de cambio de la altura".

- Un día hicimos el siguiente "experimento":

Cortamos un trozo de un elástico corriente, marcamos un punto cerca de cada uno de los extremos, colocamos el elástico sobre una regla y medimos el largo del pedazo de elástico entre las marcas ya hechas; obtuvimos:

$$L_0 = 51[\text{mm}]$$



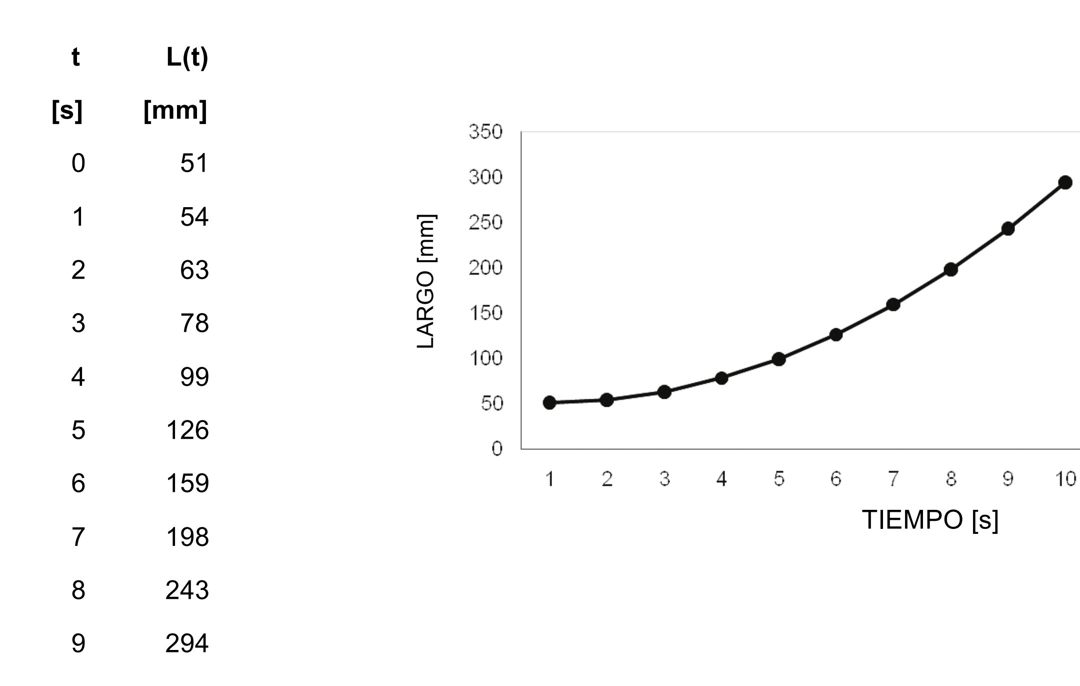
Dejando un extremo fijo y tirando del otro extremo produjimos un alargamiento del elástico.

Después de repetidos ensayos estiramos el elástico en forma tal que nos atrevemos a proponer como **modelo matemático** para representar la longitud del elástico en función del tiempo:

$$L(t) = L_0 + \beta \cdot t^2$$

donde hemos elegido $t = 0[s]$ el instante en que comenzamos a estirar el elástico y, según nuestras mediciones, $\beta = 3\left[mm/s^2\right]$.

Con el objeto de visualizar la "variación del largo del elástico" en el transcurso del tiempo, **calculamos** éste, según la fórmula dada, para diversos instantes:



t	**L(t)**
[s]	**[mm]**
0	51
1	54
2	63
3	78
4	99
5	126
6	159
7	198
8	243
9	294

Advertencia: Cuando use en Física una relación matemática, debe pensar en características físicas que puedan determinar un **rango de validez** para la aplicación de dicha relación. En el presente caso, si se usara la fórmula para valores "grandes" de t, por ejemplo $t = 40[s]$, la fórmula daría $L(40) \simeq 4851[mm]$; casi 5 metros, sin embargo, ¡ya antes se habría cortado el elástico y la fórmula matemática no lo puede saber!

Retornando a nuestro ejemplo, calculemos la "rapidez media de alargamiento" para intervalos de tiempo Δt en forma "algebraica":

$$L(t) = L_0 + \beta \cdot t^2$$

$$L(t + \Delta t) = L_0 + \beta \cdot (t + \Delta t)^2 = L_0 + \beta \cdot \left(t^2 + 2t \cdot \Delta t + (\Delta t)^2\right)$$

$$= \left(L_0 + \beta t^2\right) + 2\beta t \cdot \Delta t + \beta \cdot (\Delta t)^2$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \Delta L &= L(t+\Delta t) - L(t) \\ &= \left(L_0 + \beta t^2\right) + 2\beta t \cdot \Delta t + \beta \cdot (\Delta t)^2 - \left(L_0 + \beta t^2\right) \\ &= 2\beta t \cdot \Delta t + \beta \cdot (\Delta t)^2 = \beta \cdot (2t + \Delta t) \cdot \Delta t \end{aligned}$$

y entonces, la "rapidez media de alargamiento" correspondiente al intervalo de tiempo Δt entre los tiempos t y $t + \Delta t$ es:

$$\bar{v}_a = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{\beta \cdot (2t + \Delta t) \cdot \Delta t}{\Delta t} = \beta \cdot (2t + \Delta t)$$

Veamos algunas aplicaciones numéricas de esta expresión, usando el valor $\beta \simeq 3\left[\text{mm/s}^2\right]$:

t [s]	Δt [s]	$2t + \Delta t$ [s]	$\beta \cdot (2t + \Delta t)$ [mm/s]	$2\beta t$ [mm/s]
2	0,3	4,3	12,9	12
2	0,1	4,1	12,3	12
2	0,06	4,06	12,18	12
2	0,02	4,02	12,06	12
6	0,3	12,3	36,9	36
6	0,1	12,1	36,3	36
6	0,06	12,06	36,18	36
6	0,02	12,02	36,06	36

Observe que si los intervalos de tiempo Δt son **pequeños** en comparación con los valores de t, su incidencia en el cálculo de $\bar{v}_a$ puede ser **despreciada**; esto es, podemos **aproximar**:

$$\bar{v}_a = \beta \cdot (2t + \Delta t) \simeq \beta \cdot 2t$$

resultando:

$$\bar{v}_a \simeq 2\beta t$$

y sabiendo que $v_a \simeq \bar{v}_a$ para intervalos muy pequeños, entonces la rapidez instantánea es $v_a = 2\beta t$

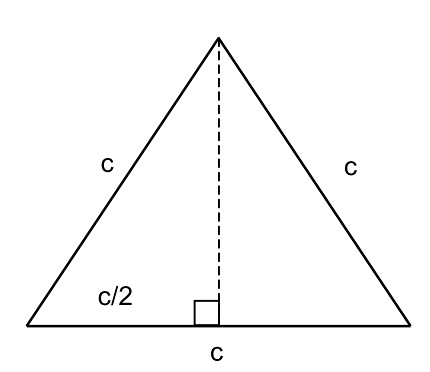
Dejamos a usted la tarea de efectuar cálculos numéricos y de representar gráficamente la rapidez media de alargamiento, y sus valores aproximados, en función del tiempo.

- Piense en un trozo de cartón recortado en la forma de un triángulo equilátero que está colocado sobre una superficie plana. Suponga que alrededor del triángulo va enrollando un hilo delgado en tal forma que cada lado del triángulo aumenta con rapidez media constante K[mm/s].

Calculemos la "rapidez media de incremento de área":

Llamemos *c* a cada lado del triángulo; su área está determinada por:

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h$$



Calculamos la altura *h* "por Pitágoras":

$$c^2 = (c/2)^2 + h^2$$

lo que da: $$h = \sqrt{\frac{3}{4}c^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

y reemplazándola obtenemos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \gamma c^2 \qquad \text{con} \quad \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Consideramos el área del triángulo como función de su lado:

$$A(c) = \gamma c^2 \quad ,$$

entonces, cuando el lado aumenta en Δc obtenemos un nuevo valor para el área:

$$A(c + \Delta c) = \gamma \cdot (c + \Delta c)^2$$

y el incremento correspondiente es:

$$\begin{aligned} \Delta A &= A(c + \Delta c) - A(c) = \gamma \cdot (c + \Delta c)^2 - \gamma c^2 \\ &= \gamma \cdot (2c + \Delta c) \cdot \Delta c \end{aligned}$$

Ya que el hilo es delgado, los incrementos sucesivos del lado son "pequeños" respecto al valor del lado: $\Delta c << c$, lo que permite la aproximación $2c + \Delta c \simeq 2c$ dando:

$$\Delta A \simeq \gamma \cdot 2c \cdot \Delta c$$

y con ella la "rapidez media de incremento de área" resulta:

$$\bar{v}_A = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\gamma \cdot 2c \cdot \Delta c}{\Delta t} = \gamma \cdot 2c \cdot \frac{\Delta c}{\Delta t}$$

Pero, $\frac{\Delta c}{\Delta t}$ es la "rapidez media de aumento del lado": $\bar{v}_c = \frac{\Delta c}{\Delta t} = K$, con lo cual:

$$\bar{v}_A = 2\gamma \cdot c \cdot K = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot c \cdot K$$

Usando las unidades: [mm] para c y [mm/s] para K , resulta $\bar{v}_A$ expresada en [mm^2/s] .

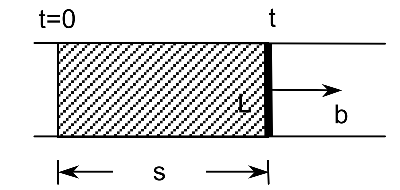
Ejercicios

3-21) El perímetro de una circunferencia varía según la ley $P(t) = 6\pi t$, con P en [cm] y *t* en [s]. Calcule la rapidez media de cambio del radio.

3-22) Suponga que en un triángulo equilátero la altura h varía con el tiempo de acuerdo a $h(t) = 3{,}00 - 0{,}04\,t$, con *h* en [cm] y t en [s]. Calcule la rapidez de variación del perímetro del triángulo equilátero.

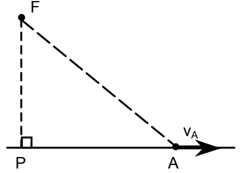
3-23) Se tiene un triángulo rectángulo cuyos catetos varían en el tiempo según: $a = a(t) = 0{,}9\,t\,[\text{cm}]$ y $b = b(t) = 1{,}2\,t\,[\text{cm}]$ con *t* expresado en [s]. Obtenga la rapidez media de variación de la hipotenusa del triángulo.

3-24) Una barra de largo L[cm] se mueve con rapidez constante b[cm/s] a la derecha. En un instante t la barra se encuentra a la distancia s[cm] de una posición de referencia, en $t = 0$. Determine la "rapidez de cambio del área barrida por la barra".



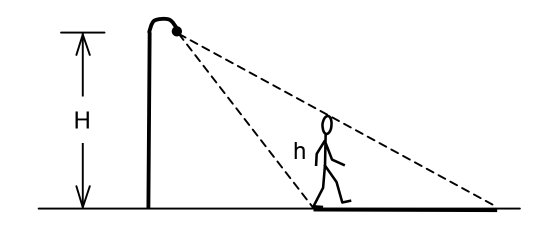
3-25) Suponga que el radio de una esfera aumenta con el tiempo de acuerdo con la función $R(t) = R_0 + at$ con $a > 0$. Calcule la "rapidez media de cambio de la superficie"; considere también el caso de "pequeños" intervalos de tiempo.

3-26) El punto F está fijo y el punto A describe una trayectoria rectilínea con rapidez constante v_A. Determine la "rapidez media de cambio de área del triángulo FPA".



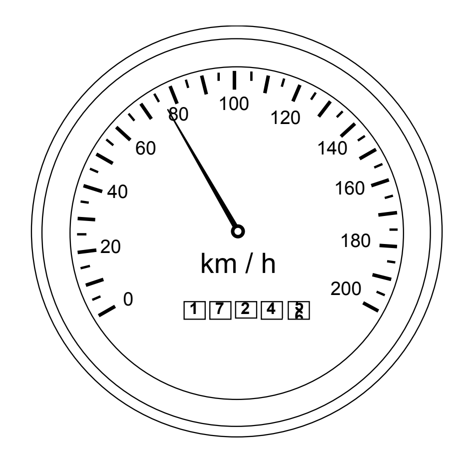
3-27) Cierta variable física η varía con el tiempo según la relación $\eta(t) = A/t$ donde A es una constante. Si η se mide en $[\Omega]$, determine unidades apropiadas para A. Si $\eta = 5[\Omega]$ cuando $t = 15[\text{s}]$ calcule el valor de A. Represente gráficamente $\eta(t)$ en función de t. Determine algebraicamente la rapidez media de cambio $\eta(t)$ para pequeños intervalos de tiempo. Represente gráficamente tal rapidez de cambio para intervalos pequeños en función del tiempo.

3-28) Un hombre de altura h camina en línea recta con rapidez constante en la vecindad de una lámpara puntiforme, la que está colocada a altura H sobre la acera. Encuentre una expresión algebraica para la "rapidez media de cambio del largo de la sombra del hombre", entre los instantes t y $t + \Delta t$.



CAPÍTULO IV

RAPIDEZ DE UNA PARTÍCULA



Vocabulario: partícula

Viajamos en bus o en automóvil cuando la distancia por recorrer es de varias cuadras o de varios kilómetros. Como tal distancia es mucho mayor que el largo del vehículo, no nos preocupamos de averiguar si ella se mide desde el parachoques trasero, desde el delantero o desde otra parte del vehículo; para describir su desplazamiento actuamos como si todo él estuviera concentrado en un **punto**.

Procedemos en forma análoga al seguir el vuelo de un avión desde la torre de control de un aeropuerto o al "rastrear" la trayectoria de un satélite artificial, ya que el tamaño de ellos es pequeño comparado con las distancias que recorren.

Continuando con este proceso de abstracción, para ciertos objetivos en Física podemos considerar a un objeto como representado por una sola **partícula** o **punto material**. Esto significa que, clásicamente, al referirnos a una partícula queremos dar a entender algo tan pequeño como podamos imaginar, estrictamente un ente sin tamaño, un punto que posee ciertas propiedades físicas, como masa y carga eléctrica.

A menudo es posible simplificar situaciones físicas recurriendo a tal método. Así, al discutir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol podemos considerar a la Tierra como una partícula en el espacio. Sin embargo, debemos advertirle que al examinar la rotación de la Tierra respecto a su eje no es posible usar tal suposición simplificadora.

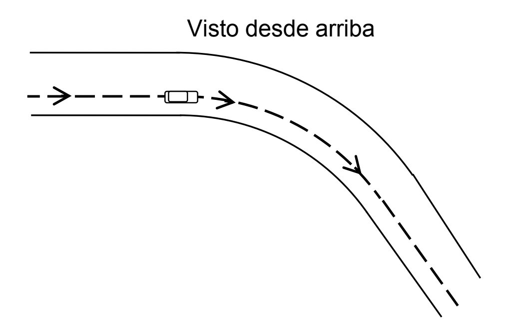
Rapidez media de una partícula

Ya hemos dicho que un objeto (partícula) está en movimiento cuando cambia su posición con el transcurso del tiempo con respecto a un observador.

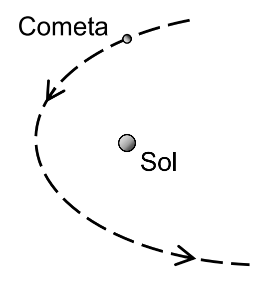
Al cambiar la partícula de posición describe una trayectoria. La medición de la longitud de esa trayectoria en un intervalo de tiempo nos permite obtener el valor del camino recorrido por la partícula en ese intervalo de tiempo.

Considere los siguientes ejemplos de trayectorias:

- Un automóvil está entrando en una curva del camino; la trayectoria es la curva punteada:



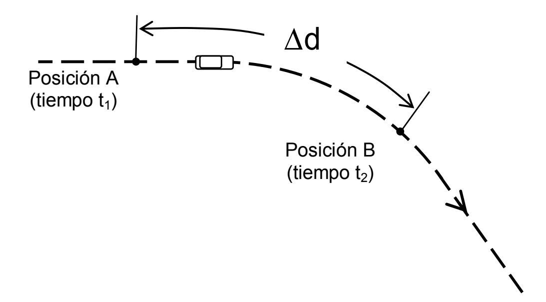
- Un cometa describe una trayectoria elíptica en torno al sol:



Vamos a definir "rapidez media de camino recorrido" de una partícula en un "intervalo de tiempo" como:

$$\text{rapidez media} = \frac{\text{camino recorrido por una partícula}}{\text{intervalo de tiempo empleado en el camino recorrido}}$$

donde, por simplicidad y por ser un término del lenguaje cotidiano, hemos usado "rapidez media" como abreviación de "rapidez media de cambio de camino recorrido"



En forma simbólica anotamos: $\overline{v} = \dfrac{\Delta d}{\Delta t}$

La correspondiente dimensión es:

$$\dim(\bar{v}) = \frac{\dim(\Delta s)}{\dim(\Delta t)} = \frac{\mathcal{L}}{\tau} = \mathcal{L} \cdot \tau^{-1}$$

Una forma de medir el camino recorrido por un automóvil es mediante el **odómetro** (también llamado comúnmente "cuentakilómetros"), que marca el camino total recorrido por el automóvil desde que salió de la fábrica hasta el presente; usualmente este camino recorrido es llamado el "kilometraje" del automóvil.

Suponga que un automovilista anota el kilometraje al comienzo y al final de un viaje entre dos ciudades y los correspondientes tiempos:

	Hora	Kilometraje
Salida desde Santiago	17:15	44080,3
Llegada a Valparaíso	18:43	44201,9
Incrementos	88[min]	121,6[km]

Entonces, la rapidez media para este viaje es:

$$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{121{,}6\,[\mathrm{km}]}{88\,[\mathrm{min}]} \approx 1{,}38\ [\mathrm{km/min}]$$

Multiplicando por $\dfrac{60\,[\mathrm{min}]}{1[\mathrm{h}]}$ se obtiene el valor en las unidades más usadas en este caso: $\bar{v} \approx 82{,}8\ [\mathrm{km/h}]$

La rapidez media puede ser útil en algunas situaciones; por ejemplo, para indicar la rapidez "efectiva" de circulación del tráfico en una ciudad muy congestionada. Sin embargo, en otras aplicaciones es necesario definir la rapidez que tiene un cuerpo "en un instante dado". Por ejemplo, suponga que un policía del tránsito detiene a un automovilista por "exceso de velocidad"[†]. El automovilista no podría aducir en su defensa, que su rapidez media durante el viaje ha sido "tan sólo de 82,8[km/h]".

Para medir la rapidez del automóvil "en un instante" el policía usa un dispositivo de radar que emite pulsos electromagnéticos por intervalos de tiempo muy pequeños (de orden de magnitud de milisegundos), y registra los pulsos reflejados en el automóvil. La rapidez, así medida, es de todos modos una rapidez media. Pero como el intervalo de tiempo es muy pequeño, el valor obtenido puede considerarse como la rapidez en un instante. Definimos, en forma aproximada:

$$\text{rapidez instantánea} \approx \left(\frac{\text{distancia recorrida}}{\text{intervalo de tiempo}}\ ; \quad \text{para un intervalo de tiempo "muy pequeño"} \right)$$

[†] En situaciones de la vida diaria se usa la palabra "velocidad" para referirse a la rapidez. Por ejemplo, en las señales del tránsito se usa: "Velocidad máxima: 120 [Km/h]".

Simbólicamente, podemos escribir la rapidez instantánea como:

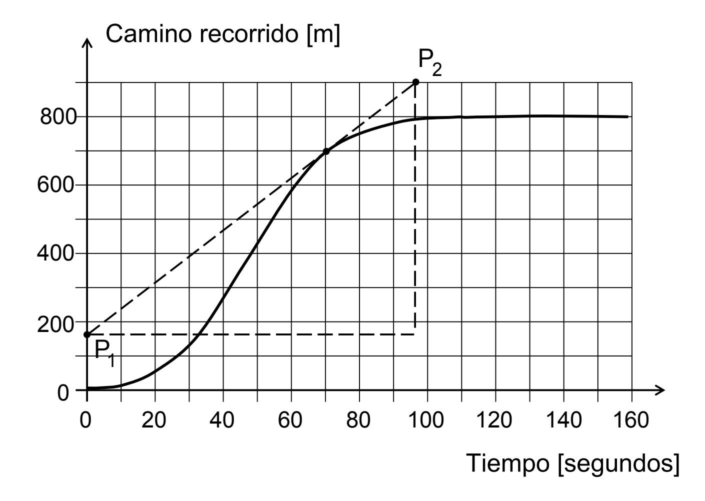
$$v \approx \left(\frac{\Delta d}{\Delta t} \text{ ; para un intervalo de tiempo "muy pequeño"} \right)$$

donde hemos usado el símbolo v (sin "barra") para distinguirla de la rapidez media.

Como el camino recorrido sólo puede aumentar o permanecer constante (nunca disminuye), la rapidez media y la rapidez instantánea sólo pueden tomar valores positivos o cero. El "velocímetro" de un automóvil es otra forma de medir la rapidez instantánea: sus valores son siempre positivos o cero sin importar en qué dirección y sentido se mueve el vehículo.

Podemos calcular aproximadamente la rapidez instantánea de un cuerpo a partir de un gráfico del camino recorrido en función del tiempo, dibujando una recta tangencial a la curva y calculando su pendiente.

Ejemplo. Un cuerpo se mueve de modo que el camino recorrido varía en función del tiempo según el gráfico adjunto. Calcule aproximadamente la **rapidez media** durante el intervalo entre 0 y 70[s], y también la **rapidez instantánea** en el instante 70[s].



La rapidez media entre 0 y 70 [s] está dada por:

$$\bar{v} = \frac{\Delta d}{\Delta t} \approx \frac{(700 - 0)[m]}{(70 - 0)[s]} \approx 10[m / s]$$

Para calcular aproximadamente la rapidez instantánea dibujamos una recta tangencial a la curva, en el instante 70[s]. Para calcular la pendiente de esta recta podemos tomar dos puntos cualesquiera, por ejemplo, P_1 y P_2:

$$v = \text{pendiente de la recta tangencial} \approx \frac{(900 - 170)[m]}{(96 - 0)[s]} \approx 7,6[m / s]$$

Por ahora, no es nuestra intención preocuparnos de la "descripción del movimiento"; por lo tanto, no mencionamos en esta ocasión el asunto del "sistema de referencia" ni otros aspectos relacionados con el movimiento de un objeto.

Ejercicios

4-1) Determine su "rapidez media" cuando:

camina una cuadra a paso normal,

corre una cuadra con "todas sus ganas",

sube siete pisos de un edificio

Realice las mediciones necesarias. Exprese sus resultados en [m/s] y compare.

4-2) Ingénieselas para determinar la "rapidez media" de:

una hormiga caminando,

un caracol arrastrándose sobre la tierra,

una mosca volando dentro de una pieza,

una gaviota volando sobre el mar,

un gato corriendo,

una pelota de básquetbol lanzada desde media cancha al arco,

una gota de lluvia,

una gota de agua al caer desde el alero de una casa al suelo.

Piense en métodos simples que sean apropiados para cada caso y efectúe mediciones. Exprese sus resultados en unidades que Ud. considere las más convenientes.

4-3) Averigüe "récords" nacionales o internacionales para carreras de: 100[m] planos, 100[m] vallas, 400[m] vallas, 800[m] planos, 1[mile] , posta 4x400[m], 5.000[m], 20.000[m] y de una maratón. Calcule la rapidez media para cada evento, expréselas todas en [km/h] y construya una "escala uniforme" para representarlas. Proceda en forma similar para carreras de natación. Use el mismo gráfico.

Haga comparaciones con carreras de caballos para diferentes distancias.

4-4) Infórmese y luego determine la rapidez media con la cual:

navega un transatlántico,

se mueve la Tierra en torno al Sol,

avanza un automóvil mientras es armado en una línea de montaje.

Exprese sus resultados en [m/s] .

Rapidez: órdenes de magnitud

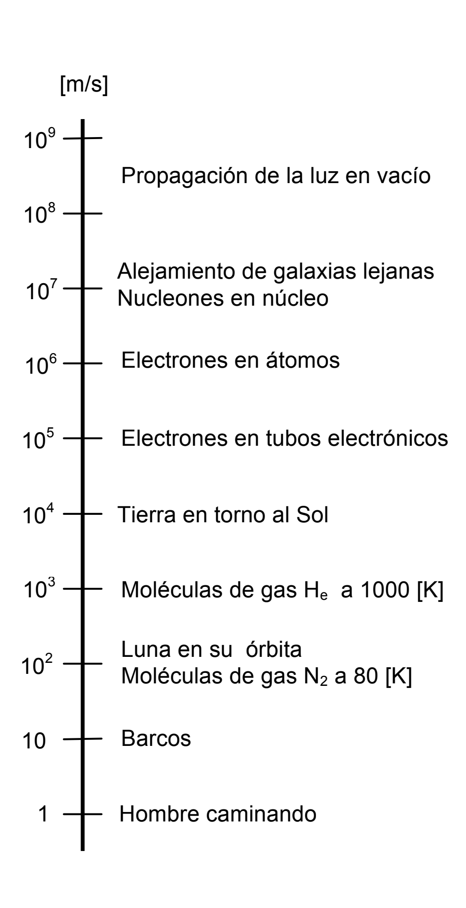
El orden de magnitud de la rapidez de un hombre caminando es 1[m/s] y corriendo es 10[m/s]. Cuando el hombre quiso moverse más rápido y llegar más lejos, primero montó animales y luego construyó máquinas para conseguir su objetivo.

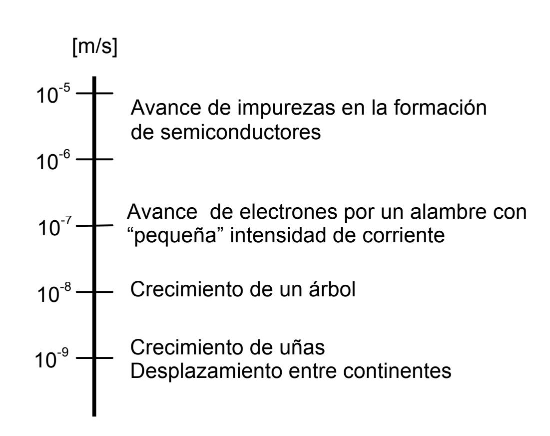
Si un observador detecta que una partícula no se mueve, dice que su rapidez es cero. Los físicos han construido o han hecho construir máquinas para aumentar cada vez más la rapidez de partículas,

hasta obtener que su valor sea casi igual a la "rapidez de propagación de la luz en el vacío", rapidez que no puede ser sobrepasada por ninguna de tales partículas. Todas las partículas que se han encontrado en la naturaleza o que se han producido en el laboratorio pueden desplazarse con rapidez entre 0[m/s] y $3 \cdot 10^8$ [m/s].

En la figura de la página mostramos "órdenes de magnitud de rapidez" para diferentes cosas.

RAPIDEZ DE:





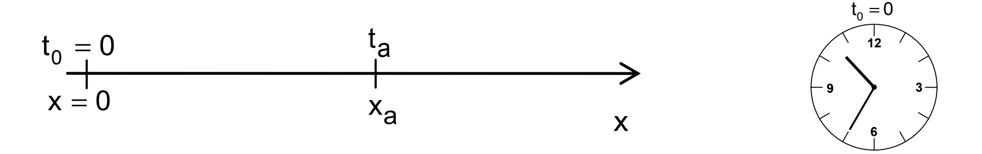


- Un tren de carga que viaja con una rapidez media de 20[km/h], pasa por cierta estación a las 10:35 horas . Un tren expreso pasa por esa estación a las 10:50, viajando por la misma línea, en igual sentido, con una rapidez media de 90[km/h]. Si el tren de carga no cambia de línea oportunamente, habría choque; calculemos el tiempo máximo del cual dispone el tren de carga, desde que pasó por la estación, para cambiar de vía.

$$v_c = 20[\text{km / h}] = \frac{20}{60}[\text{km / min}] = \frac{1}{3}[\text{km / min}] \quad \text{rapidez del tren de carga}$$

$$v_{ex} = 90[\text{km / h}] = \frac{90}{60}[\text{km / min}] = 1{,}50[\text{km / min}] \quad \text{rapidez del tren expreso}$$

$$t_{ex} = 15[\text{min}]$$



Sea t_a el instante en que el expreso alcanza al tren de carga. Entonces:

$\longrightarrow$ El máximo intervalo de tiempo disponible para el tren de carga: $t_a - t_0 = t_a$

$\longrightarrow$ Intervalo de tiempo para que el tren expreso alcance al de carga: $t_a - t_{ex} = t_a - 15$

$\longrightarrow$ Camino recorrido por el tren de carga hasta el alcance: $\Delta s_c = v_c\, t_a$; $\Delta s_c = (1/3)\, t_a$

$\longrightarrow$ Camino recorrido por el expreso hasta el alcance: $\Delta s_{ex} = v_x \left(t_a - 15\right)$; $\Delta s_{ex} = 1{,}5\left(t_a - 15\right)$

Ambos recorridos son iguales: $\Delta s_c = \Delta s_{ex}$

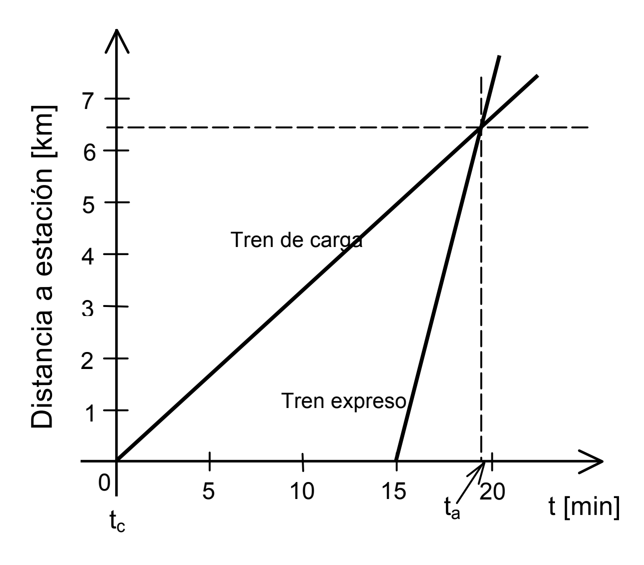
$$\frac{1}{3}[\text{km / min}] \cdot t_a = 1{,}5[\text{km / min}] \cdot \left(t_a - 15\ [\text{min}]\right)$$

$$\left(1{,}5 - \frac{1}{3}\right) t_a = 22{,}5\ [\text{min}]$$

$$t_a = \frac{22{,}5 \cdot 3}{3 \cdot 1{,}5 - 1} \simeq 19{,}3\ [\text{min}]$$

Por lo tanto, el tren de carga debe cambiar de línea antes de que transcurran 19[min] desde que pasó por la estación.

Calcule usted la distancia entre la estación y el lugar donde se produciría el choque si el tren de carga no se desviara. Compare tal distancia obtenida con la indicada en el gráfico adjunto. Este gráfico se ha construido suponiendo rapideces constantes.



- La carretera que une a las ciudades A **y** B tiene 250[km] de largo. Supongamos que al mismo tiempo que parte un automóvil de A hacia B, parte otro de B hacia A; supongamos que los automóviles viajan con rapideces constantes de 60[km/h] y 40[km/h], respectivamente. Hagamos un gráfico para representar la distancia a la ciudad A de cada automóvil en función del tiempo. Determinemos del gráfico el lugar y el instante en que ambos automóviles se cruzan. Resolvamos este problema algebraicamente.

Designemos por:

$t = 0$ el instante en que ambos autos parten de A y B respectivamente.

v_A = 60[km/h] la rapidez del auto que sale de A .

$d_A(t)$ la distancia recorrida en el tiempo t por el auto que sale de A .

v_B = 40[km/h] la rapidez del auto que sale de B .

$d_B(t)$ la distancia a la ciudad A en el tiempo t del auto que sale de B .

Con esta notación tenemos que:

$d_A(0) = 0$ y

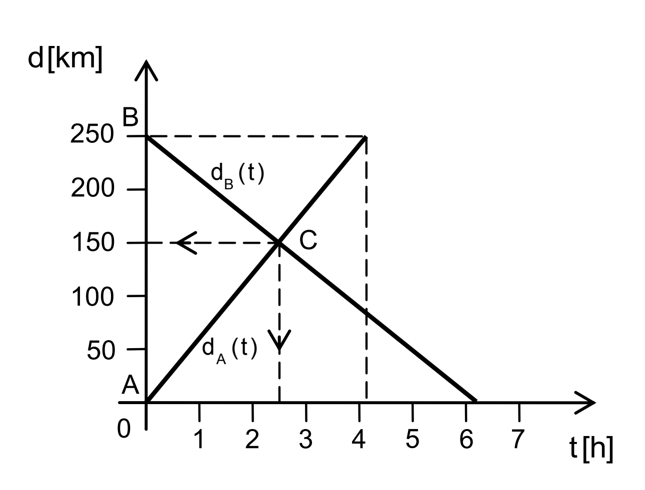
$d_B(0) = 250$ [km]

Como las rapideces son constantes, el tiempo t_{AB} que emplea el auto que sale de A para llegar a B es:

$$t_{AB} = \frac{250[\text{km}]}{60[\text{km/h}]} \simeq 4{,}2[\text{h}]$$

y el tiempo t_{BA} que necesita el auto que sale de B para llegar a A es:

$$t_{BA} = \frac{250[\text{km}]}{40[\text{km/h}]} \simeq 6{,}2[\text{h}]$$



Con tales informaciones construimos el gráfico de la figura adjunta.

Indicamos por C el evento: *ambos autos se cruzan*. Leemos en el gráfico que ellos se cruzan aproximadamente 2,5[h] después de la salida y a 150 [km] de la ciudad A.

Si llamamos t_c al instante en los autos se cruzan, resulta:

$$d_A\left(t_C\right) = v_A \cdot t_C \qquad \text{y} \qquad d_B\left(t_C\right) = 250[\text{km}] - v_B \cdot t_C$$

y como $d_A\left(t_C\right) = d_B\left(t_c\right)$, determinamos:

$$t_C = \frac{250[\text{km}]}{v_A + v_B} = \frac{250[\text{km}]}{100[\text{km/h}]} = 2{,}5[\text{h}]$$

$$d_A\left(t_C\right) = v_A \cdot t_C = 60[\text{km/h}] \cdot 2{,}5[\text{h}] = 150[\text{km}]\ ,$$

valores iguales a los obtenidos gráficamente.

Ejercicios

4-5) Un ciclista recorre cierta distancia en 5[h] 14[min] . Determine el tiempo requerido para que recorra igual distancia con una rapidez media 20% mayor.

4-6) Determine aproximadamente la rapidez media de la Tierra en su movimiento alrededor del Sol. Dé el resultado en [km/h].

4-7) Un corredor completa una carrera de 1[mile] 170[yd] en 4[min] 2[s] . Calcule su rapidez media en [m/s].

4-8) Calcule el tiempo que emplearía un barco para ir de Valparaíso a la Isla de Pascua navegando con una rapidez media de 18[nudo]. Le damos las equivalencias 1[nudo] $\triangleq$ 1[milla náutica/h] y 1[milla náutica] $\triangleq$ 1852[m]; averigüe usted los datos geográficos.

4-9) Un automóvil pasa por las estaciones observadoras **A**, **B**, **C**, **D** y **E** que distan entre sí 60[m], transcurriendo 4,0[s] entre el paso por dos estaciones consecutivas. Represente gráficamente la distancia recorrida y la rapidez en función del tiempo.

4-10) Las rapideces, constantes, de dos vehículos están en la razón 7:5. Si el primero demora 1[h] 24[min] en recorrer una distancia, ¿qué tiempo demorará el segundo en recorrer la misma distancia?

4-11) Considere las dos situaciones siguientes para el movimiento de un objeto:

* se mueve con rapidez constante de 1,4[m/s] durante la primera mitad del tiempo que estuvo en movimiento y durante la otra mitad lo hace con rapidez constante de 0,60[m/s].

** recorre la primera mitad del trayecto con rapidez constante de 1,4[m/s] y la otra mitad con rapidez constante de 0,60[m/s].

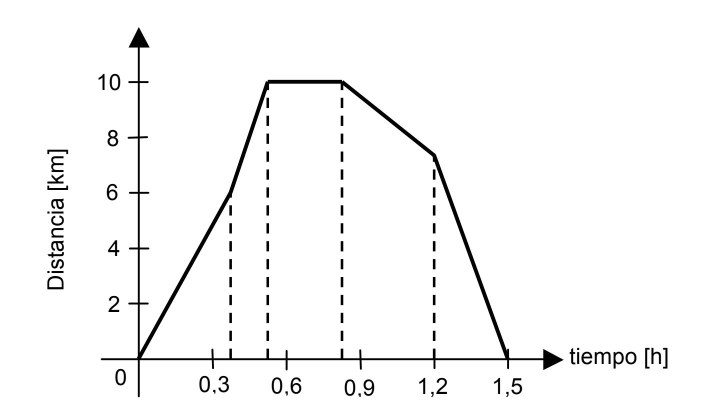
Calcule la rapidez media para cada una de las situaciones. Compare y comente.

4-12) Una liebre puede correr a 80[km/h] y una tortuga a 4,0[m/min] . Se acuerda entre ambas realizar una carrera de 3[km] por una misma ruta. Determine el mayor tiempo que la liebre puede ponerse a dormir en el camino para que lleguen empatadas a la meta.

4-13) En una carrera de autos, que consiste en dar 50 vueltas a un circuito de 20[km] de perímetro, un corredor ha completado 45 vueltas con una rapidez media de 212[km/h]. El cree que ya ha superado el récord para tal carrera, que es 204[km/h], entonces se relaja y en el resto de la carrera baja su rapidez media a 160[km/h] . Determine si la apreciación del corredor es correcta.

4-14) Suponga que un tren recorre cierta distancia con rapidez constante. Si la rapidez aumentara en 6,0[km/h] el tiempo del recorrido disminuiría en 4,0[h] y si la rapidez disminuyera en 6,0[km/h] el tiempo aumentaría en 6,0[h] . Calcule la distancia recorrida por el tren y el valor de la rapidez.

4-15) Un muchacho corre en bicicleta desde su casa hasta la de un amigo, regresando después de estar un tiempo con él. El gráfico “distancia a su casa en función del tiempo” describe lo ocurrido. Represente la rapidez media en función del tiempo.



4-16) En un viaje en automóvil se controló que para intervalos sucesivos de 16[min] , 25[min] y 10[min] las rapideces medias fueron 20[km/h] , 60[km/h] y 30[km/h] respectivamente. Calcule la longitud del viaje durante todo ese tiempo y calcule el tiempo necesario para recorrer los primeros 16[km]. Construya gráficos de distancia recorrida y de rapidez en función del tiempo.

4-17) Desde un centro distribuidor salen 8 camiones con 10[min] de intervalo entre cada uno; ellos deben recorrer 90[km] hasta el lugar de descarga. Suponga que los camiones viajan con rapidez constante de 40[km/h] y construya un gráfico para representar la distancia recorrida por cada camión en función del tiempo (el mismo gráfico para todos los camiones). Una hora después que partió el primer camión sale un automóvil del mismo lugar y por la misma ruta. Suponga que el automóvil viaja con rapidez constante de 60[km/h] y determine, del gráfico, el número de esos camiones que el conductor del automóvil pasa en el camino.

4-18) Dos automóviles que están a una distancia de 39[km] uno del otro, parten al mismo tiempo a encontrarse. El primero recorre 3,0[km] en 5,0[min] y el segundo 2,0[km] en 3,0[min]. Si ambos se mueven con rapidez constante ¿después de cuántos minutos estarán a una distancia de 20[km]? Resuelva el problema algebraicamente y gráficamente.

4-19) De dos lugares que distan 106[km] entre sí, parten dos ciclistas, uno al encuentro del otro, con rapideces constantes que son entre sí como 4:3 y se encuentran 4,0[h] después de partir el primero. ¿Cuántos kilómetros recorrió cada uno, si el segundo parte 1,0[h] después que el primero?

4-20) Un tren recorre 120[km] en cierto tiempo. En otra ocasión recorre la misma distancia en 30[min] menos, por haber aumentado su rapidez en 3,3[m/s] ¿En qué tiempo recorrió la distancia la primera vez?

4-21) Un tren recorre cierta distancia con rapidez constante. Si ésta aumenta en 6,0[km/h], el tiempo empleado para recorrer la distancia disminuye en 4,0[h] . Si la distancia aumenta en 180[km], el tiempo aumenta en 6,0[h] cuando el tren se mueve con la rapidez primera. Calcule la distancia y las dos rapideces.

4-22) Un tío y sus tres sobrinos deciden ir a un cine que está a 9,5[km] de distancia de su casa. A las 18:15 sale el primer sobrino en su bicicleta con una rapidez constante de 18,0[km/h]. A las 18:22 salen los otros dos sobrinos, caminan 300[m] y a las 18:33 toman un auto que los lleva a 60[km/h]. El tío sale a las 18:37 en su automóvil y se dirige al cine con una rapidez media de 80[km/h]. Determine algebraicamente y gráficamente, en qué orden y a qué hora llegan los sobrinos y el tío al cine.

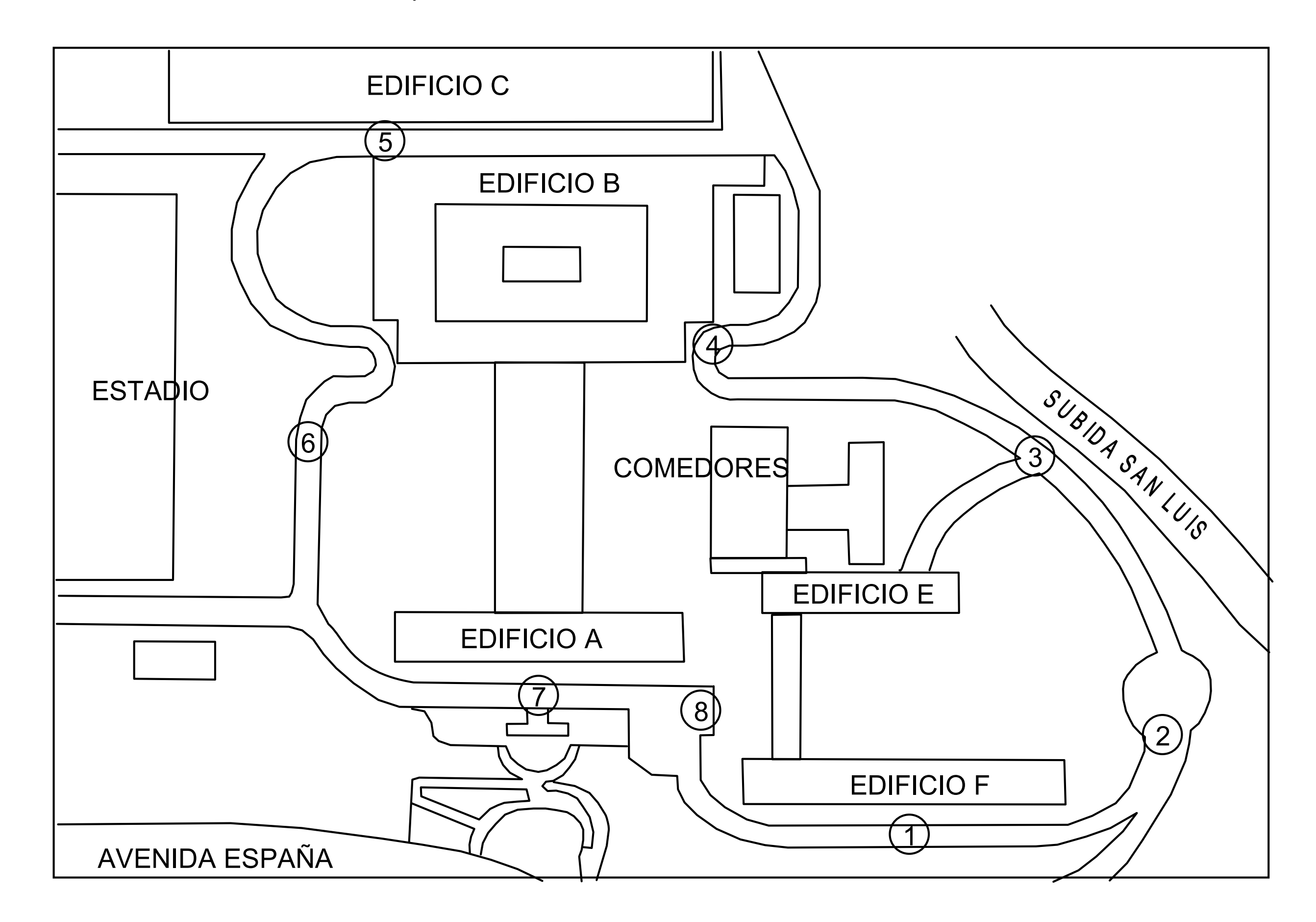
4-23) En una maratón olímpica de 42 kilómetros, a un participante le planifican su carrera de la siguiente forma: los primeros 20[km] con rapidez constante de 6,0[km/h], los siguientes 10[km] con rapidez de 7,0[km/h], los siguientes 8,0[km] a 7,5[km/h] para finalizar a 8,5[km/h]. Sin embargo, al comienzo es apurado por un contrincante, haciendo los primeros 20[km] en 2[h] 50[min], por ello, al llegar al último tramo está cansado, logrando sólo una rapidez media de 8,0[km/h]. Calcule la diferencia entre el tiempo empleado y el tiempo previsto.

4-24) Don J. sale de su casa a pie a las 8:00 horas a su trabajo y camina con rapidez constante de 0,50[m/s]; 7[min] después su esposa se percata que él ha olvidado su portadocumentos y envía a su hijo a alcanzarlo, con instrucción de entregárselo antes de las 8:35, en el camino a la oficina. El muchacho sale trotando con rapidez de 0,60[m/s] y en 8[min] lo avista y entonces se detiene por 7[min] frente a un escaparate de juguetes. ¿Con qué rapidez media debe moverse a continuación para alcanzar a su padre a tiempo?

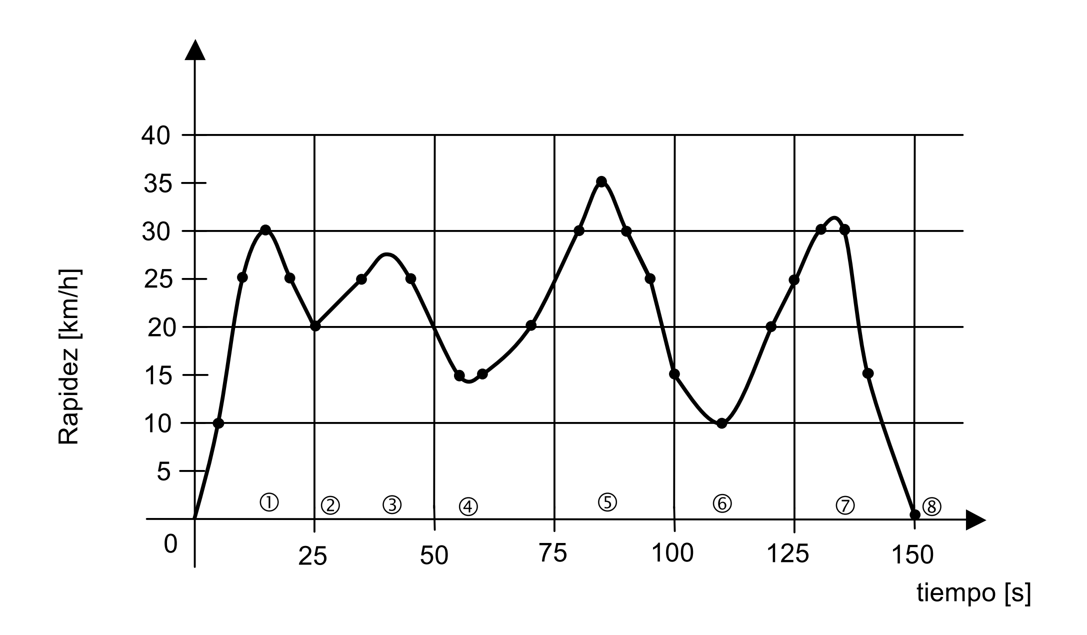
4-25) Dos caracoles situados a 1,44[m] de distancia se acercan uno al otro en línea recta, cada uno con rapidez media de 36[mm/min] . Una hormiga se mueve entre ellos, sucesivamente del uno hacia el otro, con rapidez media de 36[cm/min]. Calcule la distancia recorrida por la hormiga hasta que los caracoles se juntan

Aceleración media para un objeto en movimiento

Un domingo en la mañana hicimos un “tour automovilístico” por el interior de nuestra U.S.M., el recorrido se lo indicamos en el plano.



Fuimos preparados para hacer mediciones mientras recorríamos la universidad. Medimos el tiempo con un cronómetro y los valores de la rapidez los observamos directamente en el “velocímetro” del automóvil. Pusimos a marchar el cronómetro al partir el automóvil (t = 0[s]) y, a intervalos de 5[s] o de 10[s], anotamos la rapidez correspondiente. Aproximamos los valores de rapidez a múltiplos de 5[km/h], ya que no podíamos pretender mejor precisión con el instrumento usado. Los resultados obtenidos los representamos en un gráfico de “rapidez en función del tiempo”.



Las curvas en este gráfico **no son** las curvas del camino seguido. El auto pasó las posiciones indicadas por círculos numerados en el plano en los tiempos correspondientemente numerados en este gráfico.

Partimos desde el estacionamiento frente al edificio Miramar (edificio F) y viajamos aumentando la rapidez hasta llegar cerca de la subida San Luis, donde la disminuimos antes de tomar la curva; continuamos el viaje aumentando o disminuyendo la rapidez del automóvil, acelerando, según las características de la ruta. El mayor valor de la rapidez se alcanzó en el tramo recto entre el edificio de Laboratorios (edificio B) y el de Talleres (edificio C) y el menor en el tramo adyacente al estadio, debido a las curvas muy cerradas que presenta el camino en tal sector.

Después de la descripción cualitativa del viaje, examinemos lo sucedido durante un intervalo particular de tiempo:

Entre los instantes 5[s] y 10[s] determinamos del gráfico que la rapidez aumentó de 10[km/h] a 25[km/h]; hubo un incremento en la rapidez de 15[km/h] durante 5[s] o el "**cambio de rapidez** fue de 3[km/h] durante 1[s]"; acostumbramos a dar esta información diciendo: la **aceleración media** fue de $3[\text{km}/\text{h}\cdot\text{s}]$.

En forma simbólica escribimos:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(25 - 10)\,[\text{km/h}]}{(10 - 5)\,[\text{s}]} = \frac{15\,[\text{km/h}]}{5\,[\text{s}]} \triangleq$$

$$\triangleq 3\left[\frac{\text{km/h}}{\text{s}}\right] \triangleq 3[\text{km/h} \cdot \text{s}] \triangleq$$

$$\triangleq 3/3600\,[\text{km/s}^2] \simeq 0{,}0008[\text{km/s}^2] \triangleq 0{,}8[\text{m/s}^2]$$

Procediendo en forma análoga podemos calcular aceleraciones medias para otros tiempos durante el viaje. Por ejemplo:

- Para t = 35[s] y para t = 45[s] la rapidez tuvo el mismo valor 25[km/h]; en consecuencia, la aceleración media para tal intervalo de tiempo es:

$$\bar{a} = \frac{(25 - 25)\,[\text{km/h}]}{(45 - 35)\,[\text{s}]} = 0\ [\text{km/h} \cdot \text{s}]$$

- Más tarde, cuando t = 90[s] se midió la rapidez v_{90} = 30[km/h] y cuando t = 95[s] se midió v_{95} = 25[km/h] ; entonces:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(25 - 30)\,[\text{km/h}]}{(95 - 90)\,[\text{s}]} = \frac{-5\ [\text{km/h}]}{5\ [\text{s}]} = -1\ [\text{km/h} \cdot \text{s}]\ ;$$

en casos como éste, en que la aceleración tiene un valor **negativo**, podemos hablar de **desaceleración** o de **retardación.**

Dejamos para Ud. la tarea de calcular “aceleraciones medias” para sucesivos intervalos de 5[s] de duración, desde el comienzo hasta el final del viaje. Represente los valores de aceleración media que ha obtenido en función del tiempo.

En síntesis, para caracterizar la **variación de la rapidez** durante el transcurso del tiempo introdujimos el concepto de **aceleración**. Procediendo en forma análoga a lo hecho al presentar el concepto de rapidez media, definimos:

$$\text{aceleración media} = \frac{\text{cambio de rapidez durante un intervalo de tiempo}}{\text{duración de tal intervalo de tiempo}}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

De esta definición resulta la relación dimensional:

$$\text{dim(aceleración)} = \frac{\text{dim(rapidez)}}{\text{dim(tiempo)}} = \frac{\mathcal{L} \cdot \tau^{-1}}{\tau} = \mathcal{L} \cdot \tau^{-2}$$

y también el uso adecuado de las unidades de medición:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{p\ [\text{unidad de rapidez}]}{q\ [\text{unidad de tiempo}]} = \frac{p \left[\dfrac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo})} \right]}{q\ [\text{unidad de tiempo}]} =$$

$$= \frac{p}{q} \left[\frac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo}) \bullet (\text{unidad de tiempo})} \right]$$

y, como es bastante usual, al elegir la **misma** "unidad de tiempo" en el cálculo de la aceleración que la usada en la rapidez, resulta:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{p}{q}\left[\frac{\text{unidad de longitud}}{(\text{unidad de tiempo})^2}\right]$$

- Un bus, inicialmente detenido, demora 25 [s] para alcanzar la rapidez de 50 [km/h].
  El procedimiento para determinar la aceleración es:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{50\,[\text{km/h}] - 0}{25\,[\text{s}]}$$

$$\bar{a} = \frac{50}{25}\left[\frac{\text{km}}{\text{h}\cdot\text{s}}\right]$$

$$\bar{a} = 2\left[\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}\cdot\text{s}}\right]$$

$$\bar{a} = \frac{20}{36}\,[\text{m/s}^2] = \frac{5}{9}\,[\text{m/s}^2] \simeq 0{,}6\,[\text{m/s}^2]$$

- Un automóvil aumenta su rapidez de 20[mile/h] a 55[mile/h] en 1/2[min]
  El valor de la aceleración media la obtenemos directamente de la definición:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(55 - 20)\,[\text{mile/h}]}{0{,}50\,[\text{min}]} = \frac{35}{0{,}50}\left[\frac{\text{mile}}{\text{h}\cdot\text{min}}\right]$$

$$= \frac{35\cdot 1\,[\text{mile/h}]}{0{,}50\cdot 1\,[\text{h}]\cdot 1\,[\text{min}]} \triangleq \frac{35\cdot 1609\,[\text{m}]}{0{,}50\cdot 3600\,[\text{s}]\cdot 60\,[\text{s}]}$$

$$= \frac{35\cdot 1609}{0{,}50\cdot 3600\cdot 60}\,[\text{m/s}^2] \simeq 0{,}52\,[\text{m/s}^2]$$

Aceleración: órdenes de magnitud

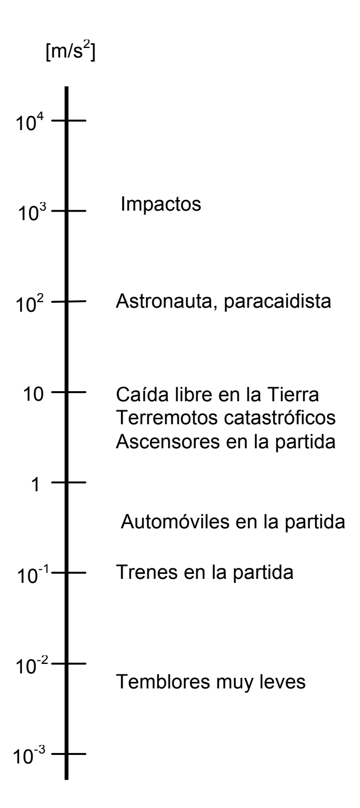
Estamos convencidos que usted ha leído o escuchado que "*en un cierto lugar todos los cuerpos caen en el vacío con la misma aceleración*". El valor de esta aceleración, aunque distinta para diferentes lugares, tiene en la Tierra el orden de magnitud 10[m/s^2] ($g \sim 10$[m/s^2]).

Valores típicos de la aceleración de partida de ciertos vehículos son: 0,1[m/s^2] para trenes; 0,6[m/s^2] para automóviles; 2[m/s^2] para ascensores. Un astronauta está sometido a una aceleración del orden de 10^2[m/s^2] ($\sim 10g$) en los primeros minutos de su alejamiento de la Tierra. Al abrirse un paracaídas se experimentan desaceleraciones del orden de 10^2[m/s^2].

La caída de un individuo, de 1,80[m] de estatura, sobre su occipital puede producir un impacto de unos 3[ms] de duración, originando desaceleraciones del orden de 10^3[m/s^2], lo que provocaría fractura. En general, impactos con desaceleraciones mayores que $100 \cdot g$ ($\sim 10^3$ [m/s^2]) pueden producir fracturas de huesos; tales valores son posibles en colisiones de automóviles, por ejemplo si uno viaja a 60[km/h] y es detenido en 4[ms].

Aceleraciones producidas por actividad sísmica están en el rango de $5 \cdot 10^{-3} \left[m/s^2 \right]$ para temblores muy leves y hasta 5[m/s^2] para terremotos catastróficos.

ACELERACIONES DE



Ejercicios

4-26) El valor de la aceleración media de un objeto se da en la forma 143[(mile/h)/min]. Interprete esta aceleración y exprésela en [m/s^2].

4-27) Un burrito trotando se cansa y baja su rapidez de 14[km/h] a 9[km/h] en 8[min]. Calcule su aceleración media, en [ft/s^2], durante ese tiempo.

4-28) La tabla adjunta muestra los valores de la rapidez instantánea de un automóvil en función del tiempo. Haga gráficos de la rapidez instantánea y de la aceleración media en función del tiempo.

Aproximadamente:

¿Cuál es la rapidez para t = 2,5[s] ?

¿Cuál es el máximo valor de la aceleración media?

tiempo [s]	**rapidez [m/s]**
0,0	0,0
1,0	6,3
2,0	11,6
3,0	16,5
4,0	20,5
5,0	24,1
6,0	27,3
7,0	29,5
8,0	31,3
9,0	33,1
10,0	34,9

CAPÍTULO V

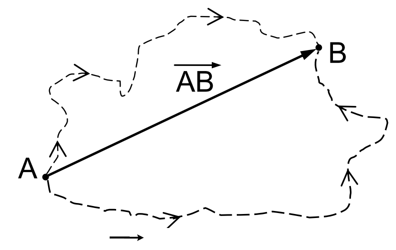
DESPLAZAMIENTO VECTORES



Hemos indicado que un cuerpo se mueve cuando cambia de posición en el espacio.

Es muy importante en Física saber medir ese cambio de posición, introduciendo el concepto de **desplazamiento**. Este concepto debe contener e indicar no sólo la magnitud del cambio de posición, sino además, la dirección en que se ha efectuado el cambio.

Si un cuerpo se ha movido de la posición A a la posición B, no importando qué trayectoria haya seguido, definimos como desplazamiento de este cuerpo al **trazo dirigido** que va desde la posición A a la final B.



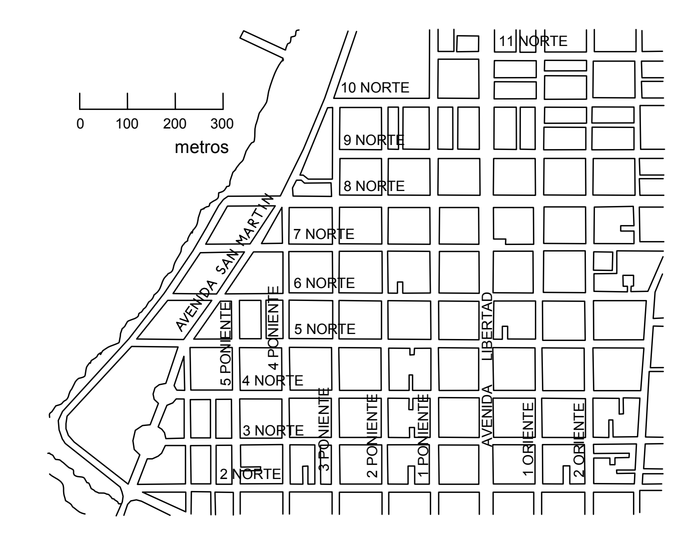
El desplazamiento de A a B, que podemos simbolizar por $\overrightarrow{AB}$, es uno de los ejemplos del ente matemático que indica magnitud y dirección, llamado **vector**.

- Supongamos que un turista camina a lo largo de 2 Norte desde 4 Poniente hasta 2 Oriente. El desplazamiento correspondiente lo representamos por el vector:

$\overrightarrow{PO}$

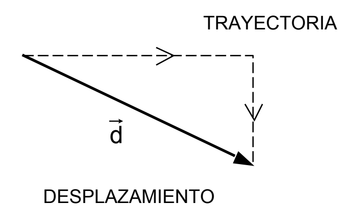


cuya magnitud, de acuerdo a la escala del plano, es aproximadamente 650[m].

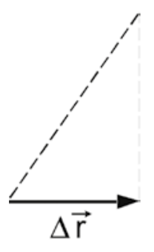


- Otra persona parte de la intersección entre 3 Poniente y 4 Norte, anda por 4 Norte hasta 1 Oriente, luego dobla y “baja” por 1 Oriente hasta la 2 Norte.

El desplazamiento de esta persona, de aproximadamente 470[m] de magnitud, está indicado por el vector $\vec{d}$:



- Desde la esquina de 5 Norte con San Martín, un peatón se dirige por San Martín hasta 8 Norte y en seguida regresa por 4 Poniente hasta 5 Norte. Su desplazamiento corresponde al vector $\Delta\vec{r}$ de la figura. La magnitud de este vector es aproximadamente 200[m].



Ejemplo

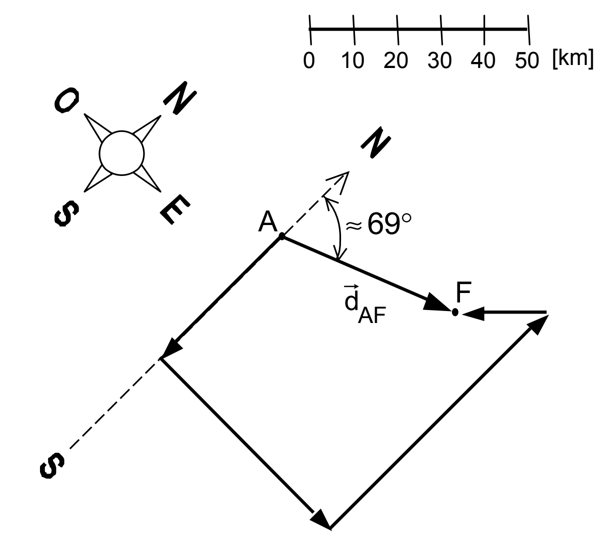
Representemos, a escala, la siguiente trayectoria de un móvil que partiendo de un punto **A** viaja: 40[km] al S, luego 55[km] al E, 70[km] al N y finalmente 20[km] al SO. Determinemos la distancia recorrida y la magnitud y dirección del desplazamiento en este movimiento.

Elegimos como sistema de referencia el punto inicial A y la dirección Sur – Norte, y con una escala adecuada dibujamos los sucesivos desplazamientos.

La distancia recorrida a lo largo de la trayectoria, es:

$$(40 + 55 + 70 + 20)[km] = 185[km]$$

La magnitud del desplazamiento total en este movimiento es igual a la magnitud del vector $\vec{d}_{AF}$ dibujado entre la posición inicial **A** y la final **F**. Su valor es de 44[km], aproximadamente.



La dirección del desplazamiento la podemos expresar mediante el ángulo formado por el correspondiente trazo dirigido y una dirección de referencia. En este caso el ángulo formado por el vector $\vec{d}_{AF}$ y la dirección Sur-Norte es aproximadamente 69°.

Fíjese que al representar la información sobre el movimiento, hemos indicado no sólo las magnitudes de los sucesivos desplazamientos, sino también sus direcciones, sin las cuales no podríamos determinar la trayectoria descrita por el móvil. Similarmente, el desplazamiento resultante queda determinado sin ambigüedad al indicar su magnitud y su dirección.

Ejercicios

5-1) Determine el menor valor de la longitud de la trayectoria y la magnitud del vector desplazamiento para ir desde la intersección de 6 Norte con San Martín, hasta la intersección de 8 Norte con 2 Oriente.

5-2) Un niño en su bicicleta efectúa una circunvalación a una manzana de su ciudad, regresando al mismo punto de partida. Determine la magnitud del desplazamiento.

5-3) Un jugador de fútbol entrenando trota $40[m]$ a lo largo de la orilla de la cancha y después de girar en 30° hacia la cancha, trota $20[m]$ más. Represente, a escala, la trayectoria y el desplazamiento del jugador. Determine la magnitud del desplazamiento y su dirección respecto a la orilla de la cancha.

5-4) Suponga que la Tierra describe una circunferencia alrededor del Sol a una distancia de 150 millones de kilómetros. Represente a escala la trayectoria y el desplazamiento de la Tierra cuando da un cuarto de vuelta. Escoja un sistema de referencia adecuado. Determine la magnitud del desplazamiento de la Tierra.

5-5) Un futbolista chutea un tiro libre desde una distancia de 30 metros del arquero, que está en el centro del arco. La pelota entra justo rozando el vertical y el horizontal del arco. Consígase las dimensiones del arco. Haga un diagrama de la escena, situando al futbolista en la forma que usted estime conveniente. Determine la magnitud del desplazamiento de la pelota. Piense si cambiando la posición del futbolista, manteniendo los 30 metros, varía la magnitud del desplazamiento de la pelota.

Vocabulario: escalares

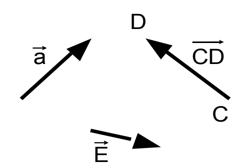
En el estudio de la Física encontramos cantidades como tiempo, masa, carga eléctrica, temperatura, energía, etc., que quedan completamente expresadas por un número real y una unidad de medición correspondiente. Al trabajar, en el contexto de la Física clásica no relativista, con las magnitudes de este tipo de cantidades físicas, usamos el álgebra de los números reales, lo que está de acuerdo con los experimentos. Dichas cantidades son cantidades **escalares**.

También en Física encontramos otras cantidades que sólo quedan determinadas cuando se conoce, además de su magnitud, su dirección, y que obedecen reglas algebraicas propias. Al igual que el desplazamiento, la velocidad, aceleración, fuerza, torque, intensidad de campo eléctrico, etc., gozan de las propiedades de los **vectores**.

Vectores: representación y notación

Representamos a los vectores por trazos dirigidos.

Simbolizamos a los vectores por una expresión literal con una flecha encima, por ejemplo: $\vec{a}$, $\vec{E}$, $\overrightarrow{CD}$.



En el vector $\overrightarrow{CD}$ el orden de las letras indica el punto inicial y el final, respectivamente.

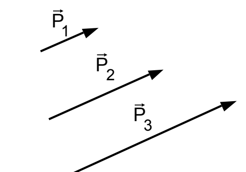
La magnitud, norma o módulo de un vector la expresamos encerrando su símbolo entre "doble barras" o quitando la flecha a la expresión literal correspondiente. Por ejemplo:

la magnitud de $\vec{a}$ la escribimos: $\|\vec{a}\| = a$

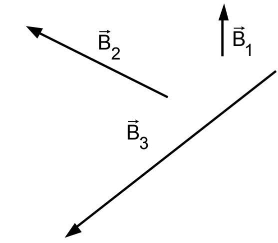
la magnitud de $\overrightarrow{CD}$ la escribimos: $\|\overrightarrow{CD}\| = \overline{CD}$

Al representar vectores a escala, la longitud de los trazos empleados la haremos proporcional a sus magnitudes. Por ejemplo:

$$P_1 = \|\vec{P}_1\| = 10$$
$$P_2 = \|\vec{P}_2\| = 20$$
$$P_3 = \|\vec{P}_3\| = 30$$



$$B_1 = \|\vec{B}_1\| = 1{,}4$$
$$B_2 = \|\vec{B}_2\| = 4{,}2$$
$$B_3 = \|\vec{B}_3\| = 7{,}0$$



Vector cero o vector nulo

Un vector cuya magnitud es cero se denomina vector cero. Lo simbolizamos por $\vec{0}$ o simplemente 0. Convenimos que el vector $\vec{0}$ tiene cualquier dirección.

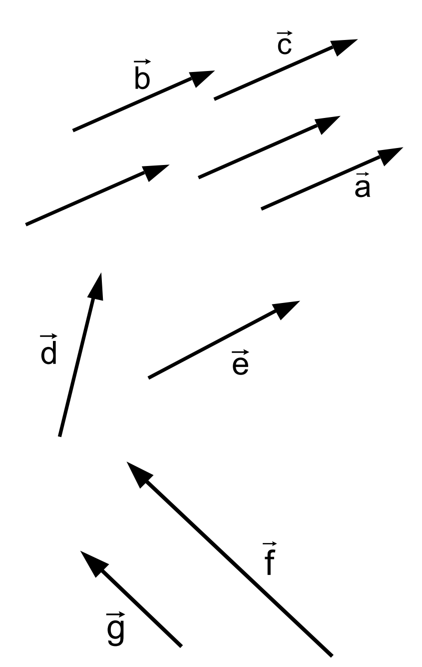
La magnitud de todo vector no nulo es, por definición, un número positivo.

Vectores iguales

Dos vectores que tienen la misma magnitud y la misma dirección son iguales.

La igualdad de vectores es, por convenio, independiente de sus posiciones. Por ejemplo, en la figura tenemos que:

$\vec{a} = \vec{b} = \vec{c} = \cdots$



Aunque dos vectores tengan igual magnitud, ellos pueden ser diferentes. En la figura se muestra que:

$$\|\vec{d}\| = \|\vec{e}\| \quad , \quad \vec{d} \neq \vec{e}$$

y también, aunque:

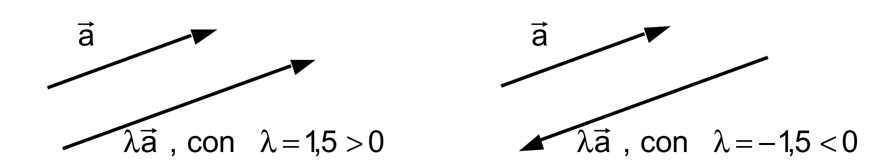
"dirección de $\vec{f}$" = "dirección de $\vec{g}$" , $\vec{f} \neq \vec{g}$.

Multiplicación de un vector por un escalar

Al multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar λ resulta otro vector $\lambda\vec{a}$ cuya magnitud es $|\lambda|$ veces la magnitud de $\vec{a}$:

$$\|\lambda\vec{a}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{a}\|$$

y cuya dirección es igual a la dirección de $\vec{a}$ si $\lambda > 0$, y opuesta a la de $\vec{a}$ si $\lambda < 0$.



También se suele decir que el vector que resulta al multiplicar un vector $\vec{a}$ por un escalar λ negativo ($\lambda < 0$) tiene "igual dirección y sentido contrario" que el vector. La frase entre comillas es equivalente a "dirección opuesta". Nos sentiremos libres de usar cualquiera de estos convenios, siempre que no se presenten ambigüedades de interpretación.

- Dos vectores paralelos $\vec{a}$ y $\vec{b}$, no nulos, son proporcionales. Esto lo escribimos:

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} \quad \text{o} \quad \vec{b} = \beta\vec{a} \qquad (\beta = 1/\alpha)$$

- Tenemos las siguientes relaciones entre el "escalar cero" y el "vector cero":

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \quad , \quad \text{para todo vector } \vec{a}$$

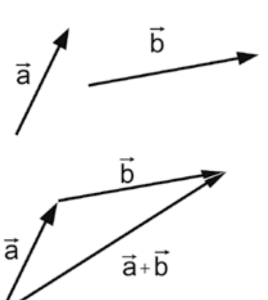
$$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad , \quad \text{para todo escalar } \lambda$$

con lo cual, si $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0}$, entonces $\lambda = 0$ o $\vec{u} = \vec{0}$, o ambos.

Adición de vectores

La suma vectorial $\vec{a} + \vec{b}$ es por definición un vector cuyo punto inicial es el inicial de $\vec{a}$ y cuyo punto final es el final de $\vec{b}$, colocados como se muestra en la figura.

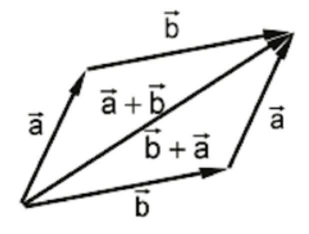
Este método de realizar la adición de vectores es conocido como "regla del triángulo".



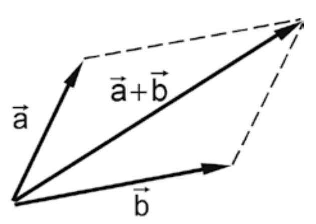
- De la figura adjunta se infiere que:

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

es decir, la adición de vectores es conmutativa.



Otro método para realizar la suma de dos vectores es conocido como la "regla del paralelogramo". Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores. Para sumar los vectores se dibujan con su inicio en común. Luego se traza, por el extremo de cada uno, una paralela al otro. La suma $\vec{a} + \vec{b}$ es la diagonal correspondiente al vértice con el inicio de los vectores.

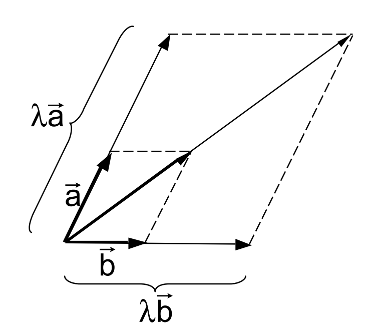


Analice este método para comprobar que es coherente con la definición inicial de la suma de vectores. Ambos métodos serán usados en los futuros desarrollos.

- La multiplicación por un escalar es distributiva con respecto a la adición de vectores. Es decir:

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$$

cuya demostración se realiza aplicando en la figura adjunta los teoremas de proporcionalidad de trazos en figuras semejantes.



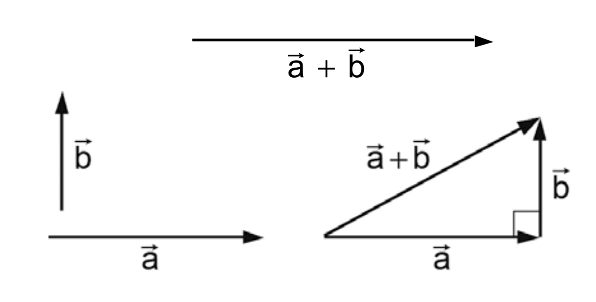
Magnitud de la suma $\vec{a} + \vec{b}$

* Si ambos vectores tienen **igual dirección** se cumple que:

$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|$$

- Si los dos vectores son perpendiculares podemos aplicar el Teorema de Pitágoras y obtenemos:

$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \sqrt{\left\|\vec{a}\right\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2}$$



- Si los vectores tienen **direcciones opuestas** resulta:

$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| - \left\|\vec{b}\right\| \quad \text{si} \quad \left\|\vec{a}\right\| > \left\|\vec{b}\right\|$$

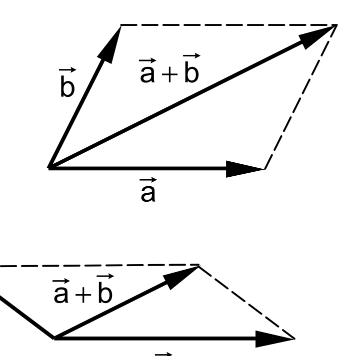
y cuando $\left\|\vec{a}\right\| \leq \left\|\vec{b}\right\|$ se cumple

$$\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \left\|\vec{b}\right\| - \left\|\vec{a}\right\|$$

lo que equivale a decir que: $\left\|\vec{a} + \vec{b}\right\| = \left|\,\left\|\vec{a}\right\| - \left\|\vec{b}\right\|\,\right|$

En general, la magnitud de la suma $\vec{a}+\vec{b}$ depende de las direcciones relativas de $\vec{a}$ y de $\vec{b}$, cumpliéndose que:

$$\left|\,\|\vec{a}\| - \|\vec{b}\|\,\right| \;\leq\; \|\vec{a}+\vec{b}\| \;\leq\; \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$



Resta de dos vectores

Se llama **aditivo inverso** del vector $\vec{b}$ al vector $-\vec{b}$ que tiene la misma magnitud que $\vec{b}$ y la dirección opuesta. Tal vector resulta de multiplicar $\vec{b}$ por el escalar -1:

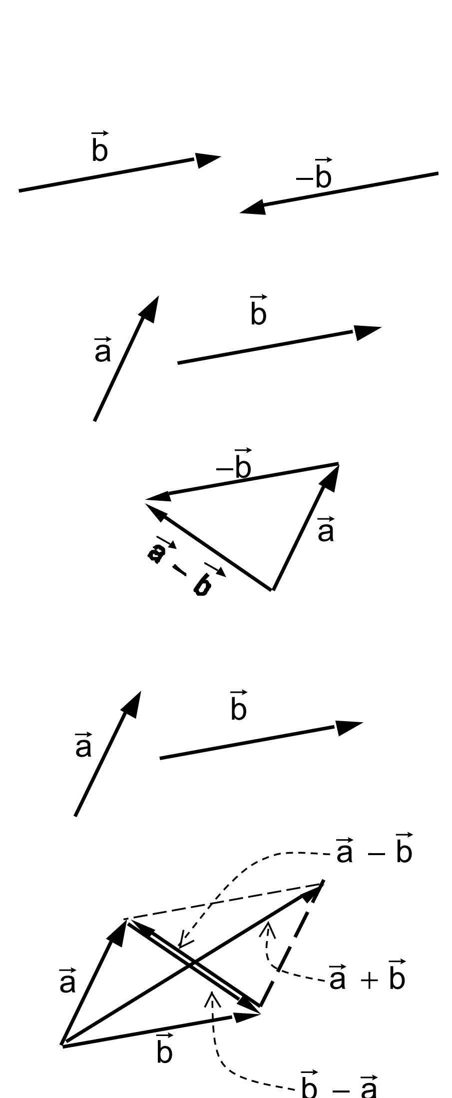
$$(-1)\cdot\vec{b} \;=\; -\vec{b}$$

Para efectuar la resta $\vec{a}-\vec{b}$ se suma vectorialmente al vector $\vec{a}$ el aditivo inverso del vector $\vec{b}$, es decir:

$$\vec{a}-\vec{b} \;=\; \vec{a}+(-\vec{b})$$

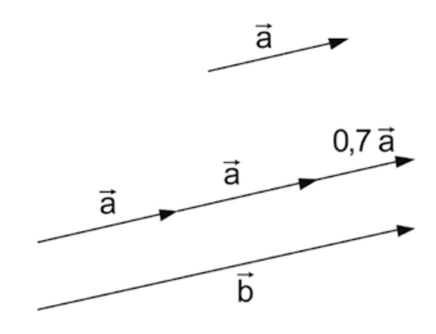
como se ilustra en la figura adjunta.

Observe que, si se ubican los vectores con su origen en común y se construye el paralelogramo, una de sus diagonales representa el vector $\vec{a}+\vec{b}$, y la otra, la diferencia $\vec{a}-\vec{b}$ o $\vec{b}-\vec{a}$. En este último caso, la dirección del vector diferencia va hacia el vector "minuendo", es decir, el que está en el inicio de la resta.



Ejemplos sobre operaciones con vectores

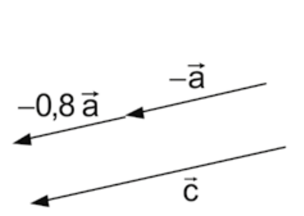
- Dado el vector $\vec{a}$ indicado en la figura, construyamos los vectores $\vec{b} = 2{,}7\vec{a}$ y $\vec{c} = -1{,}8\vec{a}$.



Para resolver este ejercicio recordamos que el vector $\vec{b}$ es paralelo (igual dirección) al vector $\vec{a}$ y su magnitud (módulo, norma) es 2,7 veces mayor:

$$b = \left\|\vec{b}\right\| = \left\|2{,}7\vec{a}\right\| = 2{,}7\left\|\vec{a}\right\| = 2{,}7a$$

El vector $\vec{c}$ tiene dirección contraria a la del vector $\vec{a}$ y su módulo es 1,8 veces el módulo de $\vec{a}$.



$$c = \left\|\vec{c}\right\| = \left\|-1{,}8\vec{a}\right\| = \\ = \left|-1{,}8\right| \cdot \left\|\vec{a}\right\| = 1{,}8a$$

Note que a, siendo el módulo del vector $\vec{a}$, es positivo $(a > 0)$ por tanto:

$$b = 2{,}7a > 0 \qquad \text{y} \qquad c = 1{,}8a > 0$$

- Sea $\vec{d}$ un vector dado. Determinamos el vector $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ donde $\vec{u} = 2{,}3\vec{d} + 0{,}8\vec{d}$ y $\vec{v} = 3{,}4\vec{d} - 1{,}9\vec{d}$

Los valores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ en función de $\vec{d}$ son:

$$\vec{u} = 2{,}3\vec{d} + 0{,}8\vec{d} = (2{,}3 + 0{,}8)\vec{d} = 3{,}1\vec{d}$$

$$\vec{v} = 3{,}4\vec{d} - 1{,}9\vec{d} = (3{,}4 - 1{,}9)\vec{d} = 1{,}5\vec{d}$$

con lo cual:

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = 1{,}5\vec{d} - 3{,}1\vec{d} = -1{,}6\vec{d}$$

Una forma más directa de hacer tal diferencia es:

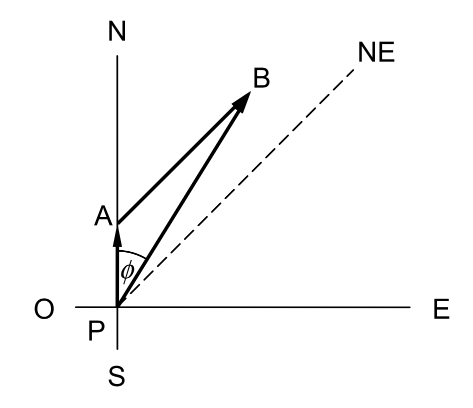
$$\vec{w} = \left(3{,}4\vec{d} - 1{,}9\vec{d}\right) - \left(2{,}3\vec{d} + 0{,}8\vec{d}\right) \\ = (3{,}4 - 1{,}9 - 2{,}3 - 0{,}8)\vec{d} = \\ = -1{,}6\vec{d}$$

- Un barco parte de un puerto y recorre 120 [km] hacia el Norte y luego 270[km] hacia el Noreste. Determinemos su ubicación final respecto al punto de partida.

El recorrido del barco lo representamos, a escala, en la figura adjunta, donde **P** indica el puerto de partida, **A** el punto donde gira al NE y **B** la posición alcanzada.

Entonces, los sucesivos desplazamiento están dados por los vectores $\overrightarrow{PA}$ y $\overrightarrow{AB}$, de módulos:

$a = \overline{PA} = 120[km]$ y $b = \overline{AB} = 270[km]$



La ubicación final del barco está determinada por el vector $\overrightarrow{PB}$:

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}$

Por tanto, la magnitud del desplazamiento total es $d = \left\|\overrightarrow{PB}\right\| \simeq 365[km]$ y su dirección está dada por el ángulo $\simeq 32°$, respecto a la dirección Sur a Norte.

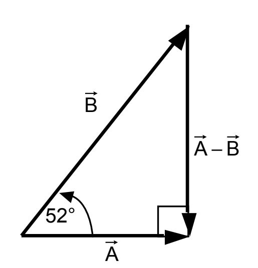
Es decir, el barco está a 365[km] del puerto en dirección de 32° al Este del Norte.

- Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre sí un ángulo de 52°; el módulo de $\vec{A}$ vale 3,2[mm]. ¿Cuál debe ser el módulo de $\vec{B}$ para que el vector $\vec{A} - \vec{B}$ sea perpendicular a $\vec{A}$?

Para resolver gráficamente este problema:

Dibujamos a escala el vector $\vec{A}$.

En el inicio de $\vec{A}$ copiamos el ángulo de 52°.



Levantamos una perpendicular al vector $\vec{A}$ en su punto final.

La intersección de la perpendicular con el lado libre del ángulo nos determina el punto final del vector $\vec{B}$.

Tomando en cuenta la escala usada, el módulo del vector $\vec{B}$ resulta ser aproximadamente igual a 5,2 [mm].

- Demostremos que si $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son dos vectores no nulos y no paralelos, cualquier vector en el plano determinado por ellos puede ser expresado en la forma $\lambda\,\overrightarrow{OA}+\mu\,\overrightarrow{OB}$ siendo λ y μ dos escalares adecuados.

Los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ nos determinan un plano.

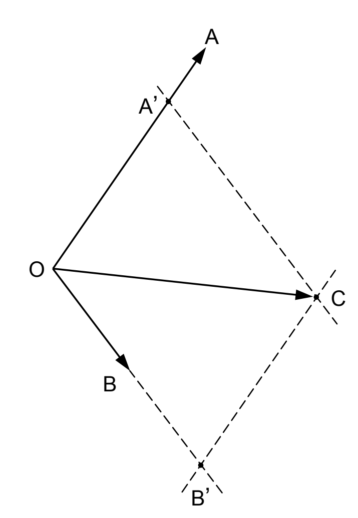
Escogemos un punto C arbitrario de ese plano.

Por C trazamos paralelas a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ determinando los puntos B' y A'

Entonces: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}$

pero como: $\overrightarrow{OA'}=\lambda\,\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB'}=\mu\,\overrightarrow{OB}$

resulta: $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\,\overrightarrow{OB}$



Habiendo escogido un punto C de modo arbitrario, hemos probado que cualquier vector coplanar con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ puede ser expresado en la forma $\lambda\,\overrightarrow{OA}+\mu\,\overrightarrow{OB}$.

- Sean $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ y $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ tres vectores dados con un punto común O, arbitrario. Si los puntos A, B y C son colineales se cumple que $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ con $\lambda+\mu=1$.

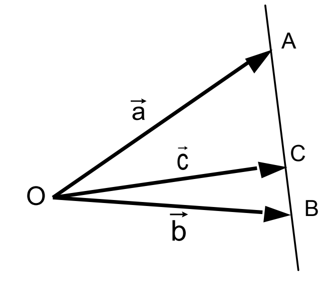
De la figura podemos escribir que:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$$

Pero $\overrightarrow{AC}=\mu\,\overrightarrow{AB}$ por ser A, B y C colineales.

por tanto $\vec{c}-\vec{a}=\mu\left(\vec{b}-\vec{a}\right)$,

de donde $\vec{c}=\mu\vec{b}+\left(1-\mu\right)\vec{a}$



Haciendo $\lambda=1-\mu$ tenemos que: $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ con $\lambda+\mu=1$, relación que buscábamos demostrar.

Además, en este caso las longitudes de los trazos AC y CB están en la razón μ/λ. Una demostración es la siguiente:

Como $\overrightarrow{AC}=\mu\overrightarrow{AB}$, la longitud del trazo AC es:

$$\overline{AC} = \left\| \overrightarrow{AC} \right\| = \mu \left\| \overrightarrow{AB} \right\| = \mu \, \overline{AB}$$

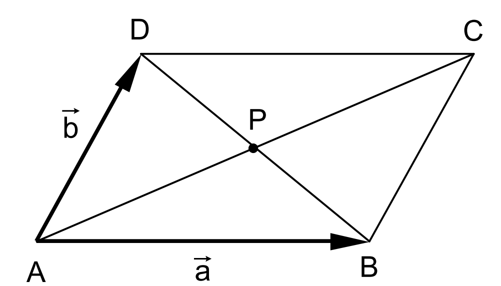
y la longitud del trazo CB es:

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = \left(1 - \mu\right) \overline{AB} = \lambda \, \overline{AB}$$

es decir $\overline{AC} : \overline{CB} = \mu : \lambda$

- Demostremos que en un paralelogramo las diagonales se dimidian.

Sean $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$



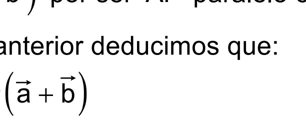
Sea P el punto de intersección de las diagonales.

Ya que los puntos finales de $\vec{a}$, $\overrightarrow{AP}$ y $\vec{b}$ son colineales.

$\overrightarrow{AP} = \lambda \, \vec{a} + \mu \, \vec{b}$ con $\lambda + \mu = 1$

Por otra parte

$\overrightarrow{AP} = \nu\left(\vec{a} + \vec{b} \right)$ por ser $\overrightarrow{AP}$ paralelo con $\overrightarrow{AC}$.



De lo anterior deducimos que:

$\lambda \, \vec{a} + \mu \, \vec{b} = \nu\left(\vec{a} + \vec{b} \right)$

Es decir : $\left(\lambda - \nu\right) \vec{a} = \left(\nu - \mu\right) \vec{b}$.

Sabiendo que la igualdad $\alpha \, \vec{p} = \beta \, \vec{q}$ con $\vec{p}$ y $\vec{q}$ vectores no paralelos y no nulos, sólo se cumple si $\alpha = \beta = 0$, tenemos que:

$$\lambda - \nu = 0 \quad \text{y} \quad \nu - \mu = 0$$

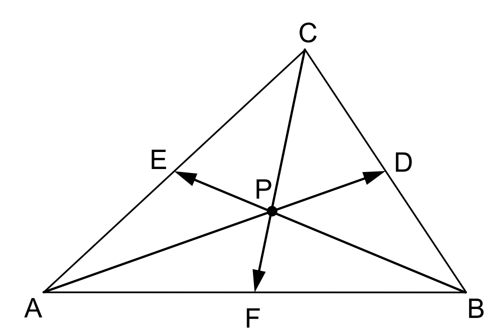
Como además $\lambda + \mu = 1$, según condición anterior, resulta:

$$\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$$

Por tanto, P es punto medio de AC y BD.

- Demostremos que las transversales de gravedad de un triángulo son concurrentes y se cortan en la razón 2:1 a partir del vértice.

Sean D y F puntos medios de dos lados del triángulo.



Hagamos $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$

De acuerdo al resultado del problema anterior.

Se cumple de $\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ y que $\overrightarrow{AF} = \vec{c}/2$

Sea P el punto de intersección de las transversales de gravedad con vértices en A y C. Entonces:

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\, \vec{d} = \frac{\lambda}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

Como los puntos C, P y F son colineales, podemos escribir:

$\overrightarrow{AP} = \nu\vec{b} + \mu\frac{\vec{c}}{2}$ siendo $\nu + \mu = 1$

y por consiguiente:

$$\frac{\lambda}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \nu\,\vec{b} + \frac{\mu}{2}\vec{c}$$

$$\left(\frac{\lambda}{2} - \nu\right)\vec{b} = \left(\frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2}\right)\vec{c}$$

Además, dado que $\vec{b}$ y $\vec{c}$ **no** son paralelos se cumple:

$$\frac{\lambda}{2} - \nu = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\mu}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$$

y considerando $\nu + \mu = 1$, resulta:

$$\mu = \lambda = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad \nu = \frac{1}{3}$$

Luego : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$, de donde

$$\overline{AP} : \overline{PD} = 2:1$$

y también

$$\overline{CP} : \overline{PF} = \mu : \nu = 2:1$$

Procediendo de manera análoga para las dos transversales con vértice en A y B, se completa la demostración.

Ejercicios

5-6) Dibuje un vector $\vec{a}$ cualquiera luego construya los vectores:

$$4\vec{a};\quad \vec{a}/3;\quad 2{,}3\vec{a};\quad -2\vec{a};\quad -4\,\vec{a}/5 \ \text{ y } -1{,}9\vec{a}$$

5-7) Sean $\vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores dados. Calcule las siguientes sumas de vectores:

$$2{,}3\vec{b}+3{,}4\vec{b}-0{,}6\vec{b}+0{,}8\vec{b}-5{,}8\vec{b}=?$$
$$-4{,}1\vec{c}-3{,}5\vec{c}+3\vec{c}\,/\,5-3\vec{c}\,/\,10=?$$
$$-1{,}5\vec{b}+3{,}5\vec{b}-0{,}6\vec{b}+0{,}8\vec{b}=?$$
$$-3{,}2\vec{c}+2{,}3\vec{c}-1{,}7\vec{c}+1{,}4\vec{c}=?$$

$$\frac{3\vec{b}}{5}+\frac{4\vec{b}}{5}-\frac{7\vec{b}}{10}-\vec{b}=?$$

5-8) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores paralelos y que cumplen además las condiciones:

$$\vec{a}=1{,}7\vec{b} \ \text{ y } \ \vec{b}=1{,}2\vec{c}$$

Exprese en función de $\vec{b}$ cada uno de los siguientes vectores:

$$\vec{p}=0{,}6\vec{a}+1{,}4\vec{b}-1{,}6\vec{c}$$
$$\vec{q}=\frac{\vec{a}}{5}-\frac{2\vec{b}}{3}-\frac{4\vec{c}}{3}$$
$$\vec{r}=1{,}2\vec{a}-2{,}3\vec{b}+2{,}3\vec{c}$$
$$\vec{s}=2{,}3\vec{a}-\frac{4\vec{b}}{7}-1{,}2\vec{c}$$
$$\vec{t}=\frac{\vec{a}}{3}-\frac{4\vec{b}}{5}+\frac{2\vec{c}}{3}$$
$$\vec{u}=0{,}8\vec{a}+1{,}5\vec{b}-2{,}3\vec{c}$$

Exprese también estos vectores en términos de $\vec{a}$ y luego en términos de $\vec{c}$

5-9) Demuestre que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos si $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=0$ siendo λ y μ distintos de cero.

5-10) Un aeroplano vuela 180[km] hacia el Este y luego 120[km] a 50° al Norte del Oeste. Determine gráficamente el desplazamiento resultante (magnitud y dirección).

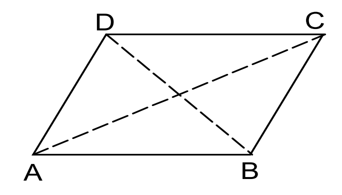
5-11) Efectúe gráficamente las siguientes sumas vectoriales:

- Un vector de módulo 2,3[cm] hacia el Este más un vector de módulo 3,1[cm] hacia el Noreste.
- Un vector de módulo 9,2[cm] hacia el Este más un vector de módulo 12,4[cm] hacia el Noreste.

Compare ambas sumas ¿Se cumple $\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$?

5-12) Sea ABCD un paralelogramo y sean $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$.

Exprese $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{BD}$ en términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.



5-13) Se dan dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ tales que $\left\|\vec{U}+\vec{V}\right\|=\left\|\vec{U}-\vec{V}\right\|$. Determine el ángulo que forman los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$. Examine posibilidades. Comente.

5-14) Sea $\vec{A}$ un vector fijo y sea $\vec{B}$ el símbolo de todos los vectores de igual módulo que $\vec{A}$ pero de dirección variable. Examine el valor de la expresión $\|\vec{A}-\vec{B}\| - \|\vec{A}\|$, preocupándose en qué casos es mayor, igual o menor que cero.

5-15) Dados dos vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ tales que $\|\vec{F}_1\| = 5{,}0[N]$, $\|\vec{F}_2\| = 4{,}2[N]$ y $\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\| = 2{,}3[N]$, determine gráficamente el módulo de $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ y el ángulo que forman $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

5-16) Dibuje dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ cualesquiera. Verifique, por gráficos que se cumple $\|\vec{A}+\vec{B}\| \leq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$ y $\|\vec{A}-\vec{B}\| \geq \left| \|\vec{A}\| - \|\vec{B}\| \right|$.

5-17) Considere tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que tienen un origen común O. ¿Qué condiciones deben satisfacer tales vectores para que O y sus extremos sean los vértices de un paralelogramo?

5-18) Dibuje un vector $\vec{p}$ de 4,0[cm] de módulo, en dirección 70° al Este del Norte y otro vector $\vec{q}$ de 6,5[cm] de módulo en dirección 130° al Este del Norte. Construya el vector $\vec{r} = -2\vec{p} + 3\vec{q}$. Determine el módulo y la dirección de $\vec{r}$.

5-19) Dibuje un vector $\vec{C}$. Construya dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de tal modo que $\vec{C}$ sea la suma de $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Al representar un vector dado como la suma de dos vectores ¿quedan éstos determinados sin ambigüedad?

5-20) Dibuje un vector $\vec{C}$. Exprese $\vec{C}$ como la suma de vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que cumplan $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\|$. Discuta si la solución es única.

5-21) Dibuje un vector $\vec{C}$. Exprese $\vec{C}$ como la suma de vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que $\vec{A} \perp \vec{B}$ ¿Es la solución única?

5-22) Dados los vectores $\vec{p}$, $\vec{q}$ y $\vec{r}$, construya los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tales que:

$$\vec{a} = \vec{p} - \frac{\vec{q}-\vec{r}}{3} \qquad \vec{b} = \vec{r} + \frac{\vec{p}-\vec{q}}{2} \qquad \vec{c} = \frac{\vec{p}}{2} - \frac{\vec{p}-\vec{r}}{2}$$

5-23) Dados dos vectores $\vec{c}$ y $\vec{d}$, construya:

$$\vec{u} = \sqrt{2}\,\vec{c} - \sqrt{3}\,\vec{d} \quad \text{y} \quad \vec{v} = \sqrt{5}\,\vec{c} + \vec{d}/2$$

5-24) Sea $\vec{v}$ un vector no nulo cualquiera. Exprese, en función de $\vec{v}$, un vector en la dirección $\vec{v}$ y que tenga módulo uno.

5-25) Dado un vector $\vec{a}$ y escalares λ y μ, demuestre que $\lambda(\mu\,\vec{a}) = \mu(\lambda\,\vec{a})$.

5-26) Sean ABC un triángulo equilátero de lado a, y F el pie de la perpendicular bajada desde el vértice C. Calcule los módulos de los vectores $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CF}$ y $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FC}$.

5-27) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores de igual módulo, cuyas direcciones forman ángulos de 0°, 120° y 240° con respecto a cierto rayo dado. Determine la suma $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

5-28) Construya un pentágono regular. Desde su centro dibuje los vectores a sus vértices. Determine la suma de tales vectores.

5-29) Sean A, B, C y D cuatro puntos no alineados situados en un mismo plano. Encuentre tres puntos M, N y Q, tales que:

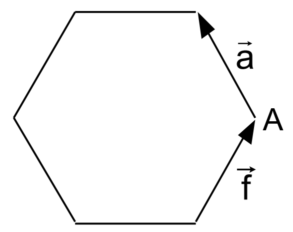
$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{NB}$$

5-30) Considere dos puntos A y B. Determine a lo menos dos puntos Q tales que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AQ} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AQ}\right).$$

5-31) Dos vectores $\vec{p}$ y $\vec{q}$ son perpendiculares y tienen magnitudes 4 y 9 respectivamente. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de $\vec{p} - \vec{q}$. Calcule la magnitud de tal diferencia y compárela con la obtenida gráficamente.

5-32) Un hexágono regular está formado por seis vectores de igual módulo a. Sean $\vec{a}$ y $\vec{f}$ dos vectores adyacentes. Exprese, en términos de $\vec{a}$ y $\vec{f}$, los vectores correspondientes a los otros lados y los vectores correspondientes a las diagonales desde el punto A.



5-33) Dado un triángulo ABC y un punto A', se pide completar un nuevo triángulo de modo que para un punto O cualquiera se cumpla:

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

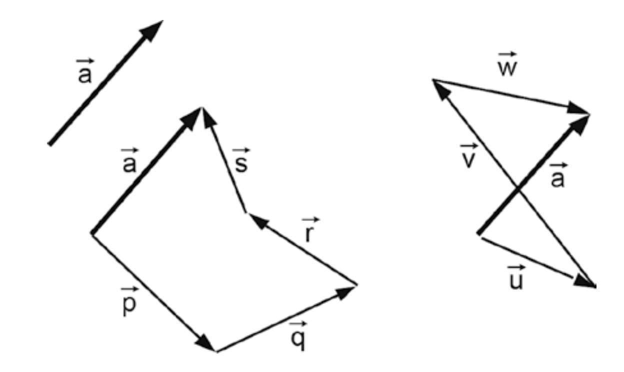
¿Cómo es el nuevo triángulo con respecto al primero?

5-34) Considere dos puntos A y B. Determine a los menos un punto P tal que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}$ sea ortogonal a $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}$.

5-35) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ tres vectores que tienen un punto inicial común O. Demuestre que si existen tres escalares λ, μ y ν tales que $\lambda\,\vec{a} + \mu\,\vec{b} + \nu\,\vec{c} = 0$ y $\lambda + \mu + \nu = 0$, entonces, los puntos terminales de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ son colineales.

Componentes vectoriales de un vector

Hemos aprendido que la adición de dos o más vectores da como resultado un vector. Consideremos ahora el problema recíproco: dado un vector encontrar los vectores sumandos. Fácilmente nos damos cuenta que un vector se puede expresar como la suma de numerosos conjuntos de dos, tres o más vectores.



Por ejemplo, dado el vector $\vec{a}$ podemos escribir:

$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r} + \vec{s}$$

y también:

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

como se muestra en la figura.

Estos vectores no necesariamente están en un mismo plano.

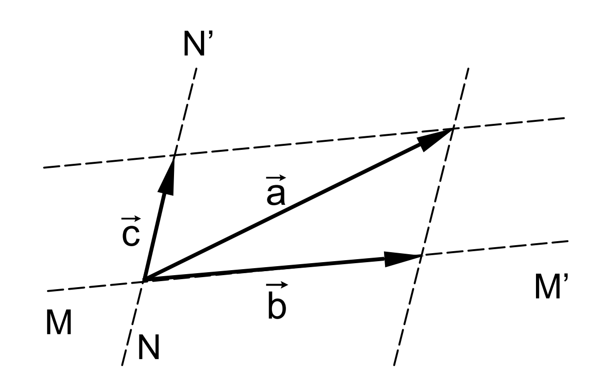
A los vectores que sumados dan el vector original los llamaremos **“componentes vectoriales del vector”.**

En particular, podemos descomponer un vector en dos componentes vectoriales. El problema consiste en encontrar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que sumados den un vector $\vec{a}$ conocido. El problema así presentado no tiene solución única. El problema queda determinado si agregamos la condición de que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean coplanares con el vector $\vec{a}$ dado y que tengan direcciones fijas determinadas.

Sea $\vec{a}$ el vector dado y sean MM’ y NN’ las direcciones exigidas. Trazando por el punto final $\vec{a}$ las paralelas a esas direcciones obtenemos los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ que cumplen:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

Notemos que ahora tenemos sólo un par de vectores que sumados dan $\vec{a}$. Por tanto, esos vectores son las componentes vectoriales únicas de $\vec{a}$ con las condiciones que hemos fijado.



Vector unimodular o unitario

Dado cualquier vector $\vec{v}$, distinto de cero, llamamos "vector unimodular en la dirección de $\vec{v}$" al siguiente vector:

$$\hat{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \quad ; \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$$

El vector $\hat{u}$ tiene magnitud o módulo 1:

$$\|\hat{u}\| = \left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = 1$$

y caracteriza a una determinada dirección.

Suponga que la velocidad de un avión es:

$$\vec{v} = \left(350\left[\text{km / h}\right],\ \text{hacia el norte}\right)$$

La magnitud de esta velocidad es el escalar positivo $\|\vec{v}\| = 350\left[\text{km / h}\right]$

Hagamos el producto del vector $\vec{v}$ por el escalar $\frac{1}{\|\vec{v}\|}$, es decir, dividamos el vector por su propia magnitud:

$$\frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left(350\left[\text{km/h}\right],\ \text{hacia el norte}\right)}{350\left[\text{km/h}\right]}$$

El resultado es un vector que tiene igual dirección que $\vec{v}$, y cuya magnitud es $\frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{350\left[\text{km/h}\right]}{350\left[\text{km/h}\right]} = 1\left[\text{sin unidades}\right]$, es decir, un vector ***unitario***:

$$\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \left(1\left[\text{sin unidades}\right],\ \text{hacia el norte}\right)$$

Podemos designar este valor usando el símbolo $\hat{u}_{norte}$, en donde la flecha de vector ha sido reemplazada por un pequeño "techo" que indica que el vector tiene magnitud 1.

$$\hat{u}_{norte} = \left(1\left[\text{sin unidades}\right],\ \text{hacia el norte}\right)$$

Aunque el vector $\hat{u}_{norte}$ fue obtenido a partir de una velocidad, este vector en sí no tiene ninguna relación con la velocidad del avión. Es un vector adimensional de magnitud 1 que apunta hacia el norte. En consecuencia, puede ser utilizado para expresar cualquier otro vector que esté en la dirección sur-norte, como puede verse en los ejemplos que vienen a continuación

Ejemplos

- La fuerza $\vec{F} = \left(17[N]\,,\ \text{en dirección sur}\right)$, puede expresarse como:

$$\vec{F} = -17[N]\,\hat{u}_{norte}$$

- La velocidad del avión puede escribirse como:

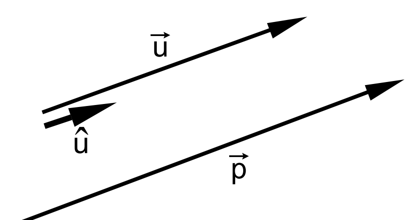
$$\vec{v} = 350\left[km/h\right]\hat{u}_{norte}$$

Podemos establecer como principio general que basta un solo vector unitario para expresar todos los vectores paralelos o antiparalelos a una dirección dada.

Cualquier vector paralelo a $\vec{v}$ se puede escribir en la forma $\alpha\,\hat{u}$, siendo α un escalar.

Por ejemplo, si $\vec{p}$ es paralelo a $\vec{v}$:

$$\vec{p} = p_u\,\hat{u}$$



donde p_u es un escalar positivo (negativo) si $\vec{p}$ tiene igual (opuesta) dirección que $\vec{u}$.

El módulo de $\vec{p}$ es:

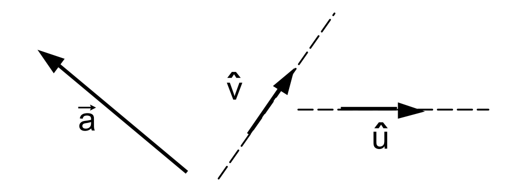
$$\|\vec{p}\| = \|p_u\,\hat{u}\| = |p_u| \cdot \|\hat{u}\| = |p_u|$$

Esto es, el valor absoluto del escalar p_u es igual al módulo del vector $\vec{p}$.

Componentes escalares de un vector

Volvamos a considerar el problema de escribir un vector dado como la suma de dos componentes vectoriales coplanares con direcciones fijas establecidas previamente.

Caractericemos tales direcciones fijas por dos vectores unimodulares $\hat{u}$ y $\hat{v}$ respectivamente.



Sea $\vec{a}$ el vector dado, podemos entonces escribir:

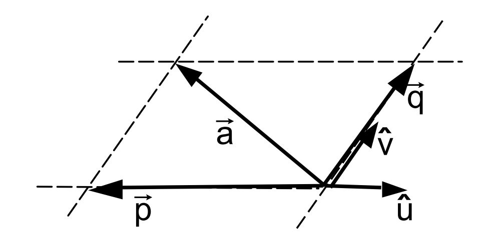
$$\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$$

Como $\vec{p} = \alpha\,\hat{u}$ y $\vec{q} = \beta\,\hat{v}$, siendo α y β escalares, resulta:

$$\vec{a} = \alpha\,\hat{u} + \beta\,\hat{v}$$

lo que solemos escribir:

$$\vec{a} = a_u\,\hat{u} + a_v\,\hat{v}$$



A estos números a_u y a_v le llamamos las "**componentes escalares**" de $\vec{a}$ en las direcciones $\hat{u}$ y $\hat{v}$ respectivamente.

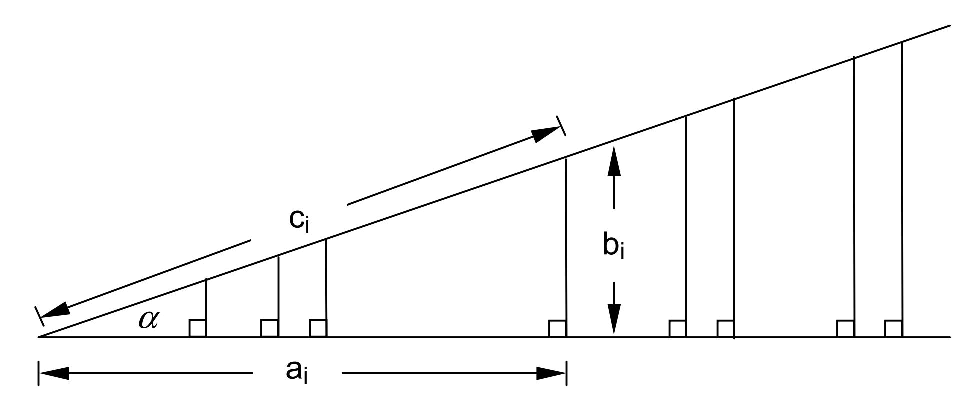
Notamos que, en el ejemplo dibujado, la componente escalar a_u es negativa y la a_v es positiva.

Dado que el cálculo de las componentes escalares de un vector es particularmente simple cuando las direcciones fijadas son perpendiculares, restringiremos nuestro estudio a "sistemas de ejes coordenados ortogonales". Estos sistemas de coordenadas son los de mayor uso en los primeros niveles de Física.

Mediciones en triángulos semejantes con un ángulo común

Dibujamos un ángulo α. Construimos perpendiculares a uno de sus lados, formándose un conjunto de triángulos rectángulos, semejantes, con un ángulo común.

Designamos por a_1 , a_2 , …a_i..., a_n y b_1 , b_2 , … , b_i… , b_n las longitudes de los catetos y por c_1 , c_2 , …c_i, … , c_n las longitudes de las correspondientes hipotenusas.

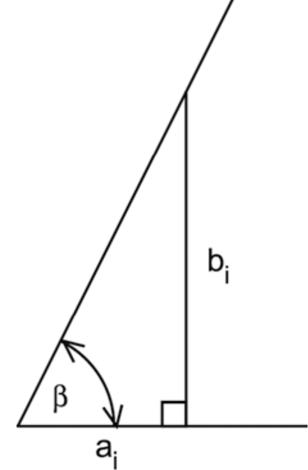


Para cuatro de tales triángulos medimos las longitudes de sus lados y calculamos los cuocientes presentados en la tabla.

a_i [mm]	**b_i** [mm]	**c_i** [mm]	$\frac{b_i}{c_i}$	$\frac{a_i}{c_i}$	$\frac{b_i}{a_i}$
29,0	7,4	29,8	0,248	0,973	0,255
67,0	17,8	69,2	0,257	0,968	0,266
97,0	25,9	100,4	0,258	0,966	0,267
120,0	32,0	124,0	0,258	0,968	0,267

Procediendo de manera análoga con un ángulo diferente, obtuvimos los siguientes resultados de la tabla.

a_i [mm]	b_i [mm]	c_i [mm]	$\frac{b_i}{c_i}$	$\frac{a_i}{c_i}$	$\frac{b_i}{a_i}$
27,0	58,3	646,4	0,905	0,419	2,159
36,0	77,7	85,7	0,907	0,420	2,158
42,0	90,5	99,8	0,907	0,421	2,158
51,0	110,0	121,3	0,907	0,420	2,157



La geometría establece, en los "teoremas de figuras semejantes", que las longitudes de lados homólogos son proporcionales, es decir, que las razones entre ellas son constantes.

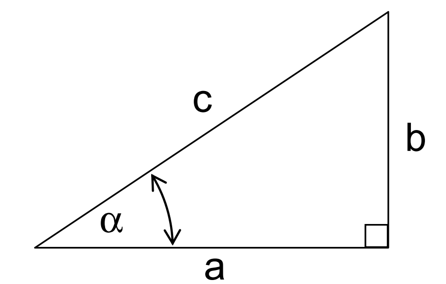
Mediante las tablas anteriores queremos que usted visualice, en particular, que en triángulos rectángulos semejantes los cuocientes entre las longitudes de los lados tienen valores constantes que dependen de los ángulos de esos triángulos.

Consideremos un triángulo rectángulo. Con respecto al ángulo α, a un cateto lo llamamos opuesto y al otro adyacente. Los cuocientes:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{a}$$



son características del ángulo α y se designan por nombres especiales :

Seno de α ……….. sen α = b/c
Coseno de α …….. cos α = a/c
Tangente de α ……..tg α = b/a

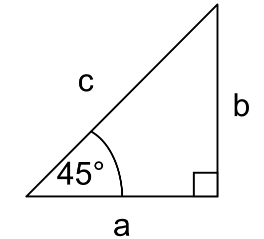
Estas relaciones se las hemos presentado a usted para que podamos operar con ellas en el cálculo de componentes de vectores. Usted estudiará Trigonometría en forma fundamental y detallada en sus cursos de Matemática.

Ejemplos

- Consideremos un triángulo rectángulo isósceles.

En él:

$b = a \quad y \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}\,a$



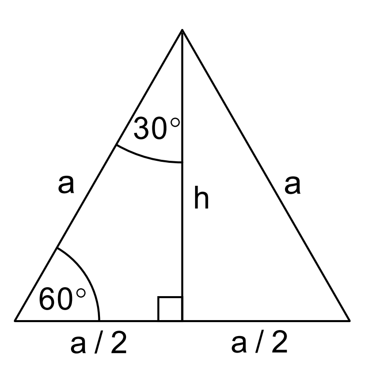
Por tanto:

$$\text{sen}\,45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\big/2 = \cos 45°$$

$$\text{tg}\,45° = \frac{b}{a} = 1$$

- Consideremos un triángulo equilátero de lado a. Su altura es $h = \sqrt{3}\,a\big/2$ (aplique Pitágoras).

Entonces:



$$\text{sen}\,60° = \frac{h}{a} = \sqrt{3}\big/2 \simeq 0{,}866 = \cos 30°$$

$$\cos 60° = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \simeq 0{,}500 = \text{sen}\,30°$$

$$\text{tg}\,60° = \frac{h}{a/2} = \sqrt{3} \simeq 1{,}732$$

$$\text{tg}\,30° = \frac{a/2}{h} = 1\big/\sqrt{3} \simeq 0{,}577$$

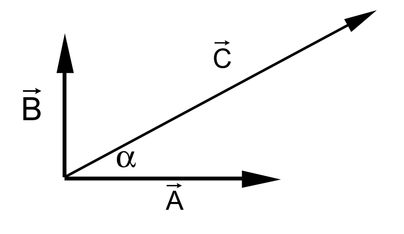
- Dibujemos dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que $\vec{A} \perp \vec{B}$. Sea $\vec{C}$ un vector en el plano determinado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forme un ángulo α con el vector $\vec{A}$. Determinemos dos escalares λ y μ, tales que $\vec{C} = \lambda\,\vec{A} + \mu\,\vec{B}$. Entonces, para el caso dibujado:

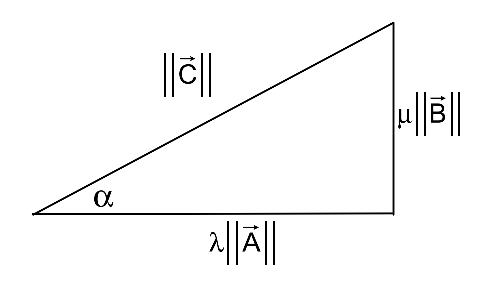
$$\lambda\left\|\vec{A}\right\| = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \cos\alpha$$

$$\mu\left\|\vec{B}\right\| = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \text{sen}\alpha$$

$$\lambda = \frac{\left\|\vec{C}\right\|}{\left\|\vec{A}\right\|} \cdot \cos\alpha$$

$$\mu = \frac{\left\|\vec{C}\right\|}{\left\|\vec{B}\right\|} \cdot \text{sen}\alpha$$



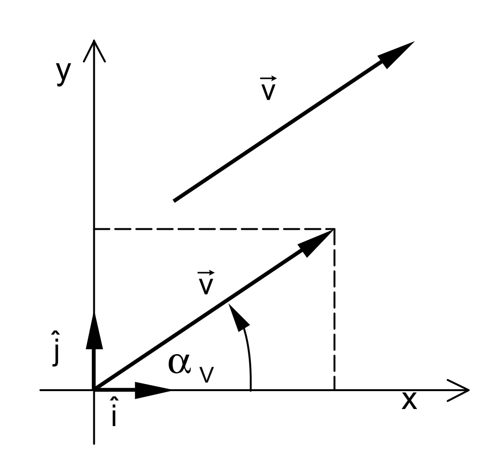


En particular, si elegimos $\left\|\vec{A}\right\| = \left\|\vec{B}\right\| = 1$, resulta:

$$C_A = \lambda = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \cos\alpha \qquad y \qquad C_B = \mu = \left\|\vec{C}\right\| \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Los números C_A y C_B son las **componentes escalares del vector** $\vec{C}$ en las direcciones de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente. También decimos que C_A y C_B son las **proyecciones** del vector $\vec{C}$ sobre estas mismas direcciones.

Componentes ortogonales de un vector



- Elijamos un sistema de dos ejes ortogonales. Denotemos por $\hat{i}$ y $\hat{j}$ los vectores unimodulares $\left(\left\|\hat{i}\right\| = \left\|\hat{j}\right\| = 1 \right)$ en la direcciones del "eje x" y del "eje y" respectivamente.

Sea $\vec{V}$ un vector en el plano formado por tales ejes.

Este vector está determinado si conocemos su módulo, $V = \left\|\vec{V}\right\|$, y su dirección.

Podemos indicar la dirección por el ángulo que $\vec{V}$ forma con el "eje x": $\alpha_v = \sphericalangle\left(\vec{V},\hat{i}\right)$.

También el vector $\vec{V}$ está determinado por sus componentes en la "dirección x" y en la "dirección y".

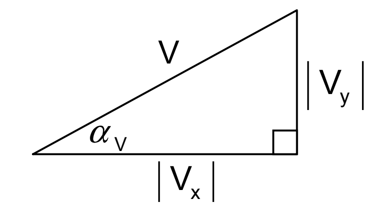
$$\vec{V} = \vec{C}_x + \vec{C}_y \qquad \left(\vec{C}_x \ , \ \vec{C}_y : \text{ componentes vectoriales}\right)$$

$$= V_x\hat{i} + V_y\hat{j} \qquad \left(V_x \ , \ V_y : \text{ componentes escalares}\right)$$

Donde $\left\|\vec{C}_x\right\| = \left|V_x\right|$ y $\left\|\vec{C}_y\right\| = \left|V_y\right|$

Ambas caracterizaciones del vector $\vec{V}$ están relacionadas por:

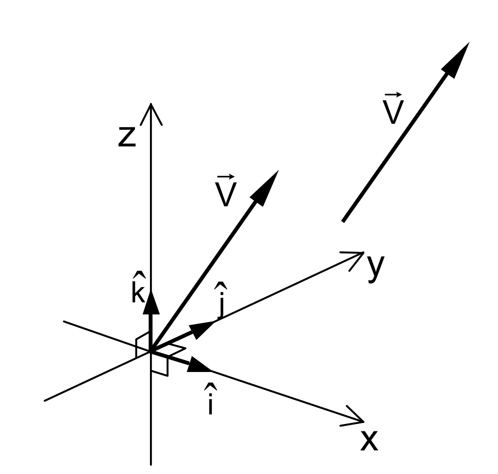
$$\begin{cases} V_x = V \cdot \cos(\alpha_v) \\ V_y = V \cdot \operatorname{sen}(\alpha_v) \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \\ \operatorname{tg}(\alpha_v) = V_y / V_x \end{cases}$$



Si $\vec{V} \neq 0$, sus componentes V_x y V_y pueden ser positivas o negativas. Siendo su módulo V positivo, los signos de V_x y V_y dependen de los signos de $\operatorname{sen}(\alpha_v)$ y $\cos(\alpha_v)$, esto es de la dirección de $\vec{V}$.

- Al trabajar en el espacio euclidiano de tres dimensiones escogemos una tríada de ejes perpendiculares entre sí.

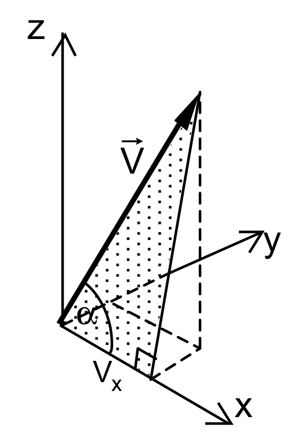
Llamemos $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ a los vectores unimodulares en las direcciones de los ejes, x, y , z respectivamente.

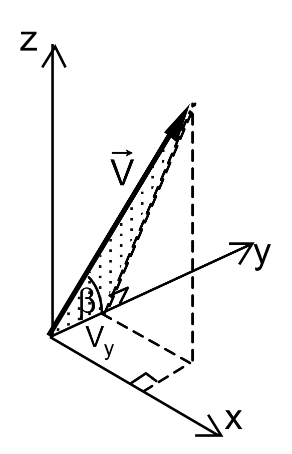


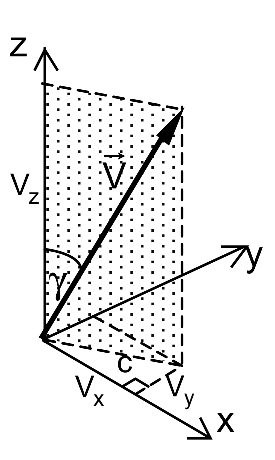
Un vector $\vec{V}$ en el espacio lo expresamos como:

$$\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$$

Siendo V_x, V_y y V_z sus componentes escalares o proyecciones sobre los respectivos ejes.







El módulo del vector $\vec{V}$ está dado por:

$$V = \left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{c^2 + V_z^2} \quad , \quad \text{con } c^2 = V_x^2 + V_y^2$$

por lo tanto:

$$V = \left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

La dirección del vector $\vec{V}$ queda determinada por los ángulos que él forma con los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$:

$$\alpha = \measuredangle\left(\vec{V}, \hat{i}\right) \qquad \beta = \measuredangle\left(\vec{V}, \hat{j}\right) \qquad \gamma = \measuredangle\left(\vec{V}, \hat{k}\right)$$

los que se determinan, por ejemplo, usando

$$\cos\alpha = V_x / V\,, \qquad \mathrm{tg}\gamma = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\,/\,V_z$$

y otras relaciones análogas que dejamos a usted la tarea de buscar.

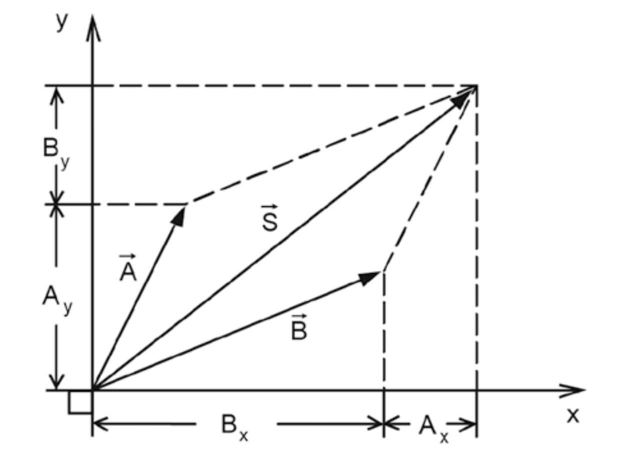
- El producto de un escalar λ por un vector $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_Z\hat{k}$ es:

$$\begin{aligned}\lambda A &= \lambda\left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right)\\ &= \lambda A_x\hat{i} + \lambda A_y\hat{j} + \lambda A_z\hat{k}\end{aligned}$$

- Al expresar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por sus componentes rectangulares, realizamos su adición en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= \left(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}\right) + \left(B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\right)\\ &= A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} + B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}\\ &= \left(A_x + B_x\right)\hat{i} + \left(A_y + B_y\right)\hat{j} + \left(A_z + B_z\right)\hat{k}\end{aligned}$$

La suma así obtenida es igual a lo que resulta usando el método geométrico antes visto, como se puede comprobar en la figura adjunta.



Si $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$, entonces:

$$S_x = A_x + B_x$$
$$S_y = A_y + B_y$$

- Para que los vectores $\vec{a} = a_x\,\hat{i} + a_y\,\hat{j} + a_z\,\hat{k}$ y $\vec{b} = b_x\,\hat{i} + b_y\,\hat{j} + b_z\,\hat{k}$ sean iguales, sus componentes deben ser iguales, esto es:

$$a_x = b_x \qquad\qquad a_y = b_y \qquad\qquad a_z = b_z$$

La igualdad de dos vectores en un espacio de tres dimensiones implica tres ecuaciones escalares:

Ejemplos

- Calculemos la suma de los vectores $\vec{A} = 3{,}1\,\hat{i} - 2\hat{j} + 7\,\hat{k}$ y $\vec{B} = -2{,}2\,\hat{i} + \hat{j} + 0{,}2\hat{k}$.

$$\begin{aligned}\vec{A} + \vec{B} &= \left(3{,}1\hat{i} - 2\,\hat{j} + 7\,\hat{k}\right) + \left(-2{,}2\,\hat{i} + \hat{j} + 0{,}2\,\hat{k}\right)\\ &= \left(3{,}1 - 2{,}2\right)\hat{i} + \left(-2 + 1\right)\hat{j} + \left(7 + 0{,}2\right)\hat{k}\\ &= 0{,}9\hat{i} - \hat{j} + 7{,}2\hat{k}\end{aligned}$$

Le recomendamos que represente gráficamente los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} + \vec{B}$.

- Sean $\vec{a} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 8\hat{k}$ y $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ dos vectores dados.

  Calculemos la magnitud de $\vec{a} - \vec{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= \left(3\,\vec{i} - 6\,\vec{j} + 8\vec{k}\right) - \left(3\,\vec{i} + 2\,\vec{j} + 6\vec{k}\right)\\ &= \left(3 - 3\right)\vec{i} + \left(-6 - 2\right)\vec{j} + \left(8 - 6\right)\vec{k}\\ &= -8\hat{j} + 2\hat{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left\|\vec{a} - \vec{b}\right\| = \sqrt{\left(-8\right)^2 + \left(2\right)^2} = \sqrt{68} \simeq 8{,}2$$

- Un vector $\vec{a}$ de módulo 5,0 forma un ángulo de 30° con el eje z. Su proyección en el plano xy forma un ángulo de 45° con el eje x. Calculemos los componentes escalares del vector $\vec{a}$.

El módulo de $\vec{a}$ es $a = \left\|\vec{a}\right\| = 5$

La proyección p de $\vec{a}$ sobre el plano xy es:

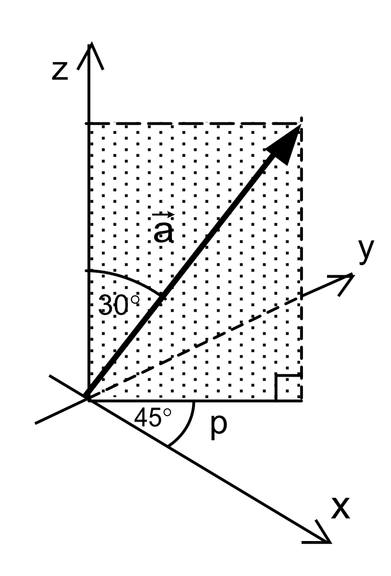
$$p = a \cdot \cos 60° = 5{,}0 \cdot 0{,}50 = 2{,}5$$

entonces:

$$a_x = p \cdot \cos 45° \simeq 2{,}5 \cdot 0{,}71 \simeq 1{,}8$$

$$a_y = p \cdot \text{sen} 45° \simeq 2{,}5 \cdot 0{,}71 \simeq 1{,}8$$

$$a_z = a \cdot \cos 30° \simeq 5{,}0 \cdot 0{,}87 \simeq 4{,}4$$



Vector posición

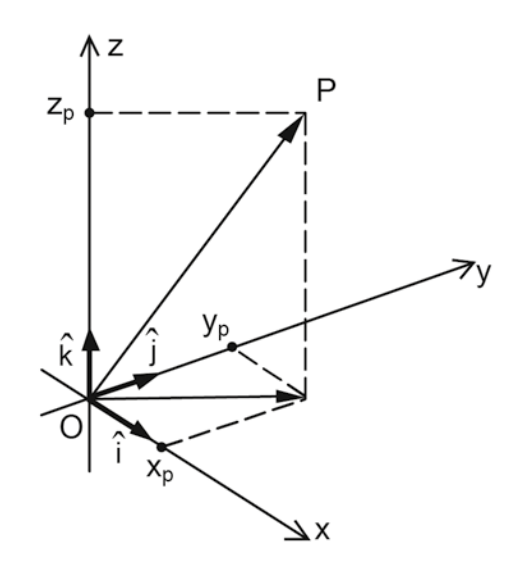
Para indicar la ubicación de un punto es necesario elegir previamente un sistema de referencia.

Tomemos como referencia un "sistema de ejes coordenados ortogonales" con origen O.

En tal sistema, la posición de un punto P está dada por el vector $\overrightarrow{OP}$ cuyas componentes son las coordenadas $\{x_p, y_p, z_p\}$ del punto P.

$$\overrightarrow{OP} = x_p\,\hat{i} + y_p\,\hat{j} + z_p\,\hat{k}$$

Este vector $\overrightarrow{OP}$ es el **vector posición** del punto P y suele anotarse por $\vec{r}_p = \overrightarrow{OP}$.



La distancia del punto P al origen O es igual al módulo del vector posición $\overrightarrow{OP}$:

$$d_{OP} = \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}$$

* Encontremos la distancia entre los puntos A y B cuyas coordenadas, en un sistema de referencia escogido, son respectivamente:

$\{x_A\ ,\ y_A\ ,\ z_A\}$ y $\{x_B\ ,\ y_B\ ,\ z_B\}$

Los vectores posición de estos puntos son:

$$\vec{r}_A = \overrightarrow{OA} = x_A\,\hat{i} + y_A\,\hat{j} + z_A\,\hat{k}$$

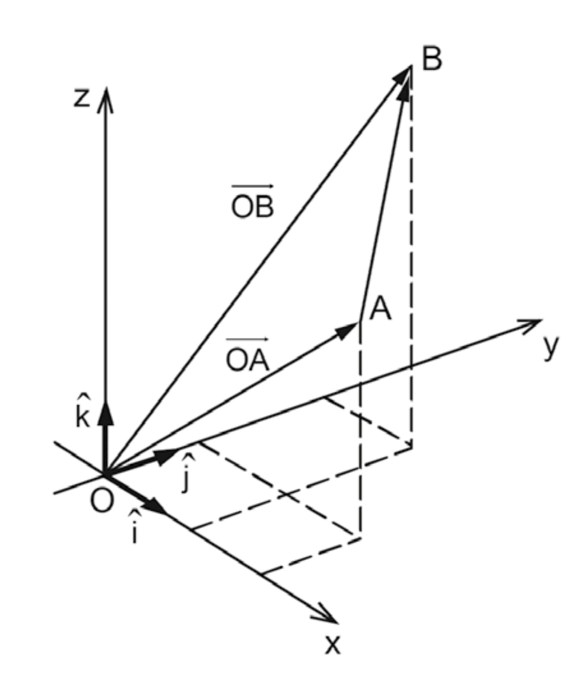
$$\vec{r}_B = \overrightarrow{OB} = x_B\,\hat{i} + y_B\,\hat{j} + z_B\,\hat{k}$$

De la figura vemos que la distancia entre los puntos A y B es la magnitud (norma, módulo) del vector $\overrightarrow{AB}$:

$$d_{AB} = \overline{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$$

Ya que se cumple: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

Se tiene: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$



Expresando este vector en término de sus componentes:

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A\right)\hat{i} + \left(y_B - y_A\right)\hat{j} + \left(z_B - z_A\right)\hat{k}$$

obtenemos:

$$d_{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$$

** Calculemos la distancia entre los puntos A y B dados por

$$A = \left\{0\ ;\ 4{,}0\ ;\ -2{,}0\right\}\left[m\right] \qquad y \qquad B = \left\{6{,}0\ ;\ -3{,}0\ ;\ 1{,}0\right\}\left[m\right]$$

(coordenadas expresadas en metros).

$$\overrightarrow{OA} = 0\,\hat{i} + 4{,}0\,\hat{j} - 2{,}0\,\hat{k} = 4{,}0\,\hat{j} - 2{,}0\,\hat{k}$$

$$\overrightarrow{OB} = 6{,}0\,\hat{i} - 3{,}0\,\hat{j} + 1{,}0\,\hat{k} = 6{,}0\,\hat{i} - 3{,}0\hat{j} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 6{,}0\,\hat{i} - 7{,}0\,\hat{j} + 3{,}0\,\hat{k}$$

$$d_{AB} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{36 + 49 + 9{,}0} = \sqrt{94} \simeq 9{,}7\left[m\right]$$

¡Represente los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AB}$!

Ejercicios

5-36) Determine un vector que tenga la misma dirección pero sentido contrario que el vector $\vec{A} = 3\,\hat{i} - 4\,\hat{k}$ y cuyo módulo sea 10.

5-37) Considere los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 3\,\hat{i} - 2\,\hat{j} \qquad \vec{B} = -\hat{i} + 3\,\hat{j} \qquad \vec{C} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} \qquad \vec{D} = -2\,\hat{i} - 3\,\hat{j}$$

Determine los vectores:

$$\vec{A} + \vec{B} \ \ ,\ \ \vec{C} - \vec{D} \ \ ,\ \ 2\,\vec{A} - 3\,\vec{D} \ \ ,\ \ 3\,\vec{A} - 2\,\vec{B} + 4\,\vec{C} - 5\,\vec{D}$$

en forma algebraica y en forma gráfica. Compare.

5-38) Determine los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para los cuales se tiene:

$$\vec{A} + \vec{B} = 11\,\hat{i} - \hat{j} \qquad y \qquad \vec{A} - \vec{B} = -5\,\hat{i} + 11\,\hat{j}$$

5-39) Un vector $\vec{v}$, de módulo 6,0, forma un ángulo de 30° con el eje z. Su proyección sobre el plano xy forma un ángulo de 60° con el eje x. La proyección de un vector $\vec{w}$ sobre el eje z es 4,0. La proyección del vector $\vec{w}$ en el plano xy vale 6,0 y hace un ángulo de 120° con el eje x. Calcule las componentes escalares del vector $\vec{v} - \vec{w}$.

5-40) Sean $\vec{p} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j} + 7\,\hat{k}$, $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j} + 10\,\hat{k}$, $\vec{c} = 3\,\hat{i} - 5\,\hat{j} + 4\,\hat{k}$ tres vectores que tienen un punto inicial común. Verifique si los tres puntos finales de esos vectores están sobre una misma recta.

5-41) Dados los vectores $\vec{A} = 3\,\hat{i} + 4\,\hat{j}$ y $\vec{B} = \hat{i} + \hat{j}$, calcule la magnitud y la dirección de la resultante (suma), la magnitud y dirección de $\vec{A} - \vec{B}$ y el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Resuelva este ejercicio gráficamente y compare.

5-42) Dado un vector $\vec{A}$, haga una discusión de las posibilidades para un vector $\vec{B}$ y un escalar λ tal que se cumple la igualdad $\vec{A} + \vec{B} = \lambda\,\vec{A}$.

5-43) En referencia a los vectores de la figura adjunta se anotan las siguientes relaciones:

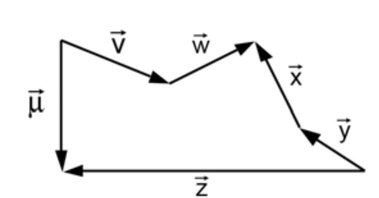
a) $\vec{v} + \vec{w} - \vec{x} - \vec{y} + \vec{z} - \vec{\mu} = \vec{0}$

b) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{x} - \vec{y} - \vec{z} - \vec{\mu} = \vec{0}$

c) $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} + \vec{\mu} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$

d) $\vec{\mu} + \vec{v} + \vec{z} = -\vec{x} - \vec{y} - \vec{w}$

e) $\vec{v} + \vec{w} + \vec{z} = -\vec{\mu} - \vec{y} - \vec{x}$



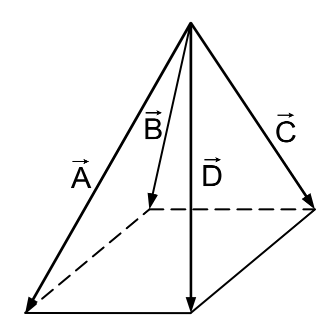
¿Hay entre ellas algunas correctas?

5-44) Determine la magnitud del vector $\vec{A} = a\,\hat{i} + a\,\hat{j} + a\,\hat{k}$

5-45) Dado los vectores $\vec{F}_1 = 4\,\hat{i} - 2\,\hat{j} + 3\,\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = -4\,\hat{i} + 2\,\hat{j} + \hat{k}$, calcule:

$$\left\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right\| \quad , \quad \left\|\vec{F}_1\right\| + \left\|\vec{F}_2\right\| \quad , \left\|\vec{F}_1 - \vec{F}_2\right\| \quad \text{y} \quad \left\|\vec{F}_1\right\| - \left\|\vec{F}_2\right\|$$

5-46) Las aristas laterales de la pirámide de base cuadrada determinan los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$. Exprese el vector $\vec{A}$ en términos de los vectores $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$.



5-47) Considere los siguientes cuatro pares de vectores:

$3\,\hat{i} + 9\,\hat{j}$ y $-3\,\hat{i} - 9\,\hat{j}$	$2\,\hat{i} + 6\,\hat{j}$ y $3\,\hat{i} - \hat{j}$
$\sqrt{2}\,\hat{i} - \hat{j}$ y $-\sqrt{8}\,\hat{i} + 2\,\hat{j}$	$7\,\hat{i} + 7\,\hat{j}$ y $3\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$

¿Cuál de ellos corresponde a dos vectores mutuamente perpendiculares?

5-48) Cierto vector $\vec{P}$ cambia con el tiempo según la relación $\vec{P}(t) = 2t\,\hat{i} - t^2\,\hat{j}$, siendo t el tiempo expresado en segundos. Calcule el valor de $P(t)$ en el instante $t = 2{,}0\,[s]$.

5-49) Determine los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para los cuales se tiene:

$$\vec{A} + \vec{B} = 7\,\hat{j} - 6\,\hat{k} \quad \text{y} \quad \vec{A} - \vec{B} = 3\,\hat{j} + 12\,\hat{k}$$

5-50) Sabiendo que $\vec{A} = \lambda\,\vec{B}$, examine las condiciones para que:

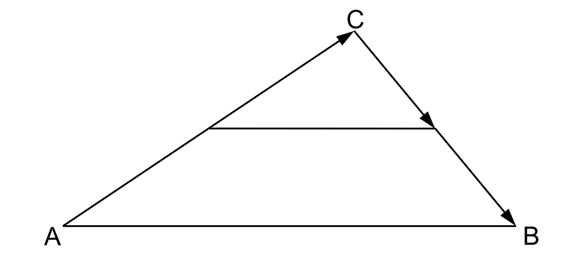
$\|\vec{A}\|$ sea igual a $\lambda\|\vec{B}\|$

$\|\vec{A}\|$ sea mayor que $\|\vec{B}\|$

$\|\vec{B}\|$ sea mayor que $\|\vec{A}\|$

5-51) Dos personas parten de un mismo punto y se mueven del siguiente modo: una de ellas recorre 10[km] en la dirección del vector $\vec{a} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ y la otra recorre 5[km] en la dirección del vector $\vec{b} = 8\hat{i} - 6\hat{j}$. Determine la distancia que separa ambas personas una vez finalizados sus recorridos.

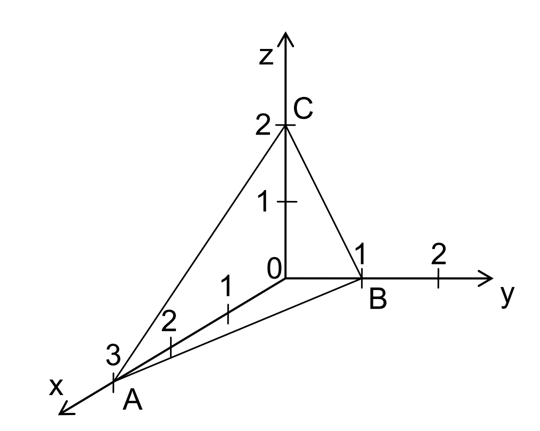
5-52) La mediana de un triángulo es la recta que une los puntos medios de dos lados. Demostrar, utilizando vectores, que la mediana mide la mitad del tercer lado.



5-53) Dados los vectores $\vec{A} = 4\,\hat{i} + 3\,\hat{k}$ y $\vec{B} = 2\,\hat{i} - \hat{k}$, calcule la magnitud y la dirección de la resultante (suma) y la magnitud y dirección de la diferencia $\vec{B} - \vec{A}$. Resuelva también este ejercicio gráficamente y compare.

5-54) Considere los puntos A, B y C ubicados como se muestra en el sistema de coordenadas ortogonales de la figura adjunta. Calcule:

$$\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \quad \text{y} \quad \left\|\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB}\right\|$$



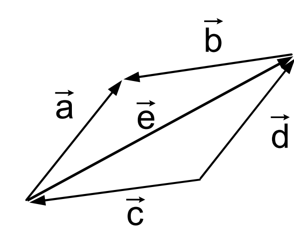
5-55) Dado el vector $\vec{A} = 3\,\hat{i} + 2\,\hat{j}$, calcule el vector unitario $\hat{A}$ en la dirección de $\vec{A}$.

5-56) En referencia a la figura adjunta se han anotado las igualdades:

$\vec{e} = \vec{c} + \vec{d}$ $\qquad$ $\vec{e} = \vec{a} - \vec{b}$

$\vec{e} = -\vec{c} + \vec{d}$ $\qquad$ $\vec{e} = \vec{b} - \vec{a}$

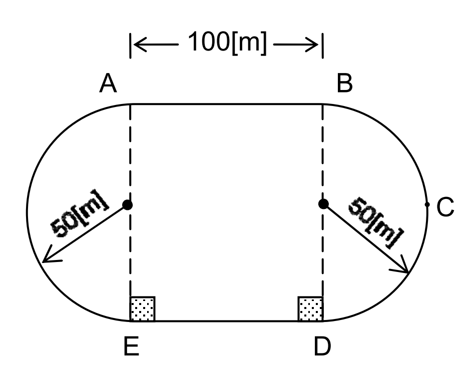
¿Son algunas de ellas correctas?



5-57) Calcule el módulo de $\vec{a} + \vec{b}$, siendo $\vec{a} = 4\,\hat{i} - 2\,\hat{j}$ y $\vec{b} = 4\,\hat{i} + 3\,\hat{j}$.

5-58) Una persona parte de un punto P y para llegar a otro punto Q debe recorrer 5[km] en la dirección NE. Luego debe dirigirse al punto R para lo cual debe recorrer otros 5[km] en la dirección del vector $\vec{a} = 12\,\hat{i} + 16\,\hat{j}$, estando el eje x orientado en la dirección SE. Determine el vector de desplazamiento total.

5-59) Un atleta corre por una pista como la indicada en la figura. Represente gráficamente los vectores desplazamiento respecto al punto de partida A cuando pasa por B, C, D y E. Determine la magnitud y la dirección de tales vectores.



5-60) Sabiendo que $\vec{u} = 6\hat{i} + 12\hat{j}$ y $\vec{v} = -12\hat{i} + 6\hat{j}$, examine la validez de la siguientes afirmaciones :

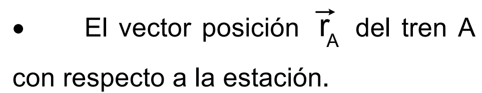
$\left\|\vec{u}\right\| = \left\|\vec{v}\right\|$ $\qquad$ $\vec{u}$ es perpendicular con $\vec{v}$

$\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|$ $\qquad$ $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\| = \left\|\vec{v} - \vec{u}\right\|$

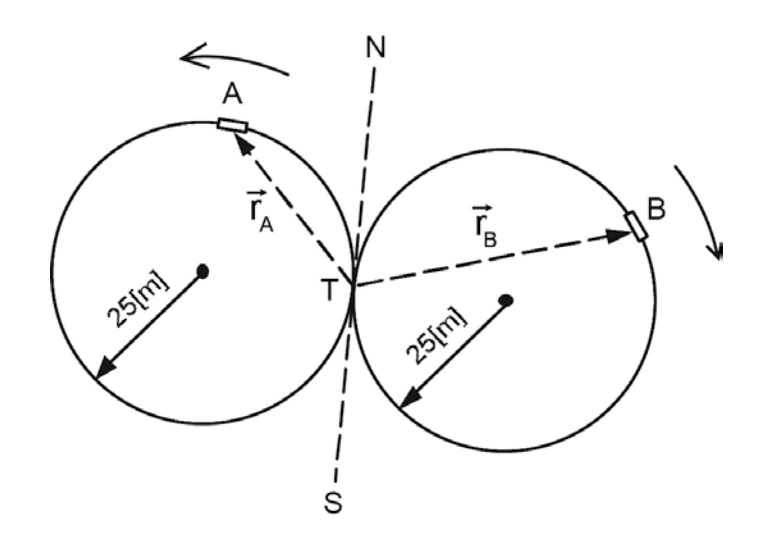
5-61) Sean $\vec{p} = 2\,\hat{i} - 3\,\hat{j}$, $\vec{q} = \hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{r} = 3\hat{i} - 5\hat{j}$ tres vectores que tiene un punto inicial común. Verifique si los tres puntos finales de esos vectores están sobre una misma recta.

5-62) Calcule el módulo de $\hat{i} - \hat{j}$ y el módulo de $\hat{j} + \hat{k}$.

5-63) Dos trencitos A y B corren por vía circulares como las que se indican en la figura. El tren A demora 8[min] en dar una vuelta completa y el tren B sólo demora 4[min] en ello. Si ambos trenes parten simultáneamente de la estación T, calcule para 2[min] después de la partida:



- El vector posición $\vec{r}_A$ del tren A con respecto a la estación.
- El vector posición $\vec{r}_B$ del tren B con respecto a la estación.
- El vector desplazamiento relativo $\vec{r}_A - \vec{r}_B$ de A con respecto a B.



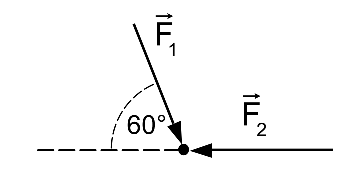
5-64) Dado los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{i} - \hat{k}$, calcule $\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{A} - \vec{B}$, $\left\|\vec{A} + \vec{B}\right\|$ y $\left\|\vec{A} - \vec{B}\right\|$.

5-65) Dado el vector $\vec{H} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$, encuentre los vectores en la dirección del vector $\vec{H}$ y en la dirección opuesta, y cuyas magnitudes sean ambas iguales a uno.

5-66) Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas tal como se muestra en la figura. Los módulos de esas fuerzas valen

$\left\|\vec{F}_1\right\| = 40\left[kp\right]$ y $\left\|\vec{F}_2\right\| = 70\left[kp\right]$

Calcule la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



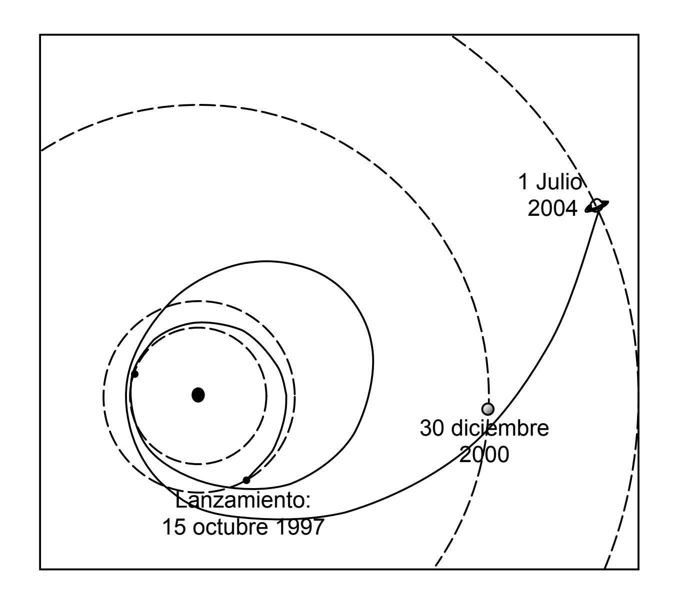
5-67) Sobre un cuerpo se aplican tres fuerzas, las que expresadas en una misma unidad, que no se indica, son:

$$\vec{F}_1 = 6\hat{i} \;,\; \vec{F}_2 = 4\hat{j} \quad y \quad \vec{F}_3 = 6\hat{i} + 4\hat{j}$$

Calcule la fuerza resultante $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

CAPÍTULO VI

DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO



En octubre de 1997 la nave espacial Cassini-Huygens fue lanzada desde la Tierra en un viaje hacia Saturno que demoraría un total de 7 años. En su camino, la nave pasó dos veces cerca de Venus, se acercó de nuevo a la Tierra y pasó junto a Júpiter. En cada uno de estos acercamientos la nave adquirió nuevos impulsos, sin los cuales nunca habría podido llegar a su destino.

Los ingenieros de vuelo usaron las leyes de la Física para describir el movimiento de la nave. Es decir, fueron capaces de determinar la posición de la nave, su velocidad y aceleración en función del tiempo. En este capítulo estudiaremos las definiciones de los vectores posición, velocidad y aceleración, y las aplicaremos en particular a movimientos en una dimensión.

Observador y sistema de referencia

Considere una persona sentada tomando una taza de té: ¿está en reposo o está en movimiento? Una segunda persona, sentada a su lado, dirá que la primera persona está definitivamente en reposo: permanece sentada, y el té en su taza no delata ningún movimiento. En realidad, estas dos personas son pasajeros de un avión que vuela a unos 400[km/h]. Desde el punto de vista de una persona en el suelo, ambos pasajeros se están moviendo a la misma velocidad del avión. Observe que los pasajeros no tienen ninguna percepción directa del movimiento del avión: incluso si miran por la ventanilla y ven pasar el paisaje, podrían pensar que éste es sólo una maqueta que se desliza lentamente hacia atrás del avión.

El movimiento es siempre relativo: al decir que "un objeto se mueve", siempre debe establecerse "con respecto a qué". Por ejemplo, el primer pasajero está en reposo respecto del segundo, pero está en movimiento respecto a la persona en el suelo. Ambas descripciones son igualmente válidas.

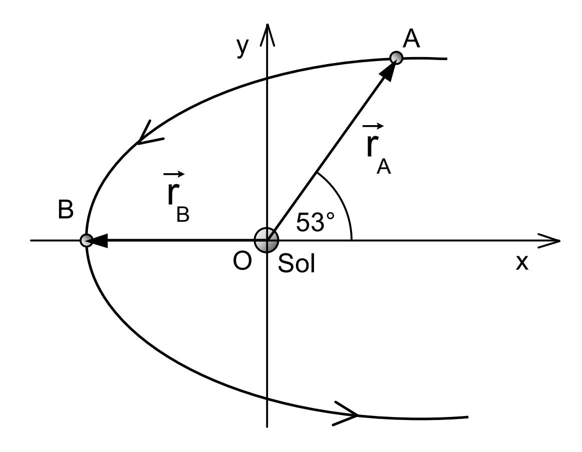
Por muchos siglos, los antiguos astrónomos intentaron describir el movimiento de los planetas con respecto a la Tierra. Nicolás Copérnico comprendió que dicha descripción resultaba mucho más simple si los movimientos se describían con respecto al Sol.

Llamaremos ***observador*** a una persona (real o hipotética) o a un instrumento que puede registrar la posición de un cuerpo en función del tiempo. Para poder describir el movimiento de un cuerpo, cada observador define un sistema de referencia, generalmente un sistema de coordenadas cartesianas y un instante inicial para el tiempo.

Posición

El vector posición $\vec{r}$ de un cuerpo es el trazo dirigido desde el origen del sistema de coordenadas, hasta la posición del cuerpo en un instante dado. Si el cuerpo está en movimiento respecto al observador, el vector posición cambia en dirección, en magnitud o en ambas.

Ejemplo: Un cometa recorre una órbita elíptica alrededor del Sol, con un perihelio (mínima distancia al Sol) de 0,8[UA]. Escribamos el vector posición del cometa cuando pasa por el punto A ubicado a 1[UA] de Sol, como se indica en la figura, y también cuando pasa por el perihelio B.



Como se conocen las distancias con respecto al Sol, escogemos a éste, como el origen de nuestro sistema de referencia:

$$\vec{r}_A = 1[UA]\cdot \cos 53°\ \hat{i} + 1[UA]\cdot \text{sen} 53°\ \hat{j} \approx (0,6\,\hat{i} + 0,8\ \hat{j})\,[UA]$$

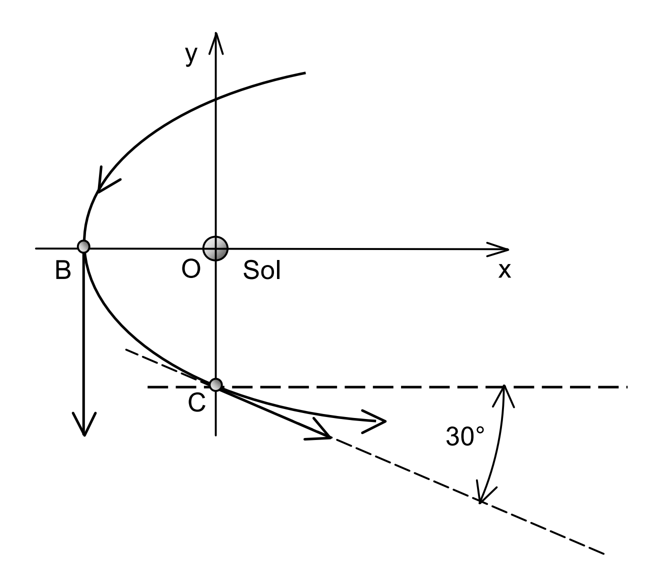
$$\vec{r}_B = -0,8[UA]\ \hat{i} + 0\ \hat{j} \approx -0,8\hat{i}\,[UA].$$

La posición de un cuerpo en un instante queda determinada por su vector posición en ese instante.

Velocidad y aceleración

El vector velocidad de una partícula tiene magnitud igual a la rapidez instantánea de la partícula, y dirección tangencial a la trayectoria en el sentido del movimiento.

Ejemplo: El cometa del ejemplo anterior pasa por B con rapidez 8,0[UA/año]. Al pasar por el punto C su rapidez es de 5,0[UA/año] . En ese punto la recta tangencial a la trayectoria forma un ángulo de 30º con el eje X. El cometa demora 0,6[año] en viajar desde B hasta C. Determinar el vector aceleración media con que se mueve el cometa cuando va desde B hasta C.



Determinemos primero el vector **velocidad** del cometa al pasar por B, y al pasar por C.

$$\vec{v}_B = -8{,}0\,\hat{j}\ [UA/año]$$

$$\vec{v}_C = 5\,[UA/año]\cdot\cos 30°\,\hat{i} - 5\,[UA/año]\cdot \text{sen}30°\,\hat{j} \approx (4{,}3\,\hat{i} - 2{,}5\,\hat{j})\,[UA/año]$$

Calculemos el vector ***cambio de velocidad*** $\Delta\vec{v}$ del cometa en el intervalo de tiempo de 0,6[año] que demora en viajar desde B hasta C.

$$\Delta\vec{v}_{B\to C} = \vec{v}_C - \vec{v}_B = (4{,}3\,\hat{i} - 2{,}5\,\hat{j})\,[UA/año] - (-8{,}0\,\hat{j}\ [UA/año])$$

$$= (4{,}3\,\hat{i} + 5{,}5\,\hat{j})\,[UA/año]$$

Finalmente, calculemos el ***vector aceleración media*** cuando el cometa se mueve desde B hasta C.

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{\Delta t}$$

Observe que el vector aceleración ***media*** se define en función de dos velocidades ***instantáneas***.
Reemplazando los valores de las velocidades y del intervalo de tiempo:

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_C - \vec{v}_B}{\Delta t} = \frac{(4{,}3\,\hat{i} + 5{,}5\,\hat{j})\,[UA / año]}{0{,}6[año]} \approx (7{,}2\,\hat{i} + 9{,}2\,\hat{j})\,[UA / año^2]$$

El vector aceleración media tiene la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{v}$ **.**

El vector aceleración media no está necesariamente dirigido en la dirección tangencial a la trayectoria, como puede observarse en este ejemplo.

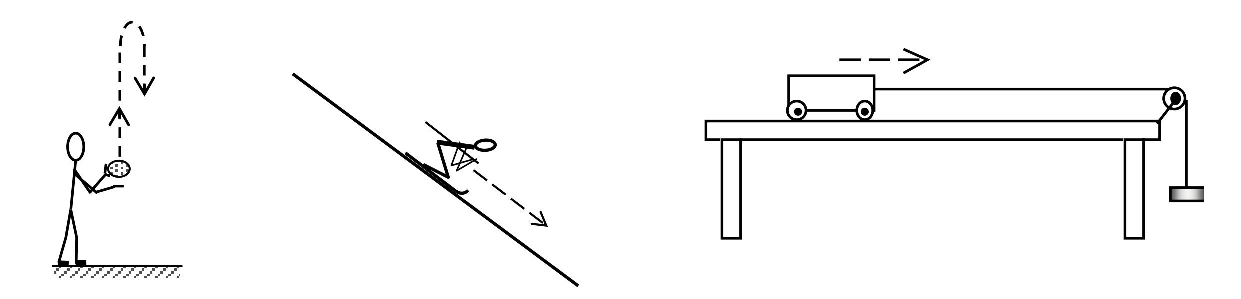
Es posible definir el ***vector aceleración instantánea*** como el vector aceleración media para un intervalo muy pequeño de tiempo:

$$\vec{a}_{instantánea} \approx \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\text{, para un } \Delta t \text{ muy pequeño}$$

Dejaremos para más adelante el cálculo del vector aceleración instantánea, en el caso más general de movimientos en trayectorias curvas. En el resto del capítulo nos limitaremos a movimientos rectilíneos y a casos en que el vector aceleración es constante.

Movimiento en una dimensión

Estudiaremos el movimiento de cuerpos que recorren trayectorias rectilíneas, como los ejemplos explicitados en las figuras que van a continuación.

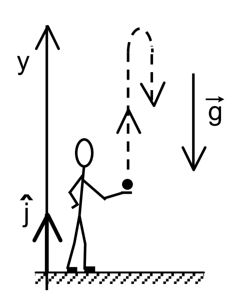


En todos los casos de tales movimientos, siempre es posible escoger un eje de referencia, de modo que los vectores posición, velocidad y aceleración de la partícula, se puedan expresar como

$$\vec{r} = r_X\,\hat{i}\,, \quad \vec{v} = v_x\,\hat{i} \quad \text{y} \quad \vec{a} = a_X\,\hat{i}\,, \text{ si el eje es nominado X.}$$

Las componentes escalares de estos vectores serán positivas o negativas, si las direcciones de dichos vectores coinciden con la dirección del eje de referencia o son contrarias a esta dirección.

Por ejemplo, considere un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba como se muestra en la figura. Si escogemos el ***eje y*** en dirección vertical hacia arriba, el vector posición queda expresado como: $\vec{r} = y\hat{j}$, siendo ***y*** la coordenada de la posición del cuerpo. El vector velocidad queda: $\vec{v} = v_y \hat{j}$ en donde v_y es la componente escalar del vector velocidad en la dirección del eje y. No debe confundirse v_y con la rapidez v del cuerpo, ya que está última es siempre positiva.



En cambio, v_y será positiva si el cuerpo se mueve en sentido positivo del eje y, pero será negativa cuando el cuerpo se mueve en sentido contrario. Finalmente, el vector aceleración queda expresado como: $\vec{a} = a_y \hat{j}$, en donde a_y es la componente escalar del vector aceleración en dirección del eje y.

En este lanzamiento, si se desprecia el roce del aire, el vector aceleración del cuerpo es constante en magnitud y dirección, tanto de subida como de bajada y corresponde a la aceleración de gravedad $\vec{g}$ de modo que:

$$\vec{g} = \left(9{,}8[m/s^2]\,,\text{verticalmente hacia abajo}\right) = -9{,}8\,\hat{j}[m/s^2]\ ,$$

es decir, $\vec{a} = \vec{g}$, siendo $a_y = -g$, en donde g representa la magnitud de la aceleración de gravedad, $g \approx 9{,}8\left[m/s^2\right]$.

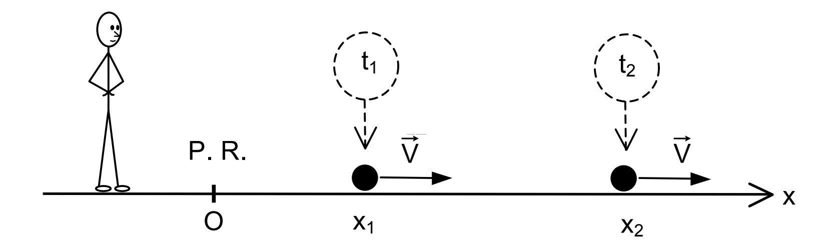
En las siguientes secciones estudiaremos movimientos en una dimensión. Como todos los vectores están a lo largo de una sola dirección basta referirse a sus componentes escalares. No debe olvidarse que éstas pueden tener signo negativo, cuando los correspondientes vectores tienen dirección opuesta a la del eje correspondiente.

En general, usamos el término rapidez para referirnos a cambios en el tiempo de una cantidad física escalar y el de ***velocidad*** cuando consideramos el carácter vectorial de una cantidad física que varía en función del tiempo. Sin embargo, en forma coloquial y cuando por el contexto del asunto que se examina no se produzcan ambigüedades, empleamos ocasionalmente velocidad y rapidez como sinónimos.

Movimiento rectilíneo con rapidez constante

Consideremos un movimiento de rapidez constante a lo largo de una trayectoria rectilínea. La posición instantánea del móvil la indicamos por su distancia a un punto de referencia elegido en la trayectoria.

Llamemos "eje x" a un eje de coordenadas que coincide con la trayectoria del móvil y que tiene su origen en el punto de referencia (P.R.) escogido.



La posición del móvil en el instante t la indicamos por la función $x = x(t)$. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = x(t_1) \\ \\ x_2 = x(t_2) \end{array}\right\} \text{ es la posición del móvil en el instante } \left\{\begin{array}{l} t_1 \\ \\ t_2 \end{array}\right.$$

La rapidez media para el intervalo de tiempo está dada por:

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En un movimiento de **rapidez constante**, la rapidez instantánea coincide con la rapidez media en cualquier instante del movimiento.

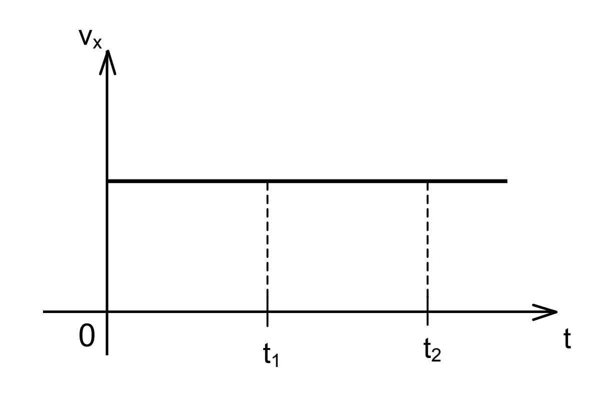
Luego: $\bar{v}_x = v_x$

donde v_x representa a la rapidez instantánea, constante.

Reemplazando y despejando tenemos que:

$$v_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

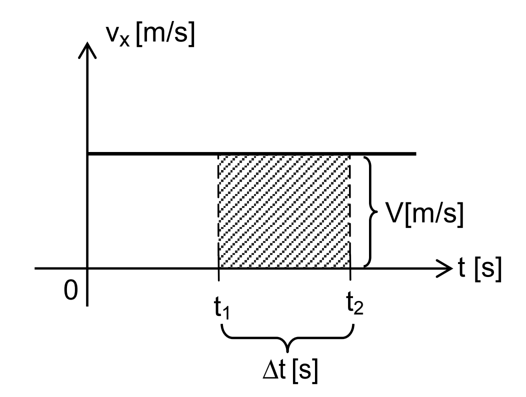
$$x_2 - x_1 = v_x \cdot (t_2 - t_1)$$



La diferencia de posición $x_2 - x_1$ corresponde en este caso a la distancia recorrida por el móvil en el intervalo de tiempo $t_2 - t_1$.

Si examinamos el gráfico, "v_x en función de t", vemos que el rectángulo que corresponde al intervalo $t_2 - t_1$ tiene como lados $v_x = V$ [m/s] y $t_2 - t_1 = \Delta t\,[\text{s}]$. El producto de los lados de ese rectángulo nos da el "área"

$$V\,[\text{m/s}] \cdot \Delta t\,[\text{s}] = \Delta x\,[\text{m}],$$



que es igual al valor de $x_2 - x_1$. Esto lo expresamos diciendo que el "área bajo la curva" en el gráfico v_x en función de t, para un intervalo Δt dado, es igual al cambio de posición Δx en ese intervalo. El nombre de "área" se usa por la analogía con el método de calcular el área geométrica, pero es en realidad un concepto diferente. Note que:

$$\dim\begin{pmatrix}\text{área bajo la}\\ \text{curva } v_x(t)\end{pmatrix} = \dim(\text{ rapidez }) \cdot \dim(\text{ tiempo }) = \dim(\text{ distancia })$$

$$= \left(\mathcal{L} \cdot \tau^{-1}\right) \cdot \tau = \mathcal{L}$$

es decir, la dimensión de esta "área" es longitud.

La expresión $x_2 - x_1 = v_x \cdot (t_2 - t_1)$ relaciona dos posiciones del móvil correspondiente a dos instantes dados. Los instantes t_1 y t_2 son dos instantes cualesquiera mientras se mantiene la condición de movimiento rectilíneo con rapidez constante. Entonces, si llamamos:

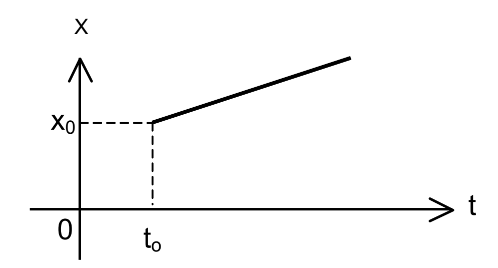
$$\left.\begin{array}{l} x_0 = x(t_1 = t_0) \\ \\ x(t) = x(t_2 = t) \end{array}\right\} \text{ la posición del móvil en el instante } \left\{\begin{array}{l} t_1 = t_0 \\ \\ t_2 = t \end{array}\right.$$

obtenemos:

$$x(t) - x_0 = v_x\,(t - t_0)$$

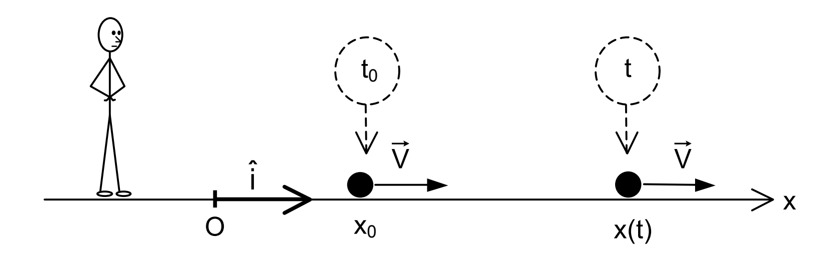
$$x(t) = x_0 + v_x\,(t - t_0)$$

Esta última ecuación nos da la ***posición*** del móvil para cada instante t de este movimiento, siendo x_0 su posición inicial para el instante de referencia t_0 .



La función $x = x_0 + v_x\left(t - t_0\right)$ que describe la posición instantánea de un móvil en movimiento rectilíneo a lo largo del eje x con rapidez constante, es una "función lineal del tiempo".

Observemos, también, que en un movimiento rectilíneo con rapidez constante el móvil tiene **velocidad constante**.



La velocidad constante $\vec{v}$ la expresamos en este caso por:

$$\vec{v} = v_x\,\hat{i}$$

siendo su magnitud:

$$v = \left\|\vec{v}\right\| = \left|v_x\right|$$

que es constante para un movimiento con rapidez constante.

Resolvamos a continuación algunos ejemplos sobre esta materia.

- Suponga que un barco se acerca a un puerto siguiendo una trayectoria rectilínea con rapidez constante de 10[mile/h] . En cierto instante el barco está a 28[mile] del puerto. ¿Cuánto tiempo más tarde debe salir la lancha del práctico de bahía, para que viajando directamente hacia el barco con rapidez constante de 25[mile/h], lo encuentre a 2,0[mile] del puerto?

Llamemos " eje X " a la recta que coincide con las trayectorias del barco y de la lancha. Sea $t_{OB} = 0$ el instante en que el barco está a 28 [mile] del puerto y t_{OL}, el instante en que la lancha sale del puerto.



→ Ecuación del movimiento rectilíneo de $v_x = \text{cte.}$

$$x(t) = x_0 + v_x(t - t_0)$$

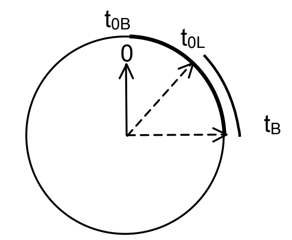
→ Datos del barco

$x_{0B} = 28$ [mile]

$v_{xB} = -10$ [mile/hora]

$t_{0B} = 0$

Usamos un único cronómetro para los dos móviles



$t_B = ?$, instante en que el barco pasa por $x = 2$[mile].

$x(t_B) = 2$ [mile]

→ Nota: se debe tener cuidado de expresar los datos del problema en unidades coherentes. Al reemplazar los datos en la ecuación del movimiento no escribiremos las unidades, pero es indispensable incluirlas en el resultado. Estas observaciones se seguirán en los problemas que vienen a continuación.

→ Reemplazo en la ecuación del movimiento de los datos del barco.

$$2 = 28 - 10(t_B - 0)$$

$$t_B = \frac{2 - 28}{-10} = 2{,}6\,[\text{h}]$$

→ Datos de la lancha

$x(t) = 2$[mile] $\qquad x_{0L} = 0$

$v_{xL} = 25$[mile/hora] $\qquad t_L = 2{,}6$[h]

$t_{0L} = ?$, instante en que debe partir la lancha para encontrar al barco a 2 [mile] del puerto.

→ Reemplazo en la ecuación del movimiento de los datos de la lancha

$$2 = 0 + 25(2{,}6 - t_{0L})$$

$$\frac{2}{25} = 2{,}6 - t_{0L}$$

$$t_{0L} = 2{,}6 - 0{,}80 = 2{,}52\ [\text{h}]$$

La lancha debe salir 2,52[h] después del instante en que el barco pasa por el punto de 28[mile] del puerto.

- Dos objetos A y B se mueven a lo largo de un mismo riel rectilíneo, que tiene 2,3[m] de largo, de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$x_A(t) = 3{,}1t \qquad\qquad x_B(t) = 40 + 7{,}8t$$

donde las "x" designan a las distancias medidas desde un extremo del riel y están dadas en [cm] , y los tiempos, con el mismo instante de referencia para ambos objetos, se miden en [s]. Calculemos la "rapidez media de alejamiento" entre estos objetos.

En el tiempo t la separación del objeto B respecto al A es:

$$s(t) = x_B(t) - x_A(t)$$

$$s(t) = (40 + 7{,}8t) - 3{,}1t$$

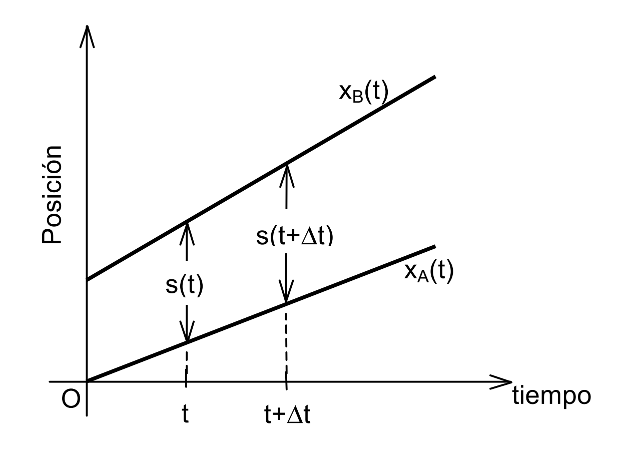
$$s(t) = 40 + 4{,}7t$$

Entonces, en el instante $t + \Delta t$ la separación es:

$$s(t + \Delta t) = 40 + 4{,}7 \cdot (t + \Delta t)$$

$$= (40 + 4{,}7t) + 4{,}7 \cdot \Delta t$$

$$= s(t) + 4{,}7 \cdot \Delta t$$



Con lo cual, el correspondiente "incremento de separación" resulta:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = 4{,}7 \cdot \Delta t$$

y por lo tanto, la "rapidez media de alejamiento" es:

$$\bar{v}_a = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4{,}7 \cdot \Delta t}{\Delta t} = 4{,}7\,[\text{cm/s}]$$

Dado que la rapidez media $\bar{v}_a$ resulta independiente del incremento de tiempo Δt, el alejamiento de los objetos se efectúa con rapidez constante.

Note que la conclusión de que los cuerpos se alejan entre sí con rapidez constante podemos obtenerla directamente al examinar la expresión:

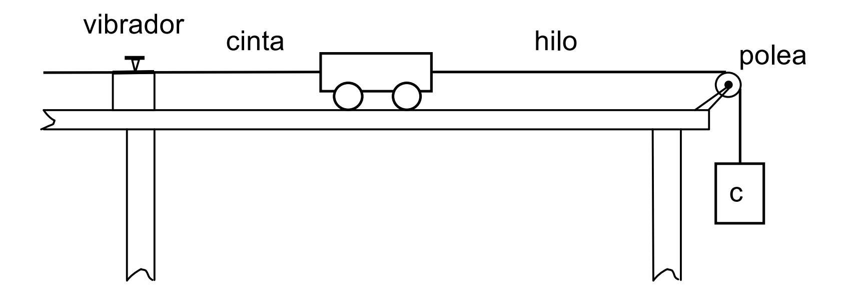
$$s(t) = (40 + 4{,}7t)\,[\text{cm}] \quad \text{con} \quad t \quad \text{en [s]}.$$

que nos dice que la separación inicial es $s_0 = s(0) = 40\,[\text{cm}]$ y que la rapidez de alejamiento es $v_a = 4{,}7\,[\text{cm/s}]$, constante.

Le advertimos que debe tener en cuenta que el procedimiento seguido, y por lo tanto, el resultado obtenido, son válidos sólo mientras ambos objetos se mueven sobre el riel. Dejamos a usted la tarea de calcular el instante a partir del cual las expresiones obtenidas dejan de tener significado físico.

Movimiento rectilíneo: experimento

A continuación le presentamos un experimento realizado con un carrito que puede moverse en un riel rectilíneo.



Para registrar las características del movimiento del carrito se une a él una cinta de papel que pasa por un "vibrador". A medida que el carrito se desplaza, el vibrador imprime marcas sobre la cinta a intervalos iguales de tiempo.

Para producir el movimiento soltamos el cuerpo C que está unido al carrito mediante un hilo como se muestra en la figura anterior.

Una de las cintas obtenidas al ejecutar este experimento se reproduce, al costado de la página. Los puntos consecutivos fueron marcados a iguales intervalos de tiempo, de 200[ms]. La distancia entre dos puntos consecutivos corresponde a la distancia recorrida por el carrito en 200[ms]. Con mediciones efectuadas en la cinta confeccionamos la siguiente tabla de valores.

t [s]	s [cm]	Δs [cm]	$\bar{v}$ [cm/s]
0	0		
		2,20	11,0
0,200	2,20		
		4,43	22,2
0,400	6,63		
		6,92	34,6
0,600	13,55		
		9,46	47,3
0,800	23,01		
		11,96	59,8
1,000	34,97		
		14,50	72,5
1,200	49,47		
		17,04	85,2
1,400	66,51		
		19,56	97,8
1,600	86,07		

Observación: Las distancias entre los puntos están en proporción a la tabla.

Donde:

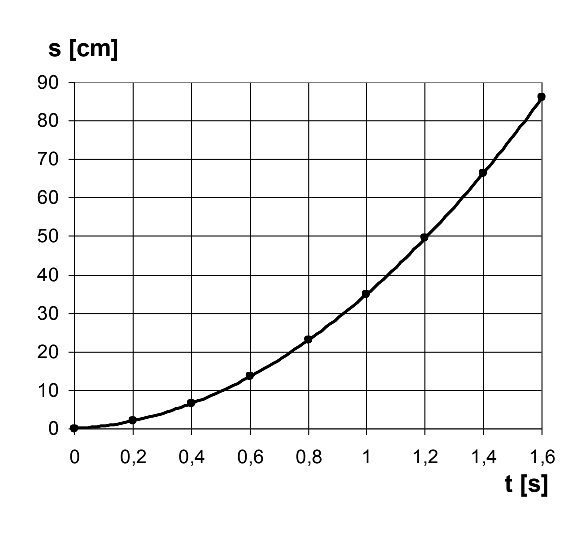
t es el tiempo transcurrido desde la iniciación del movimiento.

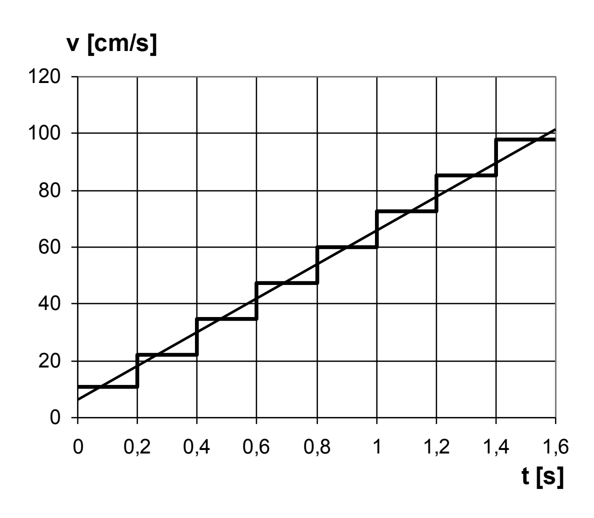
s es la distancia recorrida por el carrito durante el tiempo t.

Δs es la distancia recorrida en cada intervalo de 0,200[s].

$\overline{v} = \Delta s / \Delta t$ es la correspondiente rapidez media.

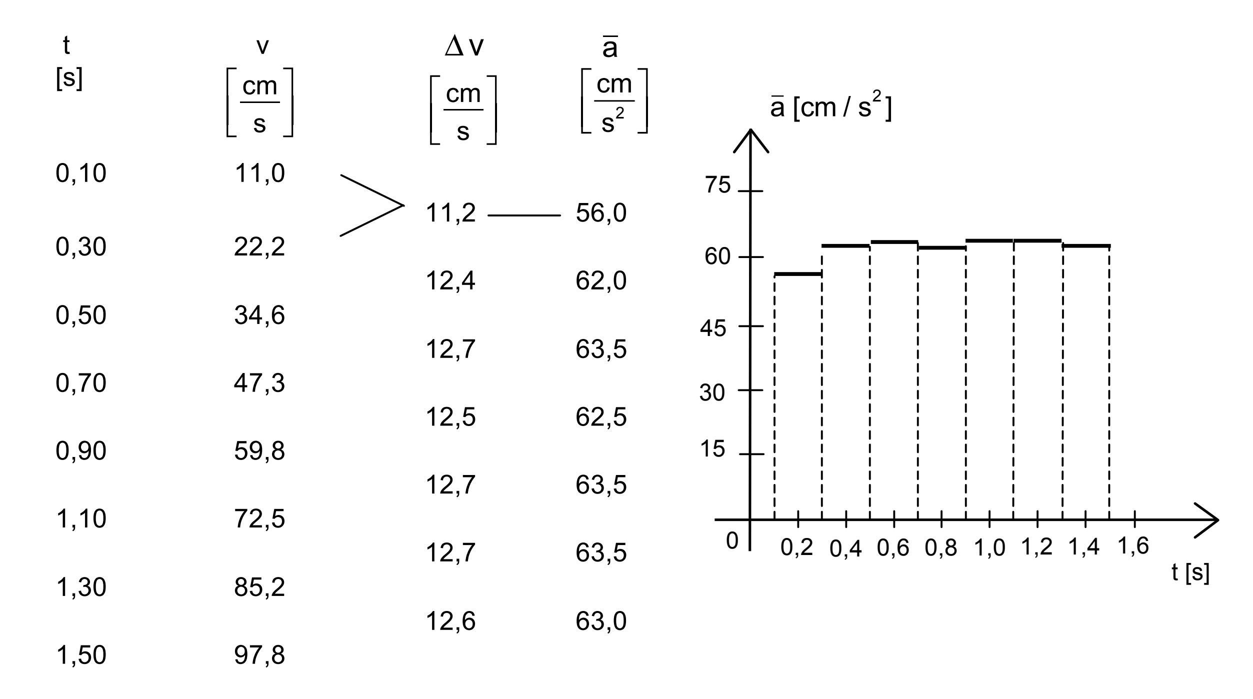
Mediante los datos de la tabla construimos gráficos que representan la distancia recorrida y la rapidez media en función del tiempo.





Observamos que para iguales intervalos de tiempo los incrementos de la distancia recorrida por el móvil son cada vez mayores y que la rapidez no es constante, lo que indica un movimiento acelerado.

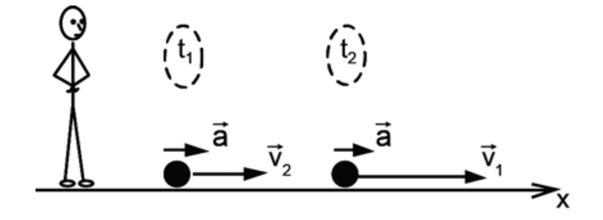
Al hacer el gráfico rapidez media versus tiempo, obtenemos una curva escalonada. Por otra parte, como sabemos por la experiencia que la rapidez del móvil no va cambiando a saltos, representamos la rapidez instantánea por una curva continua, en este caso por una recta que une los puntos medios de los trazos que representan las rapideces medias. Con los valores de la rapidez instantánea correspondientes a esos puntos medios y sus respectivos instantes confeccionamos la siguiente tabla:



t [s]	v [cm/s]	Δv [cm/s]	$\bar{a}$ [cm/s²]
0,10	11,0		
		11,2	56,0
0,30	22,2		
		12,4	62,0
0,50	34,6		
		12,7	63,5
0,70	47,3		
		12,5	62,5
0,90	59,8		
		12,7	63,5
1,10	72,5		
		12,7	63,5
1,30	85,2		
		12,6	63,0
1,50	97,8		

Los valores de esta tabla nos indican, dentro de los errores de medición, que la aceleración en este movimiento puede considerarse constante. La aceleración en el primer intervalo de tiempo es diferente debido a la influencia del modo como se inicia el movimiento del carrito.

Un movimiento rectilíneo con aceleración constante



Consideremos un objeto en movimiento tal que su trayectoria es rectilínea y su aceleración es constante.

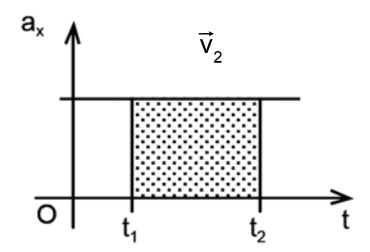
Sean $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ las velocidades del móvil en los instantes t_1 y t_2, respectivamente, con las direcciones indicadas en la figura adjunta.

Dado que la aceleración es constante, la aceleración media tiene el mismo valor para cada instante, por tanto:

$$a_x = \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

de donde:

$$\Delta v_x = v_2 - v_1 = a_x \cdot (t_2 - t_1)$$

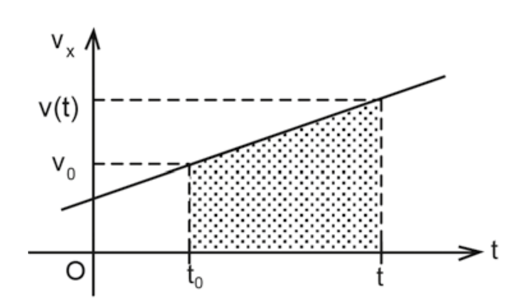


Notemos que la variación de rapidez en un intervalo de tiempo corresponde al "área bajo la curva de aceleración versus tiempo" en ese intervalo dado.

Si en un instante de referencia t_0 la rapidez es v_0, entonces, en un instante arbitrario t, la rapidez $v_x(t)$ puede escribirse, usando la fórmula anterior como:

$$v_x(t) = v_0 + a_x(t - t_0)$$

Consideremos a continuación el gráfico de la rapidez v_x en función del tiempo. Calculemos el área bajo la curva en el intervalo (t_0 , t).



$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0)$$

$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}(v - v_0)(t - t_0) \cdot \frac{t-t_0}{t-t_0}$$

$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{v - v_0}{t - t_0}(t-t_0)^2 \quad \text{donde} \quad a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \quad \text{porque } a = \text{cte.}$$

$$A = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2,$$

El área bajo la curva representa el desplazamiento o cambio de posición de la partícula Δx .

Si la posición es x_0 en $t_0 = 0$ y $x(t)$ en el instante t , se cumple que:

$$x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a_x(t-t_0)^2 .$$

Esta es la ecuación de la posición de un móvil para un movimiento rectilíneo de aceleración constante.

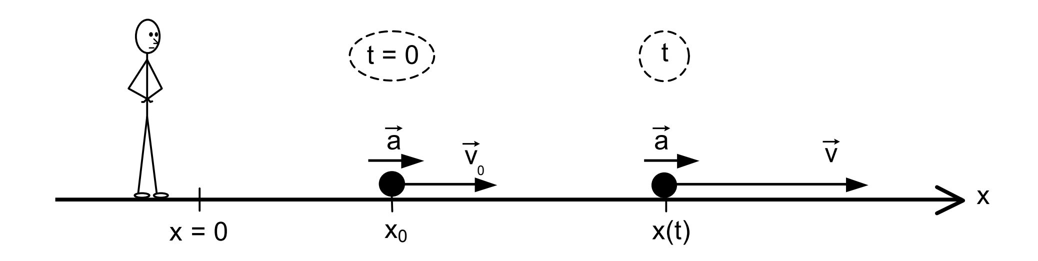
Resumiendo, en la descripción del movimiento de un objeto que sigue una trayectoria rectilínea y cuya aceleración es constante, podemos llamar:

“eje x” a un eje de coordenadas coincidente con la trayectoria rectilínea.

$t = t_0$ a un instante de referencia.

x_0 a la posición del móvil en t_0 .

v_0 a la rapidez del móvil en t_0 .



Con tal notación, las características del movimiento quedan determinadas por las ecuaciones:

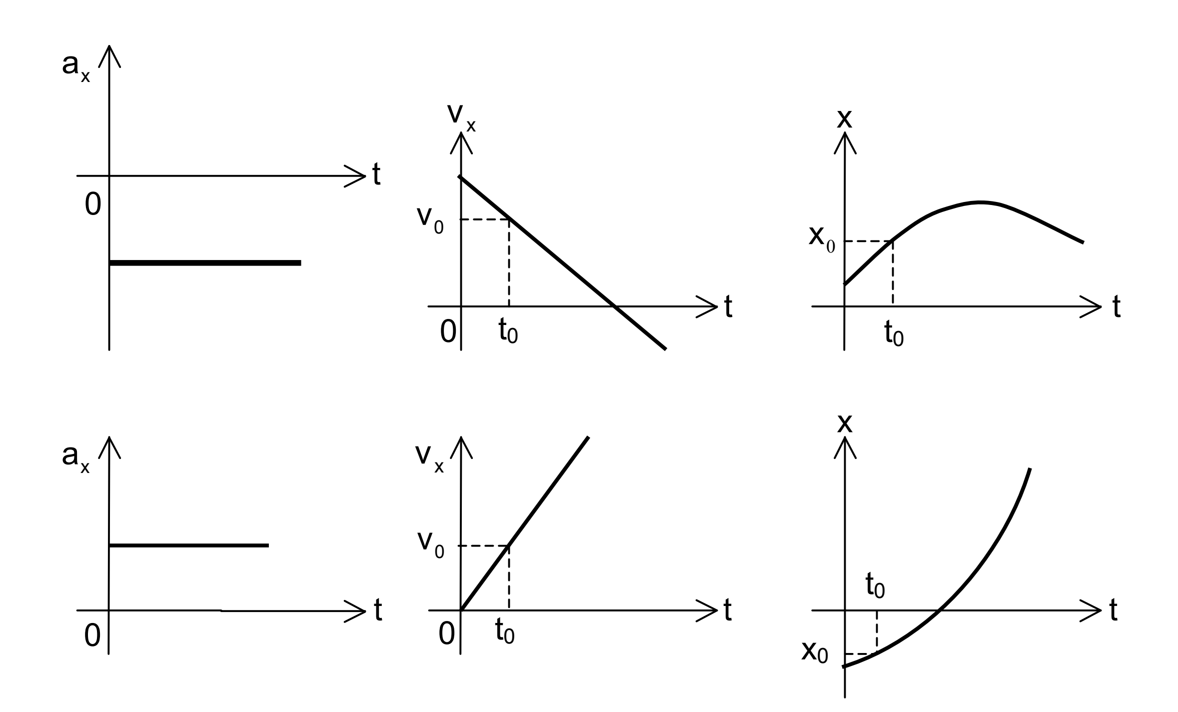
a_x ………………………………………………………...aceleración constante.

$v_x(t) = v_{0X} + a_x \cdot (t - t_0)$ ………………………..rapidez instantánea.

$x(t) = x_0 + v_{0X}(t - t_0) + \frac{1}{2} a_x \cdot (t - t_0)^2$ …….posición instantánea.

que nos dicen que para un movimiento de aceleración constante, la rapidez es una función lineal del tiempo y la posición del móvil es una función cuadrática del tiempo.

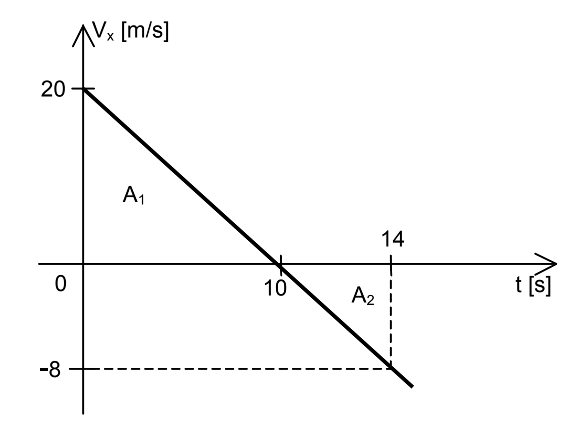
Estas ecuaciones quedan ilustradas para dos casos particulares, por los siguientes gráficos:



Ejemplos

- Una partícula se mueve a lo largo del eje x de modo que la componente v_x de su velocidad varía con el tiempo según el gráfico adjunto.

Determine el cambio de posición y el camino recorrido por la partícula.



- Usando el concepto "área bajo la curva"

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 20\,[m/s] \cdot 10\,[s] = 100\,[m]$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot -8\,[m/s] \cdot 4\,[s] = -16\,[m]$$

Observe que el área A_2 resulta negativa. Esto significa que el móvil está moviéndose en dirección contraria al eje x.

Cambio de posición $= A_1 + A_2 = 100 - 16 = 84\,[m]$

En $t = 14[s]$ la partícula está a 84[m] a la derecha del punto en que estaba en $t = 0$.

Camino recorrido $= A_1 + \left| A_2 \right| = 100 + 16 = 116$ [m]

Observe además, que no hay datos en el enunciado que nos permitan saber dónde está la partícula en cualquier instante.

Suponga a continuación que la partícula pasó por el origen en $t = 0$, entonces:

- Aplicando la ecuación $\mathbf{x(t) = x_0 + v_{0X}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x \cdot (t - t_0)^2}$:

$$v_0 = 20\,[m/s] \quad ; \quad t_0 = 0 \quad ; \quad t = 14\,[s] \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad a = -2\,[m/s^2]$$

⇒ Posición

$$x(14) = 0 + 20 \cdot 14 - \frac{1}{2}\,2 \cdot 14^2$$

$$x(14) = 280 - 196 = 84\,[m]$$

⇒ Camino recorrido de $t = 0$ a $t = 10$.

$$v_0 = 20\,[m/s] \quad ; \quad x_0 = 0 \quad ; \quad a = -2\,[m/s]$$

$$x(10) = 20 \cdot 10 - \frac{1}{2}\,2 \cdot 10^2 = 100\ [m]$$

⇒ Camino recorrido de $t = 10\,[s]$ a $t = 14\,[s]$.

Entre los instantes 10[s] y 14[s] la partícula se mueve en dirección opuesta al eje x. El cambio de posición es:

$$\begin{aligned} \Delta x &= x(14) - x(10) \\ &= 84[m] - 100[m] \\ &= -16[m] \end{aligned}$$

El camino recorrido en este intervalo es igual al valor absoluto del cambio de posición.

$$d = |\Delta x| = 16[m]$$

Total del camino recorrido $= 100 + 16 = 116[m]$

- La ecuación $x(t) = x_0 + v_{0X}(t - t_0) + \frac{1}{2}a_x \cdot (t - t_0)^2$ **es válida cualesquiera que sean los signos de v_{ox} y de a_x.**

Pero $(x(t) - x_0)$ no necesariamente es la distancia recorrida por la partícula.

- Supongamos que el despegue de un jet se efectuó en 40[s] con aceleración constante de 1,50[m/s²]. Calculemos la distancia recorrida por el jet sobre la pista durante el tiempo transcurrido desde la partida hasta el despegue.

$t_0=0$
$V_0=0$
$x_0=0$
$t = 40[s]$
x

$$v_0 = 0 \quad ; \quad a = 1{,}50[m/s^2] \quad ; \quad t = 40[s]$$

$$x(t) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$x(40) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}50 \cdot 40^2 \ , \qquad x(40) = \text{distancia recorrida}$$

Distancia recorrida para el despegue = 1200 [m].

- Dos cuerpos A y B se mueven rectilíneamente en el mismo sentido con aceleraciones constantes de 2,0[m/s²] y 1,5[m/s²] respectivamente. En cierto instante el cuerpo A se encuentre a 25[m] delante de B y las velocidades de A y B son 11[m/s] y 23[m/s] respectivamente. Calculemos cuándo y dónde B alcanza a A.

B
$t_0 = 0$
$v_{0B} = 23$ [m/s]
$a_B = 1{,}5$ [m/s²]

A
$t_0 = 0$
$v_{0A} = 11$ [m/s]
$a_A = 2{,}0$ [m/s²]

t = ?

$X_{0B} = 0$
$X_{0A} = 25$[cm]
x = ?
x [m]
Encuentro de A y B

Ecuaciones del movimiento: $\mathbf{v_x(t) = v_0 + a_x\,(t - t_0)}$

$$\mathbf{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a_x\,(t - t_0)^2}$$

Ecuaciones para A: $v_A = 11 + 2,0\,t$

$$x_A = 25 + 11t + \frac{1}{2}\,2,0\,t^2$$

Ecuaciones para B: $v_B = 23 + 1,5\,t$

$$x_B = 23t + \frac{1}{2}\,1,5\,t^2$$

Cuando B alcanza a A, se cumple que $x_A = x_B$.

Luego.

$$25 + 11t + \frac{1}{2}\cdot 2,0\,t^2 = 23\,t + \frac{1}{2}\cdot 1,5\,t^2$$

$$25 + 11t + t^2 = 23\,t + 0,75\,t^2$$

$$0,25\,t^2 - 12\,t + 25 = 0$$

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4\cdot 0,25\cdot 25}}{0,5} \Rightarrow \begin{matrix} t_1 = 45,8[s] \\ t_2 = 2,2[s] \end{matrix}$$

Se tiene dos valores para t. Significa que B alcanza a A en $t = 2,2[s]$. Pero como A tiene aceleración mayor que la de B, logra alcanzar a B a los 45,8[s].

Vamos a calcular la distancia recorrida por B hasta alcanzar a A.

$$x_B = 23\cdot 2,2 + \frac{1}{2}\cdot 1,5\cdot 2,2^2$$

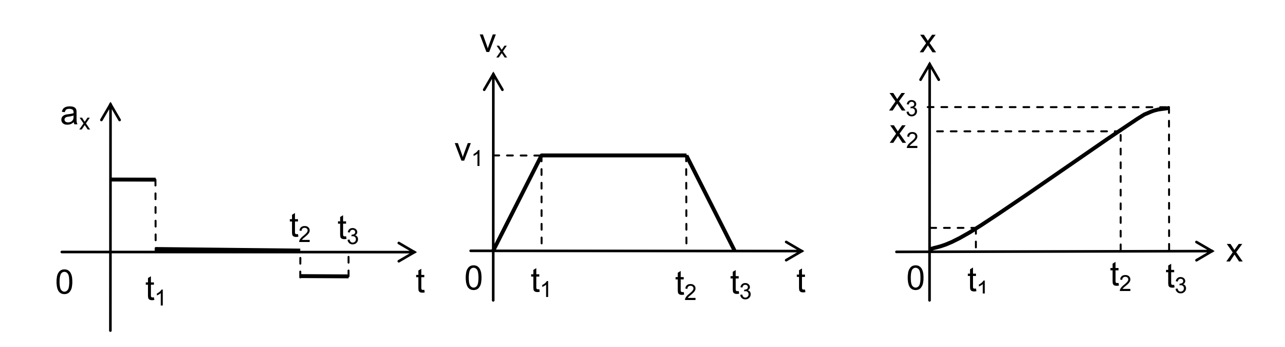
$x_B = 54,2[m]$ distancia recorrida por B hasta alcanzar a A.

Usted puede intentar calcular lo recorrido por A o por B desde $t_0 = 0$ hasta el instante 45,8 [s].

- Un cuerpo que sigue una trayectoria rectilínea sale del reposo con aceleración de 3,0[m/s^2], la que mantiene a lo largo de 600[m]. Después continúa con velocidad constante durante 8,0[min] y finalmente desacelera a razón de 0,90[m/s^2] hasta detenerse. Determinemos la aceleración, la rapidez y la posición del cuerpo en función del tiempo.

Elijamos como “eje x” la dirección del movimiento y $t_0 = 0$ el instante en que parte el cuerpo del origen $x_0 = 0$. Escribiremos las ecuaciones de movimiento usando las unidades 1[s] , 1[m] , 1[m/s] y 1[m/s^2] para tiempo, distancia, rapidez y aceleración respectivamente.

En este movimiento podemos considerar tres etapas, según los valores de la aceleración. Estas etapas las podemos visualizar en los siguientes gráficos cualitativos.



En la primera etapa el cuerpo recorre una distancia $x_1 = 600\,[m]$ con aceleración constante $a_1 = 3{,}0\,[m/s^2]$.

La rapidez en esta etapa del movimiento es:

$$v_x(t) = a_x\ t = 3{,}0\,t \quad \text{siendo} \quad v_0 = 0$$

y la posición instantánea está dada por:

$$x(t) = \frac{a_1}{2}\,t^2 = 1{,}5\,t^2$$

Luego, el instante t_1 en que el cuerpo está a 600[m] del origen está dado por:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 600[m]}{3{,}0[m/s^2]}} = 20[s]$$

y la rapidez en el instante $t_1 = 20[s]$ es $v_x(t_1) = v_1 = 60\,[m/s]$.

La segunda etapa del movimiento comienza en $t_1 = 20\,[s]$ a $x_1 = 600\,[m]$ de distancia del origen y con rapidez $v_1 = 60\,[m/s]$.

La aceleración es $a_2 = 0\,[m/s^2]$.

La rapidez es $v_2 = v_1 = 60\,[m/s]$, constante.

La posición está descrita por la ecuación: $x(t) = 600 + 60 \cdot (t - 20)$ que es válida hasta $t_2 = 500\,[s]$, que corresponde a los 8,0[min] de la segunda etapa más los 20[s] de la primera.

La posición alcanzada por el cuerpo al término de esta segunda etapa es:

$$x_2 = x(t_2) = 600 + 60 \cdot 480 = 29{,}4 \cdot 10^3[m]$$

El cuerpo comienza **su tercera etapa** en el instante $t_2 = 500\,[s]$, desde la posición $x_2 = 29{,}4 \cdot 10^3[m]$ con una rapidez $v_2 = 60\,[m/s]$.

Como en esta etapa el cuerpo está sometido a una desaceleración constante de magnitud $a_3 = 0{,}90\,[m/s^2]$, las ecuaciones que rigen para la rapidez y la posición instantánea en esta parte del movimiento son:

$$v_x(t) = v_2 - a_3 \cdot (t - 500) = 60 - 0{,}90 \cdot (t - 500)$$

$$x_x(t) = x_2 + v_3 \cdot (t - 500) - \frac{1}{2}\,a_3 \cdot (t - 500)^2$$

$$x_t = 29{,}4 \cdot 10^3 + 60 \cdot (t - 500) - 0{,}45 \cdot (t - 500)^2$$

Estas ecuaciones son válidas hasta el instante t_3 en que el cuerpo se detiene, instante que está determinado por la condición de que el cuerpo se detiene:

$$\text{Luego} \qquad v_x(t_3) = 60 - 0{,}90 \cdot (t_3 - 500) = 0$$

que da el valor $t_3 \simeq 567[s]$.

En resumen, la aceleración, la rapidez y la posición instantáneas del cuerpo están descritas por:

$$a_x(t) = \begin{cases} 3{,}0 & ; \ 0 \le t \le 20[s] \\ 0 & ; \ 20[s] < t \le 500[s] \\ -0{,}90 & ; \ 500[s] < t \le 567[s] \end{cases}$$

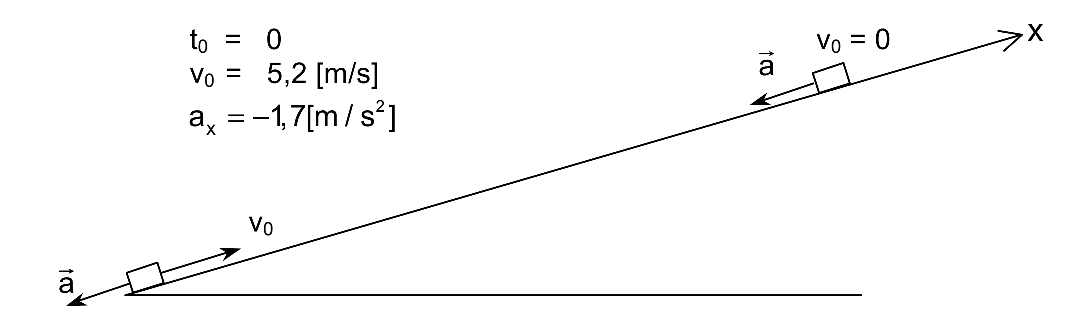
$$v_x(t) = \begin{cases} 3{,}0\,t & ; \ 0 \le t \le 20[s] \\ 60 & ; \ 20[s] \le t \le 500[s] \\ 60 - 0{,}90 \cdot (t - 500) & ; \ 500[s] \le t \le 567[s] \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1{,}5\,t^2 & ; \ 0 \le t \le 20[s] \\ 600 + 60 \cdot (t - 20) & ; \ 20[s] \le t \le 500[s] \\ 29{,}4 \cdot 10^3 + 60 \cdot (t - 500) - 0{,}45 \cdot (t - 500)^2 & ; \ 500[s] \le t \le 567[s] \end{cases}$$

donde t está dado en [s] , $x(t)$ en [m] , $v_x(t)$ en [m/s] y $a_x(t)$ en [m/s²].

Representе usted en gráficos a escala la aceleración, rapidez y posición instantánea en función del tiempo.

- Un pequeño disco es lanzado hacia arriba por un plano inclinado sin roce, con una rapidez inicial de 5,2[m/s]. Debido a la inclinación del plano, el móvil tiene una aceleración $a = -1{,}7\,[m/s^2]$. Determine el instante en que el disco alcanza el punto más alto. Calcule, además, la distancia recorrida por el móvil al cabo de 4,2 [s] de movimiento.



→ Hacemos coincidir el eje x con el plano inclinado.

→ Debido a la aceleración negativa el disco sube hasta un punto en que su velocidad se hace 0 y luego desciende.

→ Ecuaciones del movimiento: $v(t) = v_0 + a\,(t - t_0)$;

$$x(t) = x_0 + v_0\,(t - t_0) + \frac{1}{2}a\,(t - t_0)^2$$

usando los valores: $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 5{,}2[m/s]$, $a_x = -1{,}7[m/s^2]$

las ecuaciones de movimiento quedan:

$$v_x(t) = 5{,}2 - 1{,}7 \cdot t \quad ; \quad t \text{ en [s]}, \quad v_x \text{ en [m/s]}$$

$$x(t) = 0 + 5{,}2 \cdot t + \frac{1}{2}(-1{,}7) \cdot t^2 ; \quad t \text{ en [s], x en [m]}$$

→ En el instante en que el disco está en el punto más alto $v(t) = 0$.

Luego $0 = 5{,}2 - 1{,}7\,t \;\Rightarrow t = \dfrac{5{,}2}{1{,}7} = 3{,}1[s]$, instante de $v(t) = 0$.

→ Posición del móvil en el instante 3,1 [s].

$$x(3{,}1) = 5{,}2 \cdot 3{,}1 - \frac{1}{2}1{,}7 \cdot 3{,}1^2 \approx 8 \text{ [m]}$$

→ Posición del móvil en el instante 4,2 [s].

$$x(4{,}2) = 5{,}2 \cdot 4{,}2 - \frac{1}{2}1{,}7 \cdot 4{,}2^2 \approx 6{,}8 \text{ [m]}$$

Camino recorrido de subida: $8 - 0 = 8[m]$

Camino recorrido de bajada: $8 - 6{,}8 = 1{,}2[m]$

Total camino recorrido: $8 + 1{,}2 = 9{,}2[m]$

• Las ecuaciones que describen la posición de dos cuerpos A y B que se mueven sobre una misma recta son respectivamente:

$$x_A(t) = 3{,}2t^2 - 6{,}0\,t - 47 \quad ; \quad 0 \le t \le t_c$$

$$x_B(t) = 29 + 8{,}5\,t - 4{,}1t^2 \quad ; \quad 0 \le t \le t_c$$

con x expresado en metros, y t en segundos. Representemos la posición y la rapidez de cada cuerpo en función del tiempo. Calculemos el instante t_c y la coordenada x_c del choque y las correspondiente velocidades en ese instante.

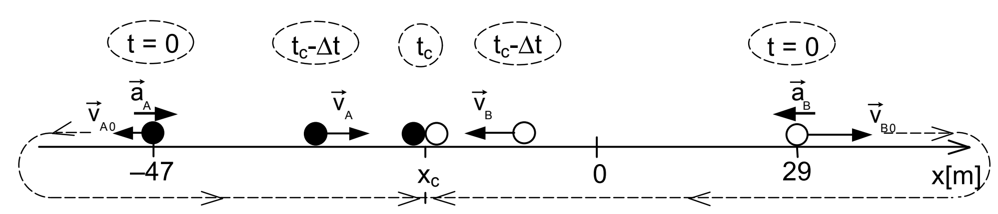
Por la estructura de las ecuaciones de posición nos damos cuenta que la aceleración de cada cuerpo es constante. Las "componentes x" de las aceleraciones son respectivamente:

$$a_A = 6{,}4[m/s^2] \quad y \quad a_B = -8{,}2[m/s^2]$$

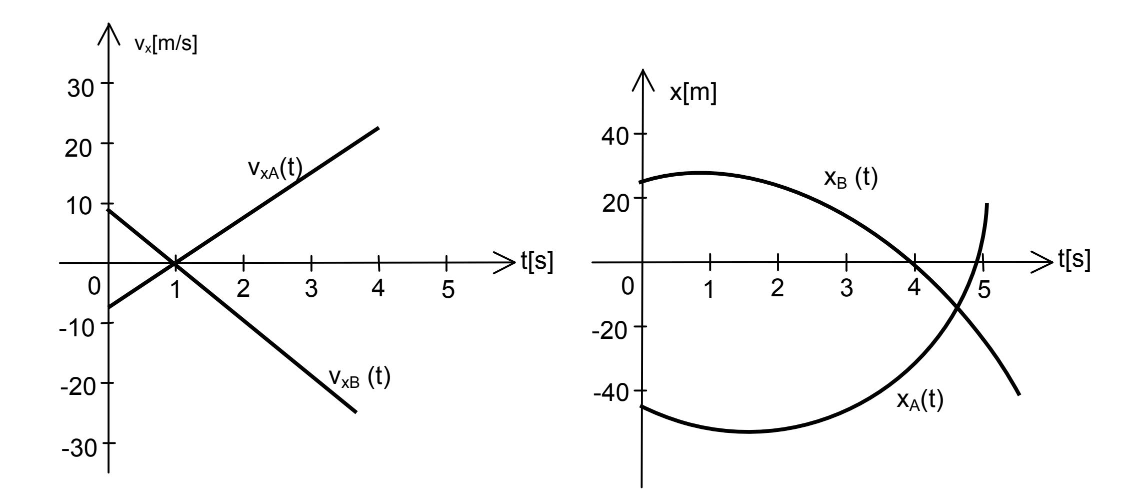
y las "componentes x" de las respectivas velocidades instantáneas están dadas por las ecuaciones:

$$v_A = -6{,}0 + 6{,}4\,t \quad y \quad v_B = 8{,}5 - 8{,}2\,t \quad \text{, en [m/s]}$$

Un esquema de las situaciones para los instantes de referencia $t = 0$ y de choque t_c es el siguiente:



En los gráficos adjuntos vemos como cambian las posiciones y rapideces de cada cuerpo en el transcurso del tiempo.



Para que se produzca el choque debe cumplirse: $x_A(t_c) = x_B(t_c)$ esto es:

$$3,2\ t_c^2 - 6,0\,t_c - 47 = 29 + 8,5\,t_c - 4,1t_c^2$$

$$7,3\ t_c^2 - 14,5\,t_c - 76 = 0$$

dando como resultado: $t_c \simeq 4,37\,[\text{s}]$.

El choque ocurre en el punto de coordenada $x_c \simeq -12\,[\text{m}]$.

Como las velocidades instantáneas están dadas por:

$$\vec{v}_A(t) = v_A(t)\,\hat{i} = (6,4\,t - 6,0)\,\hat{i}\ [\text{m/s}]$$

$$\vec{v}_B(t) = v_B(t)\,\hat{i} = (-8,2t + 8,5)\,\hat{i}\ [\text{m/s}],$$

para el instante $t_c \simeq 4,37\,[\text{s}]$ las velocidades de A y B son:

$$\vec{v}_A(t_C) \simeq 22\,\hat{i}\ [\text{m/s}] \quad \text{y} \quad \vec{v}_B(t_c) \simeq -27\,\hat{i}\ [\text{m/s}]$$

siendo sus magnitudes 22[m/s] y 27[m/s] respectivamente.

Ejercicios

6-1) Dos lanchas participan en una carrera rectilínea de 5000[m]. Uno de los corredores decide desplazarse con una rapidez constante de 108[km/h]. El otro decide recorrer un primer tramo de 1000[m] a 90[km/h], un segundo tramo de 2000[m] a 108[km/h] y el resto del camino a 120[km/h]. Pero al minuto de haberse iniciado la carrera, la meta (que está colocada sobre flotadores) corta amarras y es desplazada por el viento hacia el punto de partida a razón de 4[m/s]. ¿Cuál corredor llega primero a la meta?

6-2) La tabla adjunta muestra los valores de rapideces instantáneas de un automóvil que partió del reposo. Haga gráficos de rapidez instantánea y de aceleración media en función del tiempo.

¿Cuál es la rapidez para t = 2,5[s]?

¿Cuál es el máximo valor de la aceleración?

t [s]	v [m/s]
0,0	0,0
1,0	6,3
2,0	11,6
3,0	16,5
4,0	20,5
5,0	24,1
6,0	27,3
7,0	29,5
8,0	31,3
9,0	33,1
10,0	34,9

6-3) ¿Qué aceleración tiene un cuerpo que, partiendo del reposo, se mueve con un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y durante el sexto segundo recorre 6,2[m]?

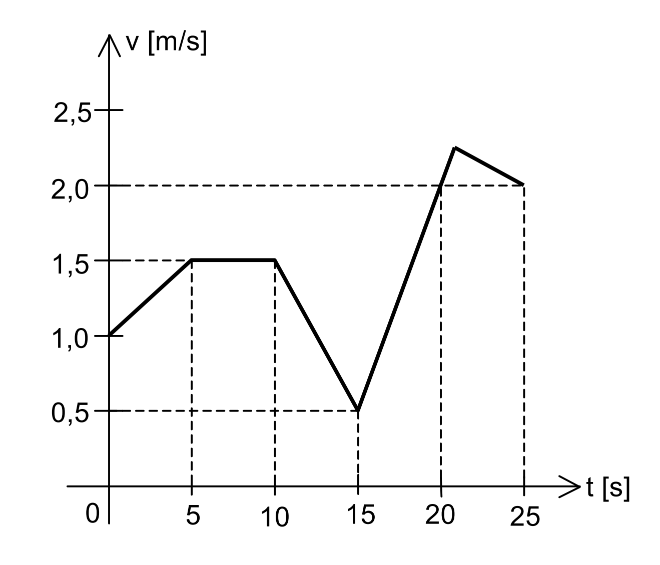
6-4) Dado el gráfico rapidez en función del tiempo, conteste:

¿Cuál es valor de la rapidez inicial?

¿En qué intervalo de tiempo la rapidez es constante?

¿En qué intervalo de tiempo la aceleración es mayor?

¿Cuál es la distancia recorrida por el móvil?



6-5) En cierto tipo de "tubo electrónico" los electrones experimentan una aceleración de $2{,}8 \cdot 10^{15}$[m/s^2]. Calcule la rapidez que alcanzaría un electrón 2,0[ns] después de que saliera del cátodo con rapidez despreciable.

6-6) Un cuerpo que se mueve con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado viaja 12[m] en 2,0[s]. Durante los próximos 3,0[s] cubre 56[m]. Calcule la velocidad inicial del cuerpo y su aceleración. ¿Qué distancia recorrerá en los próximos 5,0[s]?

6-7) Si una nave espacial se dirigiera a la estrella Alfa Centauro, situada a 4,3[AL] de la Tierra, con aceleración constante de 12[m/s^2] ¿cuánto tiempo demoraría en llegar y con qué velocidad llegaría? Comente.

6-8) En cierto instante un avión vuela con rapidez 500[km/h] sujeto a una aceleración de 1,2[km/min^2]. Si la dirección de vuelo y la aceleración se mantuvieran constantes ¿cuál sería la rapidez 15[min] más tarde?

6-9) La distancia que hay entre dos estaciones de un "Metro" es de 1,5[km]. Considere que el tren recorre la primera mitad de esta distancia con movimiento uniformemente acelerado y la segunda con

movimiento uniformemente retardado. La rapidez máxima del tren es 50[km/h]. Calcule el valor de la aceleración, suponiendo que su magnitud es igual a la de la desaceleración.

6-10) Un cuerpo acelera uniformemente desde el reposo con una aceleración constante de 0,50[m/s^2] durante 8,0[s] y después continúa su movimiento con rapidez constante. Dibuje el gráfico rapidez en función del tiempo y determine el tiempo que demora en recorrer los 25[m] iniciales.

6-11) Un auto parte del reposo y se desplaza con una aceleración de 1,2[m/s^2] durante 8,0[s]. Luego se apaga el motor y el auto desacelera, debido a la fricción, durante 14[s] a un promedio de 8,5[cm/s^2]. Entonces se aplican los frenos y el auto se detiene al cabo de 6,0[s]. Calcule la distancia total recorrida por el auto. Represente gráficamente la aceleración, rapidez y posición del auto en función del tiempo.

6-12) Durante parte del trayecto un tren viajó con movimiento uniformemente acelerado con $a = 2,5\left[\frac{km/h}{s}\right]$; si 115[s] después de pasar por un poste su rapidez era de 50[km/h] ¿con qué rapidez pasó por el poste? Si después de alcanzar una rapidez de 90[km/h] frena durante 7,0[s] hasta disminuir a 40[km/h] ¿cuál fue la aceleración?

6-13) Un automovilista viaja con rapidez constante de 85[km/h] en una noche oscura. Al salir de una curva ve a 70[m] un camión que obstruye el camino. Suponga que el chofer aplica los frenos en el mismo instante que ve el peligro, logrando una desaceleración constante de 18[m/s^2]. ¿Alcanzará a detener el auto para evitar el choque con el camión?

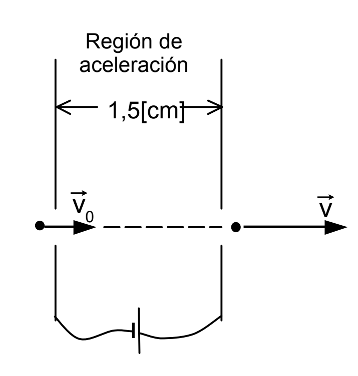
6-14) Un automovilista descuidado viaja por una carretera con rapidez de 115[km/h] cuando recuerda que la máxima permitida es de 90[km/h]; aplica los frenos y llega a los 90[km/h] en 15[s]. Determine el valor de la desaceleración media impresa al automóvil. Determine cuántos metros recorre antes de normalizar su rapidez, considerando que la aceleración ha sido constante.

6-15) El tiempo de reacción de un conductor de automóvil es de aproximadamente 0,7[s]. Consideremos como tiempo de reacción al intervalo que transcurre entre la percepción de un estímulo y la aplicación de los frenos. Si los frenos son capaces de producir una desaceleración de 4,8[m/s^2], calcule la distancia total recorrida desde la percepción de una señal hasta la detención del automóvil cuando viaja a 30[km/h] y a 60[km/h].

6-16) Determine una expresión que describa la posición en función del tiempo para el siguiente movimiento de un tren: pasa por un punto a 200[m] de una estación alejándose de ella con una velocidad de 72[km/h] de magnitud, en ese instante se aplican los frenos provocando una desaceleración de 4,0[m/s^2] constante, hasta detenerse.

6-17) Un electrón entra con una rapidez de $1,0 \cdot 10^4$ [m/s] a una región en donde es acelerado eléctricamente. Sale al otro lado con una rapidez de $4,0 \cdot 10^6$ [m/s].

¿Cuál fue la aceleración del electrón, supuesta constante? ¿Durante cuánto tiempo fue acelerado el electrón?



Esto es, en forma simplificada, lo que ocurre en el emisor de electrones de un tubo de rayos catódicos, como los que se usan en los receptores de televisión y en los osciloscopios.

6-18) La ecuación que describe la posición instantánea de una partícula es $x(t) = 3,0t^2 - 2,0t + 4,0$, con x expresada en metros y t en segundos. Calcule la posición, la velocidad y la aceleración en el

instante $t = 5,0\,[s]$. Represente gráficamente la posición, rapidez y aceleración en función del tiempo, para $0 \le t \le 15\,[s]$.

6-19) Un cuerpo en movimiento rectilíneo recorre una distancia D entre los lugares P y Q en un tiempo T. Las características del movimiento son: Parte desde P con aceleración a_A constante durante un intervalo entre $t_0 = 0$ y un instante t_A, continúa con velocidad v_A, alcanzada en t_A, hasta un instante t_B y luego desacelera con a_B constante hasta detenerse justamente en Q. Construya gráficos de la posición y de la rapidez en función del tiempo. Determine en términos de D, T, t_A y t_B los valores de v_A, a_A y a_B.

6-20) El movimiento de dos vehículos A y B que se desplazan por un camino rectilíneo (eje x) está descrito por las expresiones:

$$x_A(t) = -10\,t + 5\,t^2 \quad y \quad x_B(t) = 30 + 5\,t - 10\,t^2 \quad ,$$

donde las posiciones x_A y x_B, medidas de un punto marcado $x = 0$ en el camino, se dan en [m] y el tiempo t, que se comienza a contar desde el mismo instante para ambos vehículos, se da en [s]. Represente gráficamente la posición de cada vehículo en función del tiempo. Encuentre del gráfico el instante en que los vehículos se juntan. Resuelva el problema algebraicamente.

6-21) Un peatón corre con una rapidez constante de 6,0[m/s] para alcanzar un bus que está detenido ante un semáforo. Cuando está a 25[m] del bus, la luz cambia y el autobús acelera uniformemente a 0,11[m/s^2]. ¿Alcanza el peatón al bus? Si no es así, determine la distancia mínima que los separa. Resuelva el problema gráfica y algebraicamente.

6-22) Dos cuerpos **W** y **Z** se mueven a lo largo de un mismo camino recto. El cuerpo **W** lo hace con rapidez constante de 8,0[m/s] y el **Z** con aceleración constante. En cierto instante el cuerpo **W** pasa frente a una señal. El cuerpo **Z** lo hace 12[s] más tarde a 6,0[m/s], juntándose ambos cuerpos 30[s] después que **Z** pasó por la señal. Calcule la distancia entre la señal y el punto en que se juntaron. Calcule la aceleración de **Z**.

6-23) Imagine que se entretiene lanzando bolitas de cristal por un tubo de vidrio delgado, recto, de 1,2[m] de largo y colocado horizontalmente. Suponga que pone una bolita en el extremo del tubo y hace que ella se mueva con rapidez constante de 0,30[m/s] y que después de 1/5[s] pone en movimiento otra bolita para que pille a la primera. Calcule la aceleración de la segunda bolita, supuesta constante, para que alcance a la primera justo antes que salga por extremo opuesto del tubo.

6-24) Un auto está esperando que cambie la luz roja. Cuando la luz cambia a verde, el auto acelera uniformemente a 2,5[m/s^2] durante 6,0[s], continuando con rapidez constante. En el instante que el auto comienza a moverse, un camión que se mueve en la misma dirección con movimiento uniforme de 12[m/s] , lo pasa. ¿En qué tiempo, y a qué distancia se encontrarán nuevamente el auto y el camión ?

6-25) Dos autos A y B se mueven en la siguiente forma: en cierto instante el auto A parte del reposo y se mueve con aceleración $a_A = 2,5\,[m/s^2]$ constante; en ese mismo instante el auto B pasa por un punto situado a distancia D = 80[m] detrás de la largada de A con una rapidez v_0 y se mueve con aceleración $a_B = -0,70\,[m/s^2]$ constante. Calcule el valor mínimo de v_0 para que B pueda alcanzar a A. Para tal valor de v_0 calcule el tiempo empleado por B para alcanzar a A y las velocidades de A y B en el instante del encuentro.

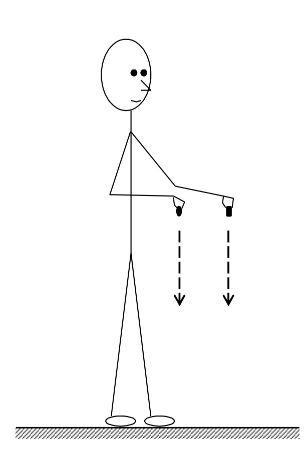
6-26) Demuestre que para una partícula en un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado se cumple que:

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2\,a_x \cdot (\,x - x_0\,)$$

donde el “eje x” coincide con la recta en que se mueve la partícula.

Caída libre y lanzamiento vertical

Si usted deja caer dos objetos, tales como una goma y una moneda, simultáneamente y desde una misma altura, observará que ambos cuerpos llegan al piso prácticamente en el mismo instante. Si usa un trozo de papel y una moneda, generalmente observará que la moneda llega primero al piso; pero, si hace una "pelotilla" con el papel, no observará una diferencia de tiempo apreciable en la caída de la pelotilla y la moneda, esto se explica porque ha disminuido el efecto de la acción del aire sobre el papel.



Este tipo de situaciones fue estudiado experimentalmente por Galileo, quien estableció que la caída libre de los cuerpos es un movimiento acelerado y con igual aceleración para todos los cuerpos.

En un estudio cinemático simplificado del movimiento vertical de los cuerpos en la cercanía de la superficie terrestre podemos considerar que la aceleración de gravedad es constante y que su magnitud tiene un valor aproximado de $9{,}8[m/s^2]$.

Se acostumbra designar a la magnitud de esta aceleración como g, y al vector aceleración como $\vec{g}$.

$$g \approx 9{,}8[m/s^2]$$

Si escogemos el eje y verticalmente hacia abajo, entonces:

$$\vec{g} = g\,\hat{j} \text{ (eje y, hacia abajo)}$$

y las componentes escalares de la velocidad y la posición en función del tiempo son:

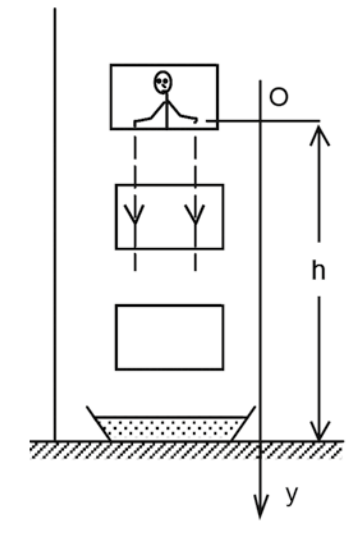
$$v_y(t) = v_0 + g(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

Hablamos de caída libre cuando la velocidad inicial es $\vec{v}_0 = 0$ y hablamos de lanzamiento vertical hacia abajo (arriba) cuando $\vec{v}$ tiene igual (opuesta) dirección que la aceleración de gravedad $\vec{g}$.

- Usted puede verificar estas aseveraciones y encontrar un valor de la aceleración de caída de los cuerpos, llamada "aceleración de gravedad", haciendo el siguiente experimento:

Suelte desde las ventanas de un segundo, tercer y cuarto piso de un edificio una bolita de madera y otra de acero. Para visualizar el instante de llegada al suelo puede colocar un tiesto con agua; ambas bolitas salpicarán el agua al mismo tiempo si se han soltado simultáneamente.



$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

En el momento en que se suelta la bolita $v_0 = 0$ y $t_0 = 0$.

Para el instante t en que la bolita toca el agua $y(t) = h$.

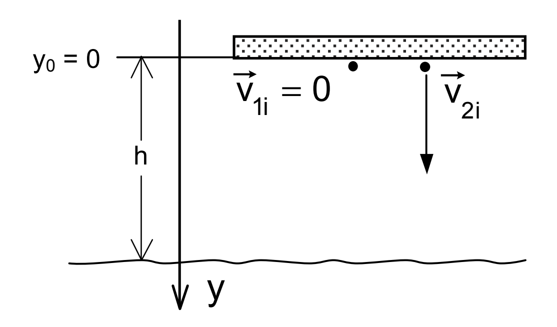
Luego $h = \frac{1}{2}g\,t^2 \Rightarrow t = \sqrt{2gh}$

Mida los tiempos de caída y las alturas respectivas. Obtendrá, aproximadamente, que g tiene un valor de 9,8 [m/s^2].

Ejemplos

- Se suelta una piedra desde un puente que está a 44[m] sobre el nivel del agua. Después de 1,2[s] de soltar esta piedra se lanza otra desde el mismo lugar, verticalmente hacia abajo con rapidez inicial de 7,3[m/s]. Calculemos el intervalo de tiempo transcurrido entre las llegadas de las piedras al agua.

En este problema resulta más conveniente poner la dirección del eje y hacia abajo.



La aceleración queda como:

$$\vec{a} = \vec{g} = g\hat{j}.$$

→ Ecuaciones del movimiento:

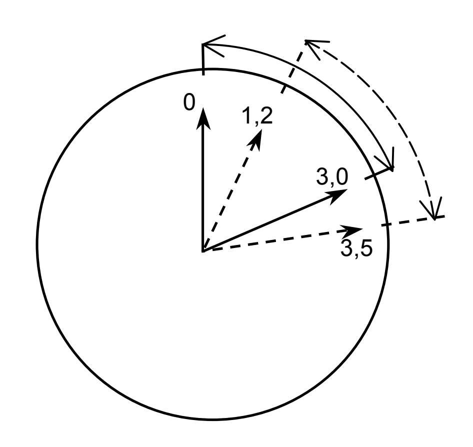
$$v(t) = v_0 + g(t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

→ **Ecuaciones para la piedra 1**:

$v_{01} = 0$, $y_{01} = 0$, $t_{01} = 0$

Luego $v(t_1) = g t_1$ $\quad y(t_1) = \frac{1}{2} g t_1^2$



$y(t_1) = h = 44[m]$, para el instante t_1 en que la primera piedra llega al agua.

$$44 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\, t_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 44}{9{,}8}} \approx 3{,}0[s]$$

→ **Ecuaciones para la piedra 2**: $v_{02} = 7{,}3[m/s]$, $y_{02} = 0$, $t_{02} = 1{,}2[s]$

Luego

$$v(t_2) = v_{02} + g(t_2 - t_{02})$$

$$y(t_2) = v_{02}(t_2 - t_{02}) + \frac{1}{2} g (t_2 - t_{02})^2$$

$y(t_2) = h = 44[m]$ cuando la piedra 2 toca el agua en el instante t_2

Luego $\quad 44 = 7{,}3\ (t_2 - 1{,}2) + \frac{1}{2} 9{,}8 (t_2 - 1{,}2)^2$

$$4{,}9\,(t_2 - 1{,}2)^2 + 7{,}3(t_2 - 1{,}2) - 44 = 0$$

$$t_2 - 1{,}2 = \frac{-7{,}3 \pm \sqrt{7{,}3^2 + 4 \cdot 4{,}9 \cdot 44}}{2 \cdot 4{,}9}$$

$t_2 - 1{,}2 \approx 2{,}3$ $\quad$ El segundo valor de t_2 resulta ser negativo y no

$t_2 \approx 3{,}5[s]$ $\quad$ es solución física del problema.

Intervalo de tiempo Δt entre las llegadas de las piedras

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 3{,}5 - 3{,}0 = 0{,}5[s]$$

La segunda piedra llega 0,5[s] después que la primera.

- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez de $16[m/s]$ ¿En qué instante llegará a un nivel $25[m]$ más abajo que el nivel del punto de lanzamiento? ¿Cuál es la velocidad del cuerpo cuando pasa por el nivel de lanzamiento?

Las ecuaciones para el movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje y son:

$$v_y(t) = v_0 + a_y \cdot (t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot (t - t_0)^2$$

Escogiendo el eje y verticalmente hacia arriba:

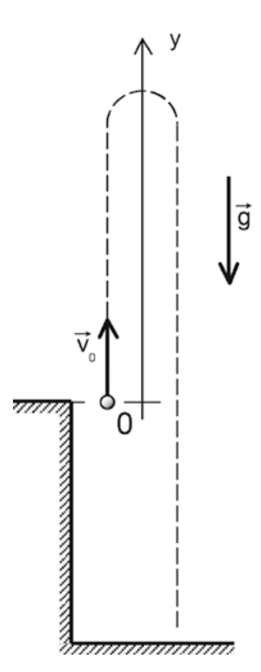
$$a_y = -g \approx -9{,}8[m/s^2]$$

Usando $t_0 = 0$, $y_0 = 0$ y $v_0 = 16[m/s]$, las ecuaciones quedan:

$$v_y(t) = 16 - 9{,}8 \cdot t$$

$$y(t) = 16 \cdot t - 4{,}9 \cdot t^2$$

en donde el tiempo está en [s], la posición en [m] y la rapidez en [m/s].



→ Sea t_d el instante en que el cuerpo llega a 25[m] debajo del punto de lanzamiento. Entonces:

$$-25 = 16 \cdot t_d - 4{,}9 \cdot t_d^2$$

$$4{,}9 \cdot t_d^2 - 16 \cdot t_d - 25 = 0$$

$$t_d = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4{,}9 \cdot (-25)}}{2 \cdot 4{,}9} = 4{,}4[s]$$

en donde hemos descartado la solución negativa. El cuerpo pasa a los 4,4[s] bajo el nivel de lanzamiento.

→ Sea t_a el instante en que el cuerpo pasa hacia abajo por el nivel de lanzamiento. Entonces:

$$y(t_a) = 0$$

$$0 = 16 \cdot t_a - 4{,}9 \cdot t_a^2$$

$$0 = t_a \cdot (16 \cdot - 4{,}9 \cdot t_a)$$

Descartando la solución $t_a = 0$, que corresponde al instante del lanzamiento, obtenemos:

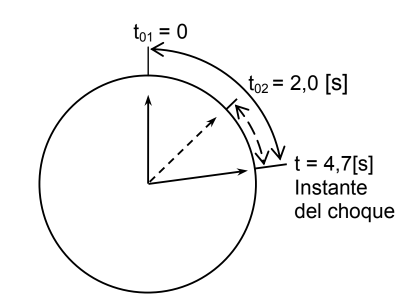
$$t_a = \frac{16}{4{,}9}[s]$$

Entonces, la rapidez en ese instante está dada por:

$$v_y(t_a) = 16 - 9{,}8 \cdot \frac{16}{4{,}9} = -16[m/s]$$

El vector velocidad en ese instante es $\vec{v}(t_a) = -16\,\hat{j}\,[m/s]$. Note que la magnitud de la velocidad es la misma del lanzamiento y su dirección es opuesta.

- Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez inicial $v_{0,1} = 16[m/s]$. Después de 2,0[s] se lanza verticalmente un segundo cuerpo desde el mismo lugar con una velocidad inicial $\vec{v}_{0,2}$ tal que ambos cuerpos chocan 2,7[s] después de lanzar el segundo. ¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_{0,2}$?



→ Los cuerpos chocan en el instante $t_C = 2,0[s] + 2,7[s] = 4,7[s]$ después de lanzado el primer cuerpo.

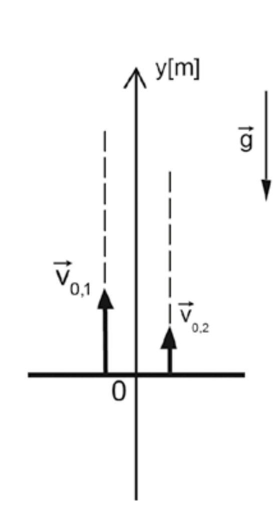
Las ecuaciones del movimiento a lo largo del eje y son:

$$v_y(t) = v_0 + a_y \cdot (t - t_0)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot (t - t_0)^2$$

Escogiendo el eje y verticalmente hacia arriba:

$$a_y = -g \approx -9,8[m/s^2]$$



→ Para el <u>primer cuerpo</u>:

$t_{0,1} = 0$, $y_{0,1} = 0$ y $v_{0,1} = 16[m/s]$,

Las ecuaciones para el primer cuerpo quedan:

$$v_{y,1}(t) = 16 - 9,8 \cdot t$$

$$y_1(t) = 16 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$$

→ Para el <u>segundo cuerpo</u>:

$t_{0,2} = 2,0[s]$, $y_{0,2} = 0$ y $v_{0,2} = ?$,

Las ecuaciones para el segundo cuerpo quedan:

$$v_{y,2}(t) = v_{0,2} - 9,8 \cdot (t - 2)$$

$$y_2(t) = v_{0,2} \cdot (t - 2) - 4,9 \cdot (t - 2)^2$$

→ En el instante del choque $t_C = 4,7[s]$ los dos cuerpos tienen la misma posición:

$$y_1(t_c) = y_2(t_c)$$

Por lo tanto:

$$16 \cdot 4,7 - 4,9 \cdot (4,7)^2 = v_{0,2} \cdot (4,7 - 2) - 4,9 \cdot (4,7 - 2)^2$$

$$16 \cdot 4,7 - 4,9 \cdot (4,7)^2 = v_{0,2} \cdot (2,7) - 4,9 \cdot (2,7)^2$$

$$v_{0,2} = \frac{16 \cdot 4,7 - 4,9 \cdot (4,7)^2 + 4,9 \cdot (2,7)^2}{2,7} \approx 0,99[m/s]$$

El vector velocidad inicial de la segunda piedra es $\vec{v}_{0,2} \approx 0,99\hat{j}[m/s]$.

Verifique que los cuerpos chocan en $y \approx -33[m]$.

Ejercicios

6-27) ¿Cuál sería la rapidez con que llegaría a la Tierra una gota de lluvia si cayera con aceleración constante de 9,8[m/s^2] desde una nube situada a 1[km] de altura? Comente con sus amigos la respuesta. Pregunte en clase.

6-28) Un cuerpo que se ha dejado caer recorre 72[m] en el último segundo de su movimiento. Calcule la altura desde la cual cayó el cuerpo y el tiempo que empleó en llegar al suelo.

6-29) Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 19[m/s] ¿Cuándo tendrá una rapidez de 5,6[m/s] y en qué posición se encontrará en ese instante?

6-30) Un hombre parado en el techo de un edificio tira un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de 14[m/s]. El cuerpo llega al suelo 4,7[s] más tarde. ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por el cuerpo?. ¿Qué altura tiene el edificio? ¿Con qué rapidez llegará el cuerpo al suelo?

6-31) Se deja caer una bolita desde 28[m] de altura y 2,5[s] después se deja caer una segunda bolita desde 17[m] de altura. Calcule el intervalo de tiempo transcurrido entre las llegadas de las bolitas al suelo.

6-32) Suponga que en cierto instante usted suelta una piedra desde el borde de un pozo y que después de un tiempo t_0 suelta otra piedra desde el mismo punto. Determine una expresión algebraica para la "rapidez media de cambio de separación entre ambas piedras". Si la profundidad del pozo es H determine el rango de tiempo para la validez de tal expresión.

6-33) En un mismo instante y desde un mismo punto un cuerpo se deja caer y otro se lanza hacia abajo con una rapidez inicial de 105[cm/s]. ¿Cuándo la distancia entre ellos será de 19[m]?

6-34) Se suelta una piedra desde un puente que está a 35[m] sobre el nivel del agua. Después de 1,7[s] se lanza verticalmente hacia abajo una segunda piedra. Ambas llegan al mismo tiempo al agua. ¿Cuál es la rapidez inicial de la segunda piedra? Construya un gráfico de rapidez en función del tiempo para ambas piedras.

6-35) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia abajo con una rapidez inicial v_0 = 6,0[m/s]. ¿Cuánto tiempo más tarde habrá que lanzar otro cuerpo desde el mismo punto con una rapidez inicial v_0 = 10,6[m/s] para que alcance al primero a los 6,6[m] de recorrido?

6-36) Un ascensor de un edificio está bajando con aceleración constante de 1,1[m/s^2] de magnitud. En el instante en que la rapidez del ascensor es 2,5[m/s] cae un tornillo del techo del ascensor, que está a 3,5[m] de su piso. Calcule el tiempo que el tornillo tarda en llegar al piso y la distancia, respecto a un observador en el edificio, recorrida por el tornillo durante ese tiempo.

6-37) El sonido producido por una piedra al llegar al fondo de un pozo seco se escucha 4,0[s] después de que fue soltada. Si la rapidez de propagación del sonido es 320[m/s], calcule la profundidad del pozo.

6-38) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba con rapidez inicial de 20[m/s] ¿Cuándo hay que lanzar otro cuerpo hacia arriba desde el mismo punto y con la misma rapidez para que ambos cuerpos se encuentren 1,8[s] después que se ha lanzado el segundo cuerpo?

6-39) Un cuerpo se lanza verticalmente hacia abajo con rapidez de 5,9[m/s]. Después de 0,40[s] se lanza otro cuerpo verticalmente desde el mismo punto. Cuando el primer cuerpo ha recorrido 6,7[m] es alcanzado por el segundo. Calcule la velocidad con que fue lanzado el segundo cuerpo.

6-40) Una piedra se deja caer de una altura H_1 respecto al suelo. Otra piedra, situada a altura H_2, menor que H_1, se lanza simultáneamente hacia arriba con velocidad inicial $\vec{v}_o$. Determine expresiones algebraicas para el instante y la posición en que ambas piedras chocan.

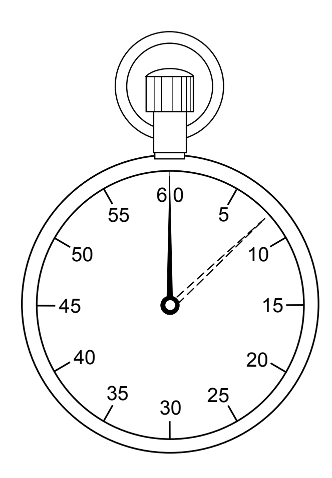
6-41) Demuestre que en un lanzamiento vertical en que $y(t)$ denota la posición instantánea del cuerpo y v_y su rapidez instantánea, la cantidad $v_y^2 + 2yg$ es independiente del tiempo.

6-42) Desde una altura de $30[m]$ respecto al suelo se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial v_0 de tal manera que demora $10[s]$ en llegar al suelo. Escriba las ecuaciones para la posición y rapidez que describen el movimiento de este cuerpo. Calcule la velocidad con que llega al suelo. ¿En qué instante se encuentra el cuerpo a $20[m]$ del suelo?

Rapidez angular

Consideremos un cronómetro de "manecillas", por ejemplo el usado comunmente en el control de las carreras, que también suele emplearse en experimentos de Física.

En algunos cronómetros de este tipo están marcadas 300 rayitas en el borde de una superficie circular que indican "quintos de segundos". En la figura aparecen unas pocas rayitas.



Una "aguja" recta está montada sobre un eje que es perpendicular al círculo y que pasa por el centro de éste; ella debe dar una vuelta completa en 60[s].

Cuando el cronómetro está listo para ser usado la aguja apunta a la marca 60, la que también representa a la marca 0. Al poner "en marcha" el cronómetro en el instante que llamamos $0[s]$, la aguja comienza a girar y en cada instante forma cierto **ángulo** respecto a la posición inicial de la aguja. Este cronómetro está diseñado para que

$$\text{al transcurrir} \quad \left\{\begin{matrix} 15 \\ 30 \\ 45 \\ 60 \end{matrix}\right\}[s] \quad \text{el ángulo formado mida} \quad \left\{\begin{matrix} \pi/2 \\ \pi \\ 3\pi/2 \\ 2\pi \end{matrix}\right\}[rad]$$

Ya que estamos en presencia de un "ángulo que cambia con el tiempo" resulta natural introducir el concepto de "rapidez de cambio de ángulo" o **rapidez angular**.

A cada intervalo de tiempo Δt, transcurrido desde el instante inicial hasta un instante determinado, corresponde un cambio angular $\Delta\varphi$. Entonces el cuociente:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

define a la rapidez angular media $\bar{\omega} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

- Si entre los instantes $t = 0$ y $t = 15[s]$, la aguja del cronómetro pasa del ángulo $\varphi = 0$ al ángulo $\varphi = \pi/2\,[\text{rad}]$, la rapidez angular media es:

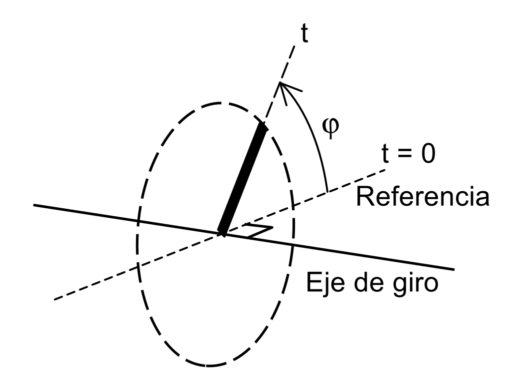
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\left(\pi/2 - 0\right)[\text{rad}]}{(15-0)[\text{s}]} \triangleq \frac{\pi}{30}\,[\text{rad / s}]$$

- Y si entre los $15[s]$ y los $45[s]$ el cambio de ángulo es $\Delta\varphi = \pi[\text{rad}]$, la rapidez angular correspondiente es:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\pi[\text{rad}]}{30[\text{s}]} \triangleq \frac{\pi}{30}\,[\text{rad/s}]$$

Note que el valor de la rapidez angular media es igual en estos dos casos. Una característica importante de un buen cronómetro es que la rapidez angular media del movimiento de la aguja sea la misma para cualquier intervalo de tiempo, esto es, que la rapidez angular sea constante.

El movimiento de una varilla que gira alrededor de un eje perpendicular a ella puede ser descrito por el **ángulo** que forma con una dirección de referencia convenientemente escogida. Como al moverse la varilla tal ángulo cambia con el tiempo, podemos asociar una **rapidez angular** a este tipo de movimiento. Tome, por ejemplo, el movimiento de cada una de las barras que soportan los pedales de una bicicleta.



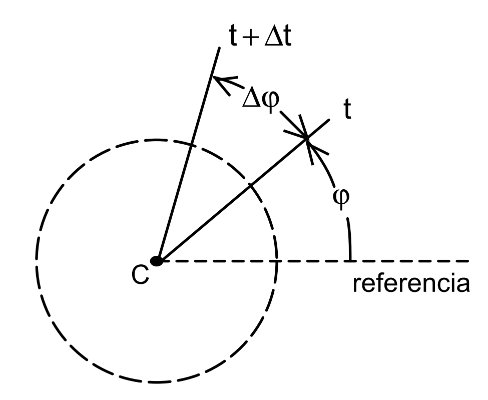
Marquemos un punto en un disco y pensemos en el **radio** que une este punto con el **centro**. Al girar el disco tal radio se desplaza con cierta rapidez angular. El movimiento de una marca en un neumático montado en un automóvil es también otro ejemplo ilustrativo de un movimiento angular.

DISCO GIRANDO

Análogamente, si una partícula (satélite, planetas) describe una órbita alrededor de cierto centro (planeta, sol), la línea recta que une a la partícula con tal centro describe un ángulo respecto a una dirección escogida. Podemos asociar a este movimiento traslacional una rapidez angular.

En general, cuando un objeto gira la *línea indicadora del giro* describe (o "barre") un ángulo $\Delta\varphi$ en un intervalo de tiempo Δt, entonces definimos su "rapidez angular media" por:

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$



En el Sistema Internacional las unidades fundamentales de medición del tiempo y del ángulo son 1[s] y 1[rad] respectivamente, resultando como unidad derivada de rapidez angular 1[rad/s]; esto es, expresamos:

$$\omega = a\left[\text{rad/s}\right]$$

,

siendo *a* el número de medición. Por supuesto podemos usar otras unidades de tiempo y de ángulo y establecer las equivalencias correspondientes de unidades.

Un método para determinar la rapidez angular media de un objeto que gira es contar el número de vueltas o de revoluciones que completa en cierta unidad de tiempo; de esto proviene el uso de la unidad: una "revolución por minuto" . . . 1 [r.p.m] $\hat{=}$ 1 [rev/min]

con la equivalencia:

$$1\left[\text{rev/min}\right] \hat{=} \frac{2\pi\left[\text{rad}\right]}{60\left[\text{s}\right]} \hat{=} \frac{\pi}{30}\left[\text{rad/s}\right]$$

Ya hemos dicho que un número "no tiene dimensión física" y hemos convenido en anotar *dim* (número) = 1; en particular *dim* (ángulo) = 1, por lo tanto

$$\dim(\omega) = \frac{\dim(\text{ángulo})}{\dim(\text{tiempo})} = \frac{1}{\tau} = \tau^{-1}$$

Por tal razón, la rapidez angular se expresa a veces por:

$$\omega = a\left[\ \text{rad/s}\ \right] \hat{=} a\left[1/\text{s}\right] \hat{=} a\left[\text{s}^{-1}\right]$$

Manejemos estos conceptos en los siguientes ejemplos :

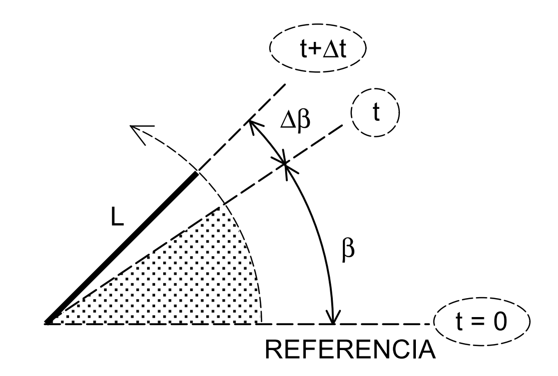
- Al escuchar un disco antiguo de "78[r.p.m.]" nos damos cuenta que está rayado. ¿Cuál es la rapidez angular de la raya?

Entendemos que un disco de " 78 [r.p.m.] " debe escucharse en un tocadiscos cuyo plato gire con rapidez angular igual a 78[rev/min]. La rapidez angular de la "raya" es:

$$\bar{\omega} = 78\left[\text{rev/min}\right] \hat{=} 78 \cdot \frac{2\pi\left[\text{rad}\right]}{60\left[\text{s}\right]} \hat{=} \frac{78\cdot\pi}{30}\left[\text{rad/s}\right] \simeq 8{,}2\left[\text{rad/s}\right]$$

- Una varilla muy delgada de 40[cm] de largo está colocada sobre una mesa plana y se hace girar alrededor de un extremo con rapidez angular media $\overline{\omega}_L = 3{,}0 \left[\text{grado}/\text{s} \right]$ Calculemos la "rapidez media del aumento del *área barrida* por la varilla".

Marquemos una línea de referencia para medir el desplazamiento angular de la varilla. Llamemos t = 0 a un instante en que la varilla pasa por esa línea.



En cierto instante t la varilla forma un ángulo β [rad] con la línea de referencia. El área barrida por la varilla es el "sector circular" determinado por ese ángulo (área achurada de la figura):

$$A(\beta) = \pi L^2 \cdot \frac{\beta}{2\pi} = \frac{L^2}{2} \cdot \beta$$

Al transcurrir un intervalo de tiempo Δt, a partir de t, el ángulo incrementa en $\Delta\beta$ y el área barrida cambia al valor:

$$A(\beta + \Delta\beta) = \frac{L^2}{2} \cdot (\beta + \Delta\beta) = \frac{L^2}{2} \cdot \beta + \frac{L^2}{2} \cdot \Delta\beta = A(\beta) + \frac{L^2}{2} \cdot \Delta\beta$$

con lo cual el área barrida incrementa en:

$$\Delta A = A(\beta + \Delta\beta) - A(\beta) = \frac{L^2}{2} \cdot \Delta\beta$$

y la "rapidez de cambio del área barrida" es:

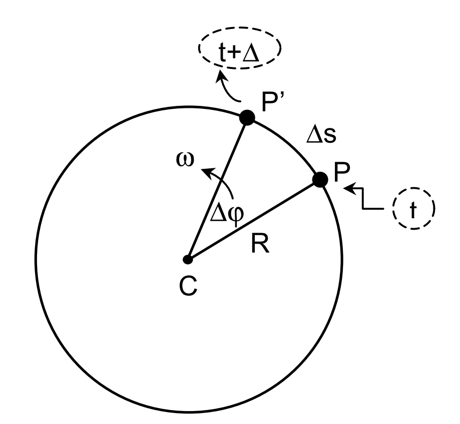
$$\overline{v}_A = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L^2}{2} \cdot \frac{\Delta\beta}{\Delta t} = \frac{L^2}{2} \cdot \overline{\omega}_L$$

Al evaluar esta expresión con los datos L = 40[cm] y $\omega_L = 3{,}0 \left[\text{grado}/\text{s} \right]$ obtenemos:

$$\overline{v}_A = \frac{\left(40[\text{cm}]\right)^2}{2} \cdot 3{,}0 \left[\text{grado}/\text{s} \right] \cdot \frac{2\pi[\text{rad}]}{360[\text{grado}]} \simeq 42 \left[\text{cm}^2/\text{s} \right]$$

Movimiento circular

Cuando una "partícula" describe una **trayectoria circunferencial** respecto a un centro fijo, y también cuando nos referimos al movimiento de un "punto" de un cuerpo rígido que gira respecto a un eje fijo, hablamos de un **movimiento circular**.



Sea **P** la posición de la partícula (o del punto) en el instante t y sea **P'** su posición en el instante $t + \Delta t$.

El "largo del camino recorrido" por la partícula o por el punto durante el intervalo de tiempo Δt es el largo del arco **PP'**:

$$\widehat{PP'} = \Delta s = R \cdot \Delta\varphi$$

donde R es el radio, constante, de la trayectoria y $\Delta\varphi$ está medido en radianes.

La rapidez media $\bar{v}$ para este movimiento de la partícula en la circunferencia es:

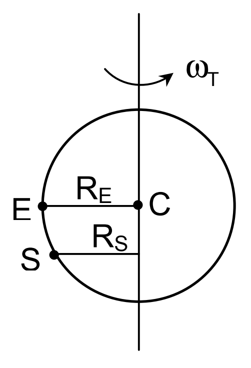
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \bar{\omega} \qquad \bar{v} = \bar{\omega} \cdot R$$

donde $\bar{\omega}$ es la "rapidez angular media" correspondiente al rayo que une la partícula o el punto con el centro o eje de giro.

Usando, por ejemplo, $R = a[m]$ y $\omega = b\left[rad/s\right] \triangleq b\left[1/s\right]$ obtenemos:

$$\bar{v} = \bar{\omega} \cdot R = b\left[1/s\right] \cdot a\left[m\right] \triangleq a \cdot b\left[m/s\right]$$

lo que muestra la consistencia de las unidades de medición empleadas.



- Consideremos el movimiento de rotación de la Tierra alrededor de su eje.

  Dado que la Tierra ejecuta una revolución cada 24[h], su rapidez angular es:

$$\bar{\omega}_T = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi\left[rad\right]}{24\left[h\right]} \triangleq \cdot \frac{\pi}{12}\left[rad/h\right]$$

El radio de la Tierra es aproximadamente 6400[km]. Entonces, una persona en un punto del "ecuador" se traslada, debido a la rotación, con rapidez:

$$\overline{v}_E = \overline{\omega}_T R_E = \frac{\pi}{12}\left[rad/h\right] \cdot 6400\left[km\right] \triangleq \frac{\pi \cdot 6400}{12}\left[km/h\right] \simeq 1700\left[km/h\right]$$

El "radio de giro" correspondiente a Santiago vale aproximadamente 5330[km]; entonces, un árbol en la Plaza de Armas describe en 5:15 horas un "arco de circunferencia" determinado por:

$$\Delta s = \overline{v}_S \cdot \Delta t = \left(\omega_T \cdot R_S\right) \cdot \Delta t$$

$$= \frac{\pi}{12}\left[rad/h\right] \cdot 5330\left[km\right] \cdot 5{,}25\left[h\right]$$

$$\Delta s \simeq 7300\left[km\right]$$

Vocabulario: Período, Frecuencia

Si el movimiento circular se realiza con rapidez angular **constante** hablamos de "movimiento circular uniforme".

La partícula que describe este movimiento requiere un **mismo** tiempo T para completar una vuelta o revolución; llamamos **período** de revolución a este tiempo.

El significado de período implica que si la partícula se encuentra en cierto lugar en el instante t, se encontrará en el **mismo** lugar en el instante t + T y también en los instantes $t + nT$, siendo n un entero.

Denominamos "**frecuencia** de revolución" al "número de revoluciones efectuadas por *unidad de* tiempo":

Si se efectúan *n* revoluciones en un tiempo τ la frecuencia es n/τ.

De tales definiciones obtenemos la siguiente relación entre período T y la frecuencia f :

$$f = \frac{1}{T} \qquad\qquad T = \frac{1}{f}$$

La unidad de frecuencia 1[1/s] se denomina **un hertz** , simbolizada por 1[Hz] .

- Cuando un tocadiscos está ajustado para girar a 45[rev/min] , el período de rotación de un punto del disco es:

$$T = \frac{1}{45[1/\min]} \triangleq \frac{1}{45}[\min] \triangleq \frac{1 \cdot 60}{45}[s] \simeq 1{,}3[s]$$

Vemos que en este problema la rapidez angular ω del disco es de $45[vueltas/min]$. Igualmente la frecuencia f del movimiento circular del disco es de $45[vueltas/min]$. Por eso podemos afirmar que en el movimiento circular uniforme, la rapidez angular ω y la frecuencia f son equivalentes.

Esta afirmación no es extendible a cualquier situación. Cuando la rapidez angular ω se mide en $[rad/s]$ y la frecuencia en $[1/s]$, la relación entre ambas es:

$$\omega = 2\pi f$$

Ejercicios

6-43) Estime la rapidez angular media del brazo de un tocadiscos al escuchar totalmente un vinilo de "33 [r.p.m.] ".

6-44) Suponga que recorta un trozo de cartón de forma de triángulo equilátero, baja las perpendiculares de los vértices a los lados opuestos, hace un agujero en el punto de intersección de estas perpendiculares y lo coloca en un tocadiscos ajustado para girar a 16 [r.p.m.]. Determine la rapidez angular y la rapidez de traslación de los vértices del triángulo y de los pies de las perpendiculares.

6-45) Un joven ensaya saltos ornamentales en la piscina saltando de un tablón de 3,0[m] de altura y da dos vueltas y media antes de entrar al agua. Si emplea 1,3[s] en tocar agua ¿cuál es su rapidez angular media?

6-46) Al controlar un reloj con un "reloj patrón" observamos que atrasa en término medio "17 segundos por día". Exprese las rapideces angulares de las "agujas" de este reloj en término de las rapideces angulares de las correspondientes agujas del reloj patrón.

Relojes

El horario, el minutero y el segundero de un reloj tienen un movimiento circular uniforme y en consecuencia, podemos asignarles una rapidez angular a cada uno de ellos. Para relojes "perfectos" determinamos tales rapideces angulares en la siguiente forma:

El **horario** barre un ángulo de 2π[rad] en 12[h] , por lo tanto, su rapidez angular es:

$$\omega_H = \frac{2\pi[\text{rad}]}{12[\text{h}]} \triangleq \frac{\pi}{6}[\text{rad / h}] \triangleq \frac{\pi}{360}[\text{rad / min}]$$

el **minutero** describe 2π[rad] en 60[min], entonces:

$$\omega_M = \frac{2\pi[\text{rad}]}{60[\text{h}]} \triangleq \frac{\pi}{30}[\text{rad / min}] \triangleq \frac{\pi}{1800}[\text{rad / s}]$$

el **segundero** lo hace en 60[s], dando:

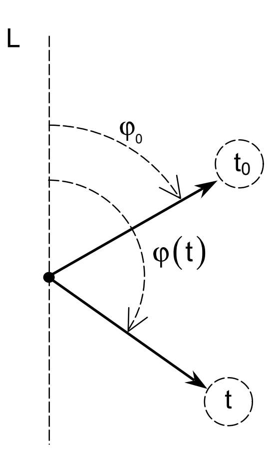
$$\omega_S = \frac{2\pi[\text{rad}]}{60[\text{s}]} \triangleq \frac{\pi}{30}[\text{rad / s}] \triangleq 120\pi\,[\text{rad / h}] \triangleq 2\pi\left[\text{rad}/\text{min}\right]$$

Existe una serie de problemas típicos e interesantes sobre las posiciones (ángulos) que ocupan las agujas del reloj en determinado instante; para resolverlos usamos las relaciones de ángulos, tiempos y rapideces angulares y le advertimos que ¡un dibujo **cuidadoso** es una buena ayuda!

Sea L una recta de referencia fija y una manecilla que está girando con una rapidez angular constante ω

El ángulo $\varphi(t)$ descrito por la manecilla da la posición angular de la manecilla.

Esta posición de la manecilla está determinada por la ecuación $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$



* ¿A qué hora entre las 3 y las 4 están opuestos el horario y el minutero?

En la figura adjunta usamos como instante referencia "las tres": $t_0 = 0$, a "las 3 hrs".

→ Ecuación del movimiento de rapidez angular $\omega = \text{cte}$.

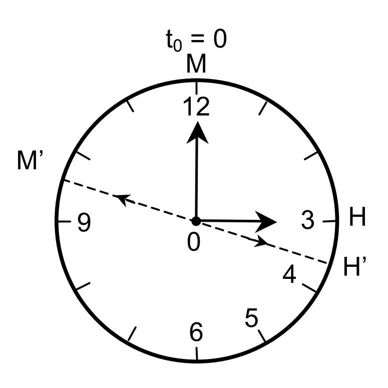
$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

→ Ecuación para el horario

$$\omega_h = \frac{\pi}{360}[\text{rad / min}] \quad ; \quad t_0 = 0$$

$$\varphi_{0h} = \frac{\pi}{2} = \measuredangle \text{MOH}$$

$$\varphi_h(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{360}t$$



→ Ecuación para el minutero

$$\omega_m = \frac{\pi}{30}[\text{rad / min}] \quad ; \quad \varphi_{0,m} = 0 \quad ; \quad t_0 = 0$$

$$\varphi_m(t) = \frac{\pi}{30}t$$

→ Condición del problema:

Para un cierto instante t debe cumplirse que:

$$\varphi_m(t) - \varphi_h(t) = \pi$$

$$\frac{\pi \cdot t}{30} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi \cdot t}{360} = \pi \quad \Big/ \cdot \frac{360}{\pi}$$

$$12 \cdot t - 180 - t = 360$$

$$11t = 540$$

$$t = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11}[\text{min}] \approx 49{,}1[\text{min}]$$

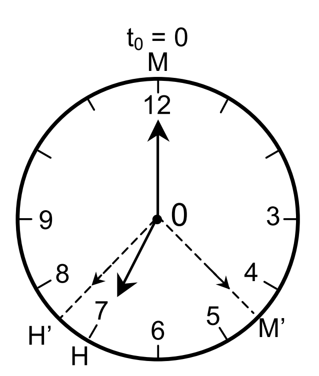
$$t = 49{,}1[\text{min}]$$

Luego la hora en que se cumple la condición del problema es:

3 horas 49,1 [min]

* * ¿A qué hora entre las 7 y las 8 el horario y el minutero forman un ángulo recto?

Entre las 7 y las 8, el horario y el minutero determinan un ángulo recto en dos ocasiones: antes y después que el minutero pase sobre el horario.



Consideremos la primera situación:

→ Ecuación del movimiento $\omega = cte$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega\ (t - t_0)$$

Instante de referencia $t_0 = 0$ a las 7 horas

→ Ecuaciones para el horario

$$\varphi_{0h} = \measuredangle \text{MOH(ángulo convexo)} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\varphi_h(t) = \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{360}t$$

→ Ecuaciones para el minutero

$$\varphi_{0m} = 0$$

$$\varphi_m(t) = \frac{\pi t}{30}$$

→ Condición del problema: $\measuredangle H'OM' = \frac{\pi}{2}$

Luego:

$$\varphi_h(t) - \varphi_m(t) = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi t}{360} - \frac{\pi t}{30} = \frac{\pi}{2}$$

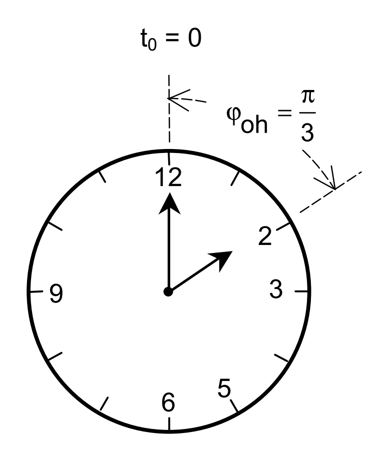
$$t = 21{,}8\ [\text{min}]$$

La condición se cumple en la primera ocasión a las 7[h] 21,8 [min].

Compruebe usted que se forma un segundo ángulo recto entre las manecillas a las 7 horas 54,5 minutos.

* * * La hora es entre las 2 y las 3. Dentro de 10[min] el minutero estará delante del horario como lo está ahora por detrás ¿qué hora es?

Condición del problema: $\alpha = \beta$



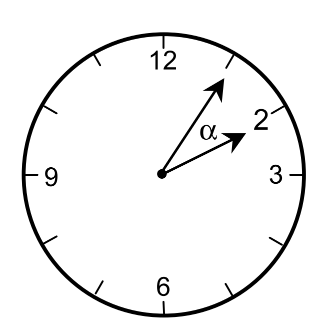
→ Ecuación del movimiento

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega(t - t_0)$$

→ Para el instante t (ahora):

Horario: $\varphi_{0h} = \frac{\pi}{3}$ $\quad \omega_h = \frac{\pi}{360}$

$$\varphi_h(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi t}{360}$$



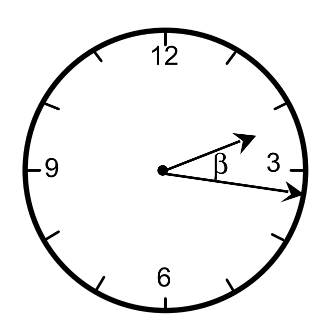
Minutero: $\varphi_{0m} = 0$ $\quad \omega_m = \frac{\pi}{30}$

$$\varphi_m(t) = \frac{\pi t}{30}$$

$$\alpha = \varphi_h(t) - \varphi_m(t) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi t}{360} - \frac{\pi t}{30}$$

$$\alpha = \frac{120\pi - 11\pi t}{360}$$

→ 10 minutos después, el instante es $t + 10$



Horario: $\varphi_{0h} = \frac{\pi}{3}$

$$\varphi_h(t+10) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi(t+10)}{360} = \frac{130\pi + \pi t}{360}$$

Minutero: $\varphi_{0m} = 0$

$$\varphi_m(t+10) = \frac{\pi(t+10)}{30} = \frac{\pi t + 10\pi}{30}$$

$$\beta = \varphi_m(t+10) - \varphi_h(t+10) = \frac{\pi t + 10\pi}{30} - \frac{130\pi + \pi t}{360}$$

$$\beta = \frac{11\pi t - 10\pi}{360}$$

Usando la condición del problema:

$$\alpha = \beta$$

$$\frac{120\pi - 11\pi t}{360} = \frac{11\pi t - 10\pi}{360}$$

$$t = \frac{130}{22} \approx 5{,}9\,[\text{min}]$$

La hora es 2 horas 5,9 minutos.

Ejercicios

6-47) A qué hora entre las 4 y las 5 coinciden el minutero y el horario?

6-48) Calcule el ángulo que forman el horario y el minutero a las 17[h] 40[min].

6-49) El borde de la "esfera" de un reloj está marcado con 60 divisiones. ¿A qué hora entre las 8 y las 9 el minutero dista exactamente 10 divisiones del horario?

6-50) ¿A qué hora entre las 3 y las 4 estará el minutero un minuto delante del horario?

6-51) ¿Cuándo estarán juntas las manecillas de un reloj entre las 6 y las 7?

6-52) Un individuo ha determinado que su hijo puede tolerar 37 vueltas en carrusel antes de marearse. Le ha permitido subirse a uno en que los "caballitos" avanzan a 6[mile/h] en una circunferencia de 7,8[m] de diámetro. El "viaje" duró 5 minutos, ¿alcanzó a marearse el niño ?

6-53) Una centrífuga de "alta velocidad" tiene un tambor de 30,0[cm] de diámetro que puede girar hasta seiscientas mil revoluciones por minuto. Determine la rapidez máxima de un punto en su borde, en [m/s] .

6-54) Al hacer cierto experimento se logra que un electrón describa una trayectoria circunferencial de 15,0[cm] de radio con rapidez media de $8{,}0 \cdot 10^5$[m/s]. Calcule el número de vueltas que daría el electrón en 2[min].

6-55) La Luna gira alrededor de la Tierra completando una revolución en 27,3[d]. Suponga que describe una órbita circular de $2{,}4 \cdot 10^5$[mile] de radio. Calcule la "rapidez media de traslación" de la Luna, en [m/s].

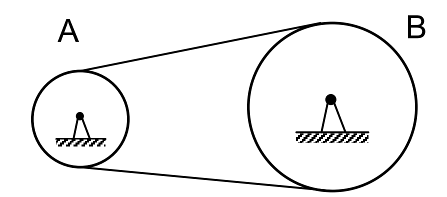
6-56) Determine la "rapidez de avance" de una bicicleta cuando sus ruedas, de 75[cm] de diámetro, giran con rapidez angular de 20[rad/s]. Exprese el resultado en [km/h].

6-57) Un método para medir la rapidez de un proyectil consiste en montar dos discos de cartón en un eje, hacer girar el eje y lanzar el proyectil paralelamente al eje. En cierto ensayo los discos se colocan a 90[cm] de distancia, se hacen girar a 1740[r.p.m.] y se mide que los agujeros dejados por el proyectil están desplazados en un ángulo de 20°. Determine la rapidez del proyectil; examine alternativas y comente.

6-58) La luz proveniente de un "flash" se hace pasar a través de una ranura de una rueda "dentada" que está girando. La rueda tiene 600 dientes; dientes y ranuras están uniformemente distribuidos en su borde. El flash es reflejado por un espejo colocado a 550[m] de distancia de la rueda y regresa justo a tiempo para pasar por la ranura siguiente. Determine la rapidez angular de la rueda para que esto haya sido posible.

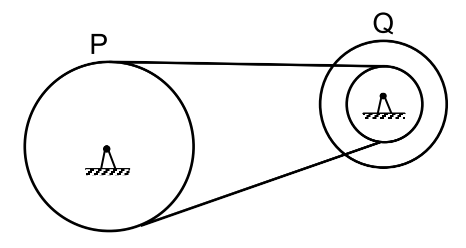
6-59) En un ensayo de frenado de una rueda se ha encontrado que su ángulo de giro cambia con el tiempo según la función $\varphi(t) = a + bt - ct^2$. Las constantes a, b y c son positivas y t es el tiempo transcurrido desde que se aplican los frenos. Determine algebraicamente la rapidez angular media de las ruedas al considerar "pequeños" intervalos de tiempo. Encuentre una relación que dé el instante en que se detiene la rueda. Determine la rapidez angular instantánea.

6-60) Dos ruedas **A** y **B** unidas por una correa que no desliza tienen radios R_A = 0,17[m] y R_B =0,32[m], respectivamente. La rueda **A** tiene una rapidez angular $\omega_A = 1{,}5$ [rad/s]. Calcule la rapidez angular de la rueda **B** y la rapidez de un punto de la correa.



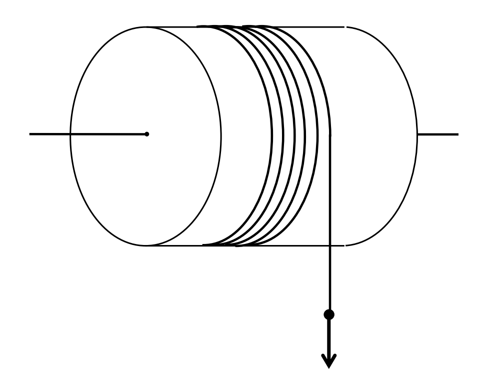
6-61) Un disco gira con rapidez angular constante alrededor de un eje perpendicular a él, que pasa por su centro. La rapidez lineal de un punto en el borde del disco es 2,8 veces mayor que la rapidez lineal de otro punto que se encuentra a 6,5[cm] más cerca del eje de giro. Calcule el radio del disco.

6-62) La rueda **P** está unida, mediante una correa que no desliza, al conjunto **Q** de dos ruedas que forman un solo cuerpo. El radio de la rueda **P** es de 32[cm] y los radios del conjunto **Q** son 7,0[cm] y 24[cm] respectivamente. La correa tiene una rapidez de 1,9[cm/s]. Calcular la rapidez angular y la rapidez de un punto situado en el borde de cada una de las tres ruedas.



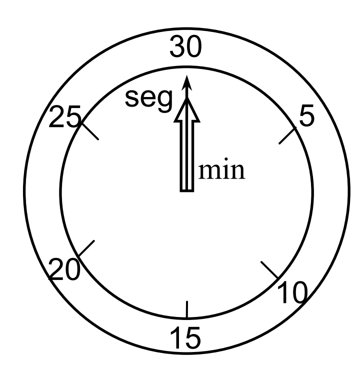
6-63) Suponga que al dar un paseo en bicicleta recorre una distancia de 31[km]. El diámetro de las ruedas es 50[cm]. Calcule el número de vueltas dado por cada rueda. Si pedalea durante 2,3[h] en el paseo, ¿cuál fue la rapidez angular media de las ruedas?

6-64) Una cuerda está enrollada sobre la superficie lateral de un tambor cilíndrico de 50[cm] de diámetro. Si la cuerda se desenrolla con rapidez constante de 0,20[m/s], ¿cuál es la rapidez angular del tambor? Calcule el largo del trozo de cuerda desenrollada en 5,0[s].



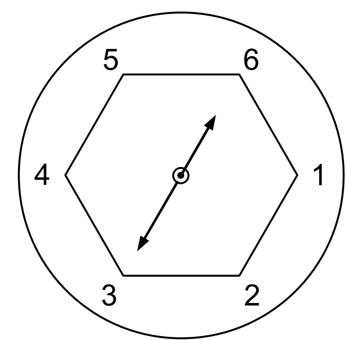
6-65) Ahora el reloj indica las 9:03 horas. ¿Cuál será el ángulo formado entre el minutero y el horario dentro de 17 minutos?

6-66) En un cronómetro la "esfera" está graduada hasta 30. El segundero da una vuelta en 30[s] y el minutero da una vuelta en 30[min]. Parten juntos señalando ambos 30. ¿Cuántos segundos después de la partida el minutero y el segundero forman un ángulo de 180º por primera vez?



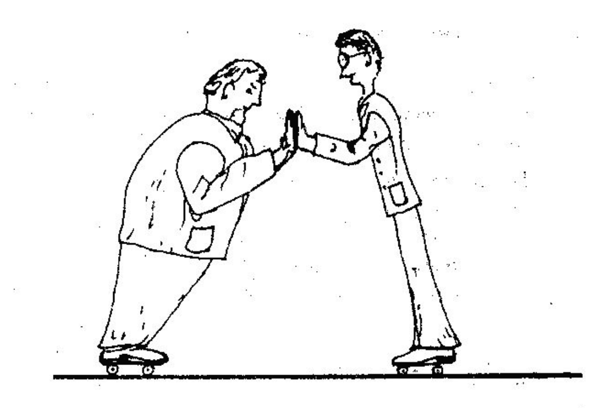
6-67) Son las 16:46 horas. ¿Dentro de cuántos minutos el ángulo que forman el horario y el minutero será el doble del que forman ahora?

6-68) Tenemos un reloj en que la "esfera" está graduada del 1 al 6 en horas. Cuando un reloj normal indica las 00:00[h], este reloj tiene las manecillas en la posición que indica la figura. Calcule la posición del horario y del minutero (que da dos vueltas en cada hora) de este reloj cuando un reloj normal indique las 2:30[h].



CAPÍTULO VII

MASA Y DENSIDAD



Inercia y masa

Piense usted en las siguientes situaciones:

- Si camina con un vaso lleno de agua en la mano y se detiene bruscamente, derrama agua.
- Si viaja en un bus concentrado en la lectura de un libro y el chofer frena bruscamente, resultará lanzado hacia adelante.
- Si es algo gordito y empuja a un compañero flacuchento, lo tirará lejos; si empuja a uno gordote, casi no lo mueve y tenga cuidado que él reaccionará sobre usted.
- En un ascensor "siente" la aceleración en la partida y en la llegada y "no siente" la rapidez cuando ésta es constante. Sensaciones similares se experimentan en el despegue y en el aterrizaje de un avión.

Estos son algunos ejemplos de un mismo tipo de fenómeno físico: el comportamiento de los objetos cuando experimentan aceleraciones, es decir, la resistencia que oponen a los cambios en su estado de movimiento.

El hecho de que este fenómeno físico se presente en **todos** los objetos conocidos hasta hoy, ha inducido a atribuir a los objetos una cierta propiedad, designada con el nombre de **inercia**. A la expresión cuantitativa de la inercia se la denomina **masa** (masa inercial).

No es difícil que usted se dé cuenta de que el tamaño o volumen de un objeto no puede ser usado como medida de la masa del objeto:

Suponga que sobre una mesa están colocadas dos esferas de igual diámetro y pintadas de igual color (igual apariencia). Le dicen que una es una pelota de ping-pong y la otra una bola de acero y le piden que las identifique sin levantarlas. Usted no las podrá distinguir por simple mirada, pero podrá hacerlo dándoles un "empujoncito".

Inicialmente el concepto de masa se introdujo como una medida de la "cantidad de materia" de un objeto y se consideraba su inercia proporcional a su masa. Si pensamos en un cubo macizo de aluminio y en otro de doble volumen y mismo metal, podemos suponer que la "cantidad de materia" del segundo cubo es el doble. Sin embargo, no se han encontrado métodos satisfactorios de medición de "cantidad de materia" con objetos de distintos materiales y distintas formas, por lo cual, este concepto no es de gran utilidad.

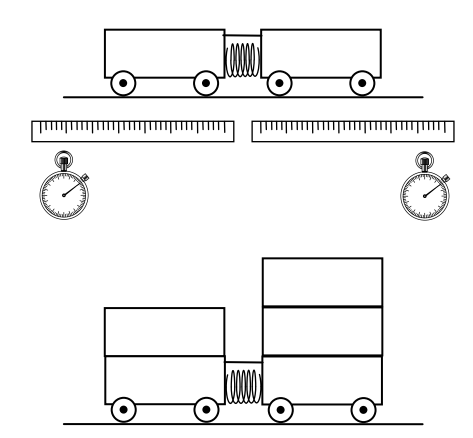
Un método para medir masas

Al introducir una cantidad física es imperativo anexar la descripción de, a lo menos, un método de medición de ella. Con el objeto de ir adquiriendo una idea cuantitativa de la masa podemos pensar en la siguiente situación:

> Dos personas están sobre patines idénticos. Los patines pueden rodar sin ningún impedimento sobre una superficie horizontal muy lisa. Las personas se colocan frente a frente con las palmas de sus manos juntas y se empujan mutuamente. Si observamos que después de separarse ellas retroceden con distinta rapidez, diremos que la que lo hace con *menor rapidez* tiene *mayor masa*.

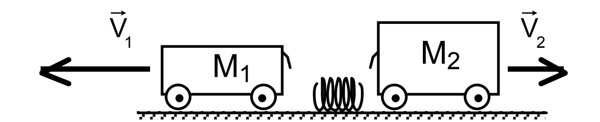
En la situación anterior presentamos la idea de comparar (medir) masas, relacionándolas con rapideces adquiridas. Reemplazando las personas por objetos, usted puede realizar el siguiente experimento:

Construya tres o más bloques de igual material y de igual tamaño y que tengan la forma de paralelepípedos rectos. Monte dos de los bloques sobre ruedas. Comprima un resorte entre estos bloques, manteniéndolos sujetos mediante un hilo; el resorte no debe estar ligado a ninguno de los bloques. Queme el hilo. El resorte se expandirá y empujará a los "carritos" antes de caer. Observe la rapidez de retroceso de cada uno de los carritos. Repita el experimento colocando uno o más bloques sobre los carritos.



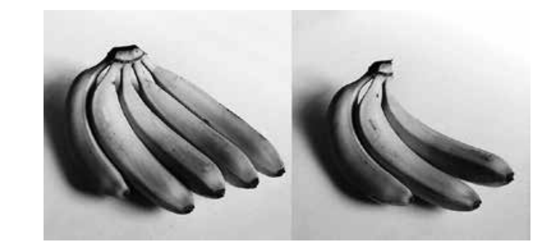
Si determina que después del impulso inicial los carritos retroceden con igual rapidez, dirá que sus masas son iguales. Si la rapidez de uno es la mitad que la del otro, dirá que la masa del primero es el doble que la masa del segundo, etc.

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = v_2 \;\rightarrow\; M_1 = M_2 \\ v_1 = v_2/2 \;\rightarrow\; M_1 = 2M_2 \end{array}\right\} \frac{M_1}{M_2} = \frac{v_2}{v_1}$$



Al estudiar este "experimento" podrá concluir que la masa de un conjunto de bloques es la suma de las masas de cada bloque del conjunto. En este caso la "suma" es del mismo tipo que al operar con número reales.

Si tiene un racimo con 5 plátanos y otro con 3 plátanos, en total tiene 8 plátanos; la masa de los 8 plátanos es la suma de la masa de cada uno de los plátanos.



Esta relación está justificada para las masas de objetos usuales en condiciones ordinarias, como se encuentran en la vida diaria y en la práctica de la ingeniería. Sin embargo, queremos advertirle que esto no siempre sucede así. Por ejemplo, cuando un protón y un neutrón están ligados formando un deuterón, la masa del deuterón es menor que la suma de la masa del protón y la masa del neutrón:

$$M_D = 2{,}01355\,[u] \;<\; 1{,}00728\,[u] \;+\; 1{,}00867\,[u]$$

La diferencia de masa corresponde a la energía de ligazón del sistema formado por un protón y un neutrón.

Unidad básica y patrón de masa

Recordemos que para establecer una unidad de medición para cualquier cantidad física, se puede escoger un objeto o fenómeno arbitrario y el valor correspondiente se designa por 1 [nombre de la unidad]. El objeto o fenómeno mismo, por acuerdo internacional, pasa a convertirse en "patrón de medida de la cantidad física".

Internacionalmente se ha adoptado como unidad y prototipo de masa a:

Un kilogramo es la masa de un cilindro particular de una aleación de platino e iridio acordado por la "*1ª Conferencia General de Pesos y Medidas*", celebrada en París en 1889, y que se encuentra depositado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, France).

Usaremos el símbolo: un kilogramo . . . . . . 1[kg].

El kilogramo prototipo se confeccionó como un cilindro recto con altura y diámetro iguales a 39[mm], intentando que tuviera una masa igual a la de 1000[cm^3] de agua pura a la temperatura de 4[ºC]. Mediciones más precisas efectuadas desde su establecimiento han mostrado que esto no es exactamente válido.

Divertimento: Es importante reconocer que el "kilogramo patrón" no tiene que corresponder necesariamente a la masa de cierta cantidad de agua. Sin embargo, mencionemos que desde hace ya miles de años se ha usado el agua como sustancia de referencia para establecer unidades de medición. Por ejemplo, se ha avanzado la hipótesis de que los sacerdotes en el pueblo de Caldea determinaban la unidad de masa (talento) como la masa del agua escurrida por los orificios de cierto recipiente durante la unidad de tiempo (día); ello determinaba simultáneamente el volumen del agua escurrida.

A diferencia de lo que sucede con los actuales patrones de las unidades de tiempo y distancia, los que están basados en propiedades físicas de ciertos átomos, el patrón de masa es todavía un objeto macroscópico. En un futuro cercano, cuando se aumente la precisión en la determinación de las masas atómicas a más de 7 cifras significativas, podremos tener también un patrón de masa basado en propiedades atómicas.

Masa: órdenes de magnitud

Las masas de diferentes formas de concentración de materia abarcan un amplio rango de órdenes de magnitud: desde valores muy pequeños $\left(\sim 10^{-30}\,[\mathrm{kg}]\right)$ para la masa de un electrón, hasta valores muy grandes $\left(\sim 10^{41}\,[\mathrm{kg}]\right)$ para ciertas galaxias.

Se ha determinado que la masa *en reposo* de un electrón vale:

$$m_e = \left(9{,}10938215 \pm 0{,}00000045\right) \cdot 10^{-31}[\mathrm{kg}] \approx 9{,}11 \cdot 10^{-31}[\mathrm{kg}] \sim 10^{-30}[\mathrm{kg}]$$

Las masas de los átomos, desde el Hidrógeno hasta el "elemento 164", tienen orden de magnitud entre $10^{-27}\,[\mathrm{kg}]$ y $10^{-25}\,[\mathrm{kg}]$.

Para expresar masas de núcleos, átomos y moléculas se usa frecuentemente la "unidad de masa atómica unificada" (1[u]), definida por:

$$1[\mathrm{u}] = \frac{1}{12} \text{ de la masa de un átomo de } C^{12}$$

lo que produce la equivalencia:

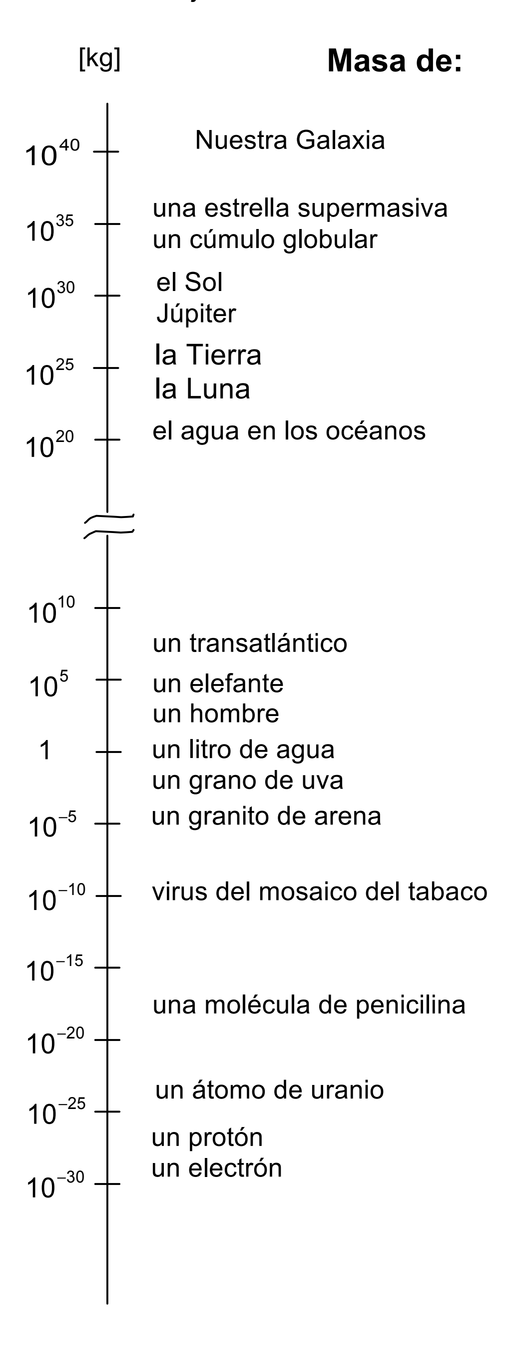
$$1[\mathrm{u}] = \left(1{,}660538782 \pm 0{,}000000083\right) \cdot 10^{-27}[\mathrm{kg}] \approx 1{,}66 \cdot 10^{-27}[\mathrm{kg}]$$

Una bacteria típica tiene una masa del orden de magnitud de 1 picogramo ($1[\mathrm{pg}] = 10^{-12}[\mathrm{g}] = 10^{-15}[\mathrm{kg}]$). Un automóvil mediano tiene una masa del orden de magnitud de $10^3[\mathrm{kg}]$. Los supertanques petroleros más grandes pueden transportar una carga de unas quinientas mil toneladas, es decir, una masa del orden de magnitud de $10^9[\mathrm{kg}]$.

La masa de la Tierra es aproximadamente $6{,}0 \cdot 10^{24}$ [kg], la del Sol es $2{,}0 \cdot 10^{30}$ [kg] y la de nuestra galaxia es de $2{,}2 \cdot 10^{40}$ [kg].

La masa del Universo conocido ha sido estimada del orden de 10^{53} [kg] .

En el gráfico siguiente ilustramos, en una "escala de potencias de 10", los órdenes de magnitudes de las **masas** de ciertos objetos.



Ejercicios

7-1) Estime el valor, en [kg], de la masa del agua contenida en un saco de plástico en el cual cupiera aproximadamente su cuerpo.

7-2) Estime la masa (orden de magnitud en [kg]) de la cantidad de agua que llenaría una esfera hueca con un radio igual al de la Tierra. Compare con la masa de la Tierra.

7-3) Estime la masa del agua de los mares. Infórmese y estime la masa del agua del lago Villarrica.

7-4) Calcule aproximadamente la masa del agua de una piscina.

7-5) Se dice que han caído "27 milímetros" de agua en un día de lluvia. Infórmese sobre el significado de esta expresión. Estime la masa de agua caída en ese día en la ciudad en que usted nació.

7-6) Infórmese sobre los valores de las masas del Sol, de la Tierra, de la molécula de oxígeno y del electrón. Calcule el cuociente entre la masa del Sol y la de la Tierra y el cuociente entre la masa de la molécula de oxígeno y la del electrón. Compare porcentualmente tales cuocientes.

7-7) Estime el número de electrones que tendrían, en conjunto, una masa de 1[kg].

7-8) Se acostumbra a expresar la masa en reposo de las partículas fundamentales en términos de la masa en reposo del electrón m_e. Por ejemplo:

leptón μ	$m_{\mu} \simeq 206,8\,m_e$	mesón π	$m_{\pi^0} \simeq 264,1\,m_e$
protón p^+	$m_{p^+} \simeq 1836,2\,m_e$	neutrón n^0	$m_{n^0} \simeq 1838,7\,m_e$
hiperón Ω^-	$m_{\Omega^-} \simeq 3273\,m_e$		

Exprese la masa de cada una de estas partículas en [kg] y en [u].

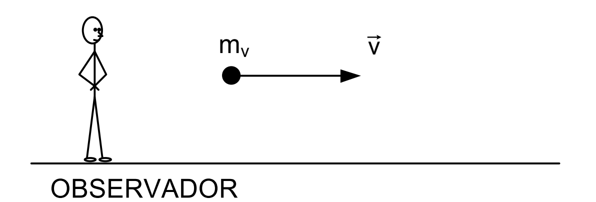
7-9) Considere que el número de estrellas en el universo es del orden de 10^{22} y que la masa promedio de una estrella es del orden de 10^{31}[kg]. Estime el número de protones en el Universo.

7-10) Estime el número de electrones que hay en la Tierra. Suponga que, en término medio, por cada electrón en la Tierra hay un protón y un neutrón.

7-11) Hasta hace poco se usaba la "unidad de masa atómica" , 1[u.m.a.], definida como 1/16 de la masa del isótopo O^{16} , con la equivalencia: 1[u.m.a.] $\triangleq 1,65979 \cdot 10^{-27}$[kg]. Esta difería ligeramente de una "escala química" en la que el valor 16 se asignaba a la masa atómica correspondiente al oxígeno natural (una mezcla de 99,76% de O^{16}; 0,039% de O^{17} y 0,204% de O^{18}). En la "*Conferencia de la Comisión Internacional para Masas Atómicas*" de 1961 se adoptó la "unidad de masa atómica unificada" basada en el isótopo C^{12}, que ya se la hemos presentado. El calificativo de "unificada" indica el acuerdo para su uso en Física y en Química. Calcule usted la equivalencia: 1[u.m.a.] $\triangleq$? [u].

7-12) Entre las unidades de masa usadas en Babilonia hallábanse el *talento y el ciclo*. Para ellos rigen las equivalencias 1[talento] $\triangleq$ 30,5[kg] y 1[talento] $\triangleq$ 3,6[ciclo]. Exprese el *ciclo* en término de kilogramos.

Comentario. Al comienzo del siglo XX, con la introducción de la teoría de la relatividad, el concepto de masa fue reexaminado. Ciertos resultados de mediciones relacionadas con el movimiento de las partículas, pueden interpretarse como que la masa de cada partícula aumenta con su rapidez según la relación:



$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

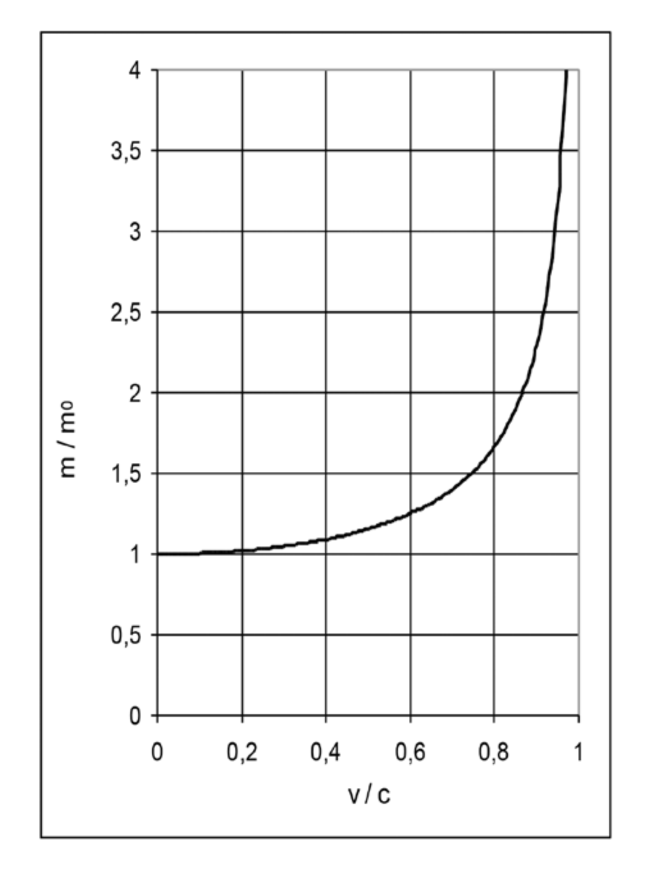
en donde:

c : rapidez de propagación de la luz en el vacío.

v : rapidez de la partícula.

m_0: masa de la partícula cuando está en reposo.

m_v: masa de la partícula cuando se mueve con rapidez v.



Esta relación ha sido ampliamente verificada en multitud de experimentos y al presente, no hay dudas sobre su validez.

Sin embargo, el aumento de masa es apreciable solamente cuando su rapidez es comparable con la rapidez de propagación de la luz en el vacío.

* Si $v = 0{,}81c \simeq 240.000\,[km/s]$ resulta que $m_v \simeq 1{,}7m_0$

* Considerando rapideces extremadamente altas para cuerpos corrientes, como 50.000[km/h] , que al presente no ha sido mantenida por ningún cuerpo macroscópico en la Tierra, obtenemos que $m_v \simeq 1{,}000000002 \cdot m_0$ el aumento de masa es insignificante.

En consecuencia, para todas las aplicaciones en la vida diaria y en la práctica corriente de la ingeniería, podemos considerar que la masa de un cuerpo es **constante**.

La teoría de la relatividad muestra además otra importantísima característica de la masa: su relación con la energía. Más adelante en nuestro estudio comentaremos sobre ella.

Ejercicios

7-13) Controle la consistencia dimensional de la relación:

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

7-14) Calcule la rapidez con la que debería moverse un electrón, respecto a cierto observador en un laboratorio, para que éste detectara un aumento de 200% respecto al reposo en la masa del electrón.

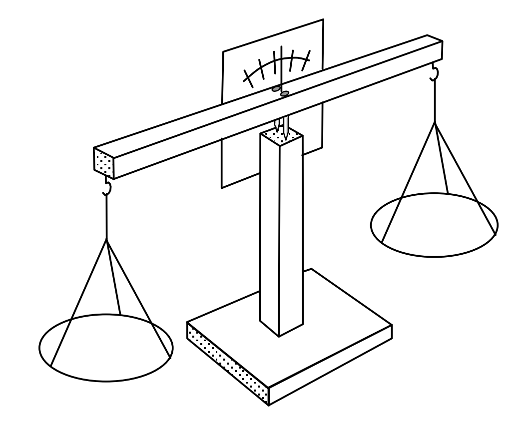
7-15) Examine la posibilidad de que la rapidez de una partícula fuese igual o mayor que *c*.

Otro método para comparar masas

El procedimiento descrito anteriormente, basado en la observación del movimiento de dos "carritos" para comparar la masa de los cuerpos, no es el más práctico. Corrientemente se usa una **balanza**.

Usted puede construir una "balanza de brazos iguales" con elementos simples:

Sobre una base de madera, fije un listón vertical. En el punto medio de un segundo listón fije un soporte "puntiagudo" por ejemplo, un par de clavos. En los extremos de este listón cuelgue dos platillos iguales, por ejemplo, tapas de tarro, usando tres cuerdas simétricamente dispuestas. Ajuste los platillos de modo que el listón superior quede horizontal.



Consideremos tres objetos, identificados por A, B y C. Se ha determinado, por el "método de los carritos", que A y B tienen igual masa y que la masa de C es el doble que la masa de A y de B: $m_A = m_B$ y $m_C = 2m_A = 2m_B$

Si se colocan los objetos A y B, uno en cada platillo de la balanza de brazos iguales ya preparada, se determina experimentalmente que la balanza se mantiene en equilibrio (el listón superior sigue horizontal). Además, si se colocan A y B en un platillo y C en el otro platillo, también se mantiene el equilibrio.

Este experimento muestra que ambo métodos para comparar masas, el los carritos y el de la balanza, son equivalentes.

Entonces, disponiendo de una colección de objetos de masa conocida, indicadas en kilogramos o múltiplos y submúltiplos de él, podemos determinar la masa de un objeto arbitrario:

Coloque este objeto en uno de los platillos y vaya colocando uno a uno los objetos de masa conocida en el otro platillo hasta obtener el equilibrio. La masa del objeto que está midiendo es igual a las sumas de las masas de los objetos que colocó en el otro platillo.



Usted podrá darse cuenta que los dos métodos de medición de masa ya indicados, carritos y balanza, son **equivalentes**, esto es, ambos dan el mismo valor para la masa de un mismo objeto.

Advertencia: masa y peso

Estamos seguros que usted ha usado frecuentemente las palabras **masa** y **peso**. Es nuestro deber advertirle que masa y peso son cantidades físicas conceptualmente diferentes, aunque están relacionadas. Esto lo trataremos más adelante, por el momento le pedimos que piense en la siguiente situación:

Considere las dos esferas de distinto material pero de igual diámetro, la pelota de ping-pong y la bola de acero a las que nos referimos anteriormente. Suponga que estas esferas están en una "cápsula espacial" situada en una región del espacio (por ejemplo, cierto lugar entre la Tierra y la Luna) en donde el "efecto gravitacional" no se manifiesta, es decir, las esferas no tienen peso. En tal lugar, todavía sería más difícil comunicar la misma aceleración a la bola de acero que a la pelota de ping-pong, esto es, ambas siguen teniendo la misma diferencia de masa.

¡Aún en la ausencia de peso, la masa de un objeto permanece!

Unidades de medición de masa

La unidad de medición de masa que está internacionalmente recomendada para ser empleada en Física es:

un kilogramo . . . . . 1[kg]

Para diferentes aplicaciones resulta conveniente usar otras unidades que tengan valores múltiplos o submúltiplos del kilogramo. En el "sistema métrico decimal de unidades" hacemos esto mediante "potencias de 10 ", las que indicamos por los prefijos ya convenidos, micro…, mili…, kilo…, mega.

En realidad, ya en la unidad kilogramo estamos usando el prefijo "kilo"; por lo cual tenemos:

Un gramo $1[g] \triangleq 10^{-3}[kg]$ $1[kg] \triangleq 10^{3}[g]$

A partir del gramo podemos expresar masas más pequeñas, en términos de las unidades:

Un miligramo $1[mg] \triangleq 10^{-6}[kg]$

Un microgramo $1[\mu g] \triangleq 10^{-6}[g]$

A ciertas unidades múltiplos de 1[kg] se ha dado nombres especiales, por ejemplo:

Un quintal métrico $1[q] \triangleq 10^{2}[kg]$

Una tonelada métrica $1[t] \triangleq 10^{3}[kg]$

En el "sistema inglés de unidades de medición" la unidad fundamental de masa es la **libra** (*standard avoirdupois pound*). Inicialmente ella se basaba en un patrón propio: un cilindro recto de 1,15[in] de diámetro y 1,35[in] de altura, legalizado en 1855 y en custodia en el *Board of Trade, London*.

En la actualidad se define la libra en términos del "kilogramo patrón internacional":

Una libra (*one pound*) . . . . $1[lb] \triangleq 0,45359237[kg]$

Para cálculos con tres cifras significativas usaremos las equivalencias aproximadas:

$1[lb] \hat{\approx} 0,454[kg]$ $1[kg] \hat{\approx} 2,20[lb]$

y análogamente, al trabajar con cuatro cifras significativas usaremos:

$1[lb] \triangleq 0,4536[kg]$ $1[kg] \triangleq 2,205[lb]$

Otras unidades de masa en el sistema inglés (*avoirdupois*) son:

Un dram (*one dram*) 1[dram]

Una onza (*one ounce*) 1[oz]

Una tonelada (*one ton*) 1[ton]

las que se definen por las equivalencias:

$16[oz] \triangleq 1[lb]$ $16[dram] \triangleq 1[oz]$ $1[ton] \triangleq 2000[lb]$

Estas unidades inglesas llevan el calificativo *avoirdupois* para distinguirlas de otras unidades inglesas de masa con los distintivos de *apothecary* usadas en farmacia, y *troy* usadas para metales nobles y piedras preciosas.

Divertimento

La masa de piedras preciosas se expresa en la unidad:

un quilate (karat) . . . . . 1[kt]

para la cual casi todos los países han legalizado la equivalencia:

$$1[kt] \triangleq 0{,}200[g] \quad o \quad 1[g] \triangleq 5{,}00[kt]$$

La palabra “quilate” es también usada para expresar la **pureza** de metales nobles con el significado:

Un metal noble es de 24 quilates si es **puro**.

Por ejemplo, un objeto de oro de “18 quilates” se compone de: 18/24 = 3/4 de oro puro y 1/4 de otros metales que forman la aleación. Si la masa del objeto es 80[g], entonces 60[g] son de oro.

Ejemplos

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos que involucran conversiones de unidades, principalmente de masa:

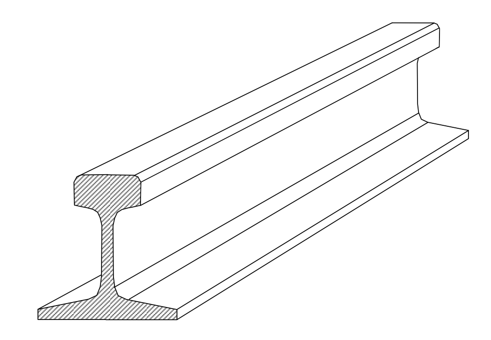
- Cierta barra de fierro perfilado cuyo largo mide 1,8[m] tiene una masa de 16,7[kg].

Supongamos que la barra es homogénea y calculemos la masa, en [lb], de un trozo de esa barra de 4,5[ft] de largo.

Llamemos M a la masa de la barra y L a su largo.

Suponer que la barra sea **homogénea** implica que la masa es proporcional al largo; esto es:

la masa de un trozo de largo ℓ es $m_\ell = \frac{M}{L} \cdot \ell$



Expresemos la masa y la longitud de la barra en unidades inglesas:

$$M = 16{,}7\,[kg] \;\triangleq\; 16{,}7\,[kg] \cdot \frac{1[lb]}{0{,}454[kg]}$$

$$\triangleq\; \frac{16{,}7}{0{,}454}[lb] \simeq 36{,}8[lb]$$

$$L = 1{,}8\,[m] \;\triangleq\; 1{,}8[m] \cdot \frac{1\,[ft]}{0{,}3048\,[m]} \triangleq$$

$$\triangleq\; \frac{1{,}8}{0{,}3048}[ft] \simeq 5{,}9[ft]$$

y con $\ell = 4,5[\text{ft}]$, resulta:

$$m_\ell = \frac{36,8\,[\text{lb}]}{5,9\,[\text{ft}]} \cdot 4,5\,[\text{ft}] \triangleq \frac{36,8 \cdot 4,5}{5,9}[\text{lb}] \simeq 28\,[\text{lb}]$$

por lo tanto, la masa de un trozo de 4,5[ft] tiene aproximadamente 28[lb].

- Una cantidad física tiene el valor $R = 74,3\,[\text{lb} \cdot \text{ft}/\text{s}^2]$. Encontremos su valor expresado en $\left[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2\right]$.

Usando el método de sustitución descrito en el capítulo dos:

$$R = 74,3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \triangleq \frac{74,3 \cdot 1[\text{lb}] \cdot 1[\text{ft}]}{1[\text{s}^2]}$$

y usar las equivalencias:

$$1[\text{lb}] \triangleq 0,4536[\text{kg}] \triangleq 453,6[\text{g}]$$
$$1[\text{ft}] \triangleq 0,3048[\text{m}] \triangleq 30,48[\text{cm}]$$

entonces:

$$R = 74,3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \triangleq \frac{74,3 \cdot 453,6\,[\text{g}] \cdot 30,48[\text{cm}]}{1[\text{s}^2]} \triangleq$$
$$\triangleq 74,3 \cdot 453,6 \cdot 30,48\,[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2] \simeq 1,03 \cdot 10^6[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2]$$

Podemos también usar "factores de conversión":

$$R = 74,3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \triangleq 74,3\left[\frac{\text{lb} \cdot \text{ft}}{\text{s}^2}\right] \cdot \frac{453,6\,[\text{g}]}{1[\text{lb}]} \cdot \frac{30,48\,[\text{cm}]}{1[\text{ft}]} \triangleq$$
$$\triangleq 74,3 \cdot 453,6 \cdot 30,48\left[\frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}\right] \cong 1,03 \cdot 10^6[\text{g} \cdot \text{cm}/\text{s}^2]$$

Además, examinando las unidades en que está expresada la cantidad física *R*, podemos determinar que su dimensión es:

$$\dim(R) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \tau^{-2}$$

* Consideremos una partícula de masa m que se mueve con rapidez v. Asociamos a ella una cantidad física cuya magnitud se define por la ecuación $p = m \cdot v$.

$$\text{Con } \dim(m) = \mathcal{M} \quad \text{y} \quad \dim(v) = \mathcal{L} \cdot \tau^{-1}$$

Resulta $\dim(p) = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L} \cdot \tau^{-1}$

Para una partícula con m = 127[g] y v = 40,6[km/h] , el valor de p , expresado en $[kg \cdot m/s]$, es:

$$p = m \cdot v = 127\,[g] \cdot 40{,}6\,[km/h] \triangleq$$

$$\triangleq 127\,[g] \cdot \frac{1\,[kg]}{1000\,[g]} \cdot 40{,}6\,[km/h] \cdot \frac{1\,[m/s]}{3{,}6\,[km/h]}$$

$$\triangleq \frac{127 \cdot 40{,}6}{1000 \cdot 3{,}6}\,[kg \cdot m/s] \quad \simeq \quad 1{,}43\,[kg \cdot m/s]$$

** Para un cuerpo de masa M que gira alrededor de un eje, resulta conveniente definir la cantidad física $I = k \cdot M$, donde $\dim(k) = \mathcal{L}^2$.

Consideremos cierto caso particular para el cual, en el “sistema inglés de mediciones”, se tiene:

$$I = 0{,}28\,M \quad \text{con} \quad M = M_i\,[lb] \quad \text{para dar } I = I_i\,[ft^2 \cdot lb]$$

donde los números M_i e I_i son los “números de medición” correspondientes.

Por ejemplo, para M = 25,6 [lb] calculemos la cantidad I , expresándola en $[m^2 \cdot kg]$:

$$I = 0{,}28M \;=\; (0{,}28 \cdot 25{,}6)[ft^2 \cdot lb] \simeq 7{,}2\,[ft^2 \cdot lb] \triangleq$$

$$\triangleq 7{,}2\,[ft^2 \cdot lb] \cdot \left(\frac{0{,}3048\,[m]}{1\,[ft]}\right)^2 \cdot \frac{0{,}4536\,[kg]}{1\,[lb]} \triangleq$$

$$\triangleq 7{,}2 \cdot (0{,}3048)^2 \cdot 0{,}4536\,[m^2 kg] \simeq 0{,}30\,[m^2\,kg]$$

Este ejemplo numérico sugiere que podríamos obtener una relación para la cantidad física I de tal forma que al introducir M en [kg] resulte I en $[m^2 \cdot kg]$, esto es:

$$I = k\,M \qquad \text{con} \qquad M = M_m\,[kg] \qquad \text{produce } I = I_m\,[m^2 \cdot kg]$$

donde M_m e I_m son los correspondientes números de medición. Hay que encontrar el valor del factor α tal que $k = \alpha\,[m^2]$.

Para la masa tenemos simplemente:

$$M = M_i\,[lb] \triangleq M_i[lb] \cdot \frac{0{,}4536\,[kg]}{1\,[lb]} \;\triangleq\; 0{,}4536 \cdot M_i\,[kg] = M_m\,[kg]$$

En forma análoga:

$$I = I_i\,[ft^2 \cdot lb] \;\hat{=}\; I_i\,[ft^2 \cdot lb] \cdot \left(\frac{0{,}3048\,[m]}{1\,[ft]}\right)^2 \cdot \frac{0{,}4536\,[kg]}{1\,[lb]} \;\hat{=}$$

$$\hat{=}\; I_i \cdot \left(0{,}3048\right)^2 \cdot 0{,}4536\,[m^2 \cdot kg]$$

finalmente, usando $I_i = 0{,}28 M_i$ y ordenando términos:

$$I = 0{,}28 \cdot \left(0{,}3048\right)^2 \cdot \left(0{,}4536 M_i\right) \;[m^2 \cdot kg] =$$

$$= 0{,}28 \cdot \left(0{,}3048\right)^2 \cdot M_m\,[m^2 \cdot kg] \simeq$$

$$\simeq 2{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot M_m\,[m^2 \cdot kg] = I_m\,[m^2 \cdot kg]$$

o sea, el factor buscado tiene el valor $2{,}6 \cdot 10^{-2}$

El factor α puede ser obtenido más directamente, hágalo.

Ejercicios

7-16) Suponga que dispone de una "balanza de brazos iguales" y de un objeto cuya masa es 1[kg]. Describa cómo preparar dos cuerpos cuyas masas sean de 1/2[kg].

7-17) Exprese 2,75[t] en [mg] , [g] , [kg] , [q] y [Mg].

7-18) En un periódico inglés informan que ha caído un meteorito de 128[lb] de masa. Exprese esta masa en [ton] y en [kg].

7-19) En el sistema inglés "avoirdupois" se usa la unidad: 1[grain] con la equivalencia $7000[\text{grain}] \hat{=} 1[\text{lb}]$. Calcule la equivalencia entre "grain" y "gramo": 1[grain] $\hat{=}$? [g]. El "grain" es una unidad común para los tres sistemas ingleses avoirdupois, troy y aphothecary de unidades de medición de masa. En el sistema inglés "troy" para la "onza troy" rige la equivalencia $1[oz_t] \hat{=} 480[\text{grain}]$. Determine las equivalencias:

$$1[oz_t] \;\hat{=}\; ?\,[g] \qquad y \qquad 1[oz_t] \;\hat{=}\; ?\,[oz]$$

7-20) Una cantidad física K, asociada a una partícula en movimiento tiene el valor 840 $[kg \cdot m^2/s^2]$. Exprese el valor de K en $[lb \cdot ft^2/min^2]$. Determine la dimensión de K en términos de la dimensiones de tiempo, longitud y masa.

7-21) Considere una partícula de masa M = a [kg] que está a una cierta distancia r [m] de cierto objeto. Para un caso particular cierta cantidad física está determinada por la relación:

$$V(r) = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-3} \cdot a}{r} \;[kg \cdot m^2/s^2]$$

Determine la dimensión de V y la dimensión de la constante numérica. Elija un valor para M y represente gráficamente "V en función de r".

7-22) Considere una partícula de masa M que describe una órbita circunferencial de radio R con rapidez v. Una cantidad física importante en el estudio de tal movimiento es $L = R \cdot M \cdot v$. Para un caso particular se tiene $L = (7{,}1 \cdot 10^6 \cdot v)$ [kg · m²/s] cuando la rapidez v se da en [m/s]. Calcule el valor de L cuando la rapidez vale 18000 [mile/h]. Transforme la expresión L al "sistema inglés de mediciones" de tal forma que al usar v en [ft/s] resulte L en [lb · yd²/s]

7-23) Una esfera sólida y homogénea de masa M y radio R se hace girar alrededor de un eje que pasa por su centro, con rapidez angular ω.

Determine la dimensión de $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2MR^2}{5} \cdot \omega^2$

Piense en un objeto determinado e invente valores razonables para M y R en unidades del sistema métrico. Exprese, con tales valores, la cantidad T en función de ω^2, para ω [rad/s] . Modifique el factor numérico para que al introducir ω en [r.p.m.] no cambie el resultado de T.

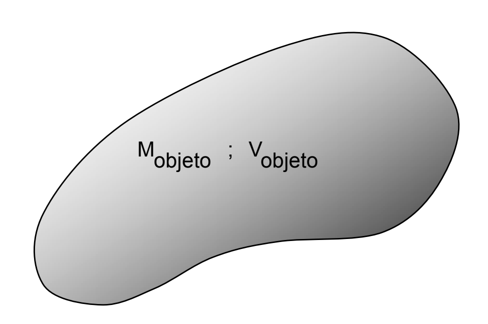
Densidad

Hemos mencionado dos objetos que tienen igual volumen, pero distinta masa: una pelota de ping-pong y una bola de acero de igual diámetro. También es fácil pensar en objetos que tengan igual masa y distinto volumen: un paquete de 1[kg] de algodón y un trozo de plomo de 1[kg] .

Esto nos induce, naturalmente, a establecer una relación entre la masa y el volumen de un objeto. Un método útil para comparar cantidades físicas es establecer el **cuociente** entre ellas. Definimos en consecuencia:

$$\text{densidad de un objeto} = \frac{\text{masa del objeto}}{\text{volumen del objeto}}$$

$$\rho_{objeto} = \frac{M_{objeto}}{V_{objeto}}$$



Mencionemos que con igual propósito podemos considerar el cuociente inverso:

Volumen / masa

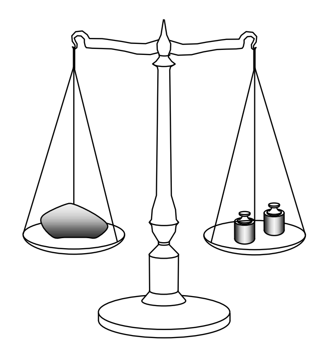
A este cuociente se da el nombre de "volumen específico".

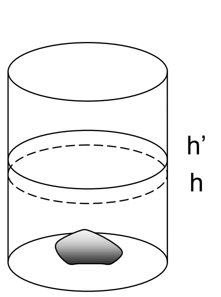
Un experimento

Determinemos la masa y el volumen de una piedra de tamaño conveniente.

Empleando una balanza realizamos varias mediciones, dando como promedio :

$$M_{piedra} \simeq 58\,[g]$$





Con un "vaso graduado" determinamos su volumen: echamos agua hasta cierto nivel h. Al sumergir la piedra el agua sube al nivel h'; el volumen de la piedra corresponde a la diferencia de los volúmenes indicados por los niveles. El resultado de varias mediciones fue:

$$V_{piedra} \simeq 21[cm^3]$$

Con estos datos determinamos:

$$\rho_{piedra} = \frac{M_{piedra}}{V_{piedra}} = \frac{58[g]}{21[cm^3]} \triangleq \frac{58}{21}\left[g/cm^3\right] \simeq 2{,}8[g/cm^3]$$

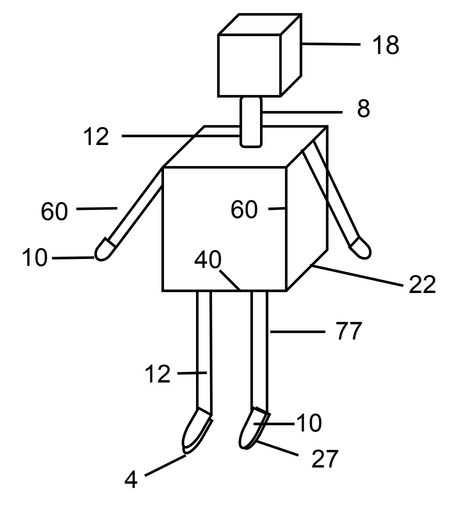
Con este procedimiento podemos determinar la densidad de cualquier cuerpo sólido, no soluble en agua, que no sea más grande que el vaso, y sin importar cuán complicada sea su geometría.

Un cálculo aproximado

Queremos encontrar un valor aproximado para la densidad del cuerpo humano.

Tomamos las "medidas" de un joven de 73[kg] de masa. Para calcular aproximadamente el volumen de su cuerpo, bosquejamos un "robot" tal como se indica en la figura.

El resultado de los cálculos, como usted puede verificarlo, da el valor:



Medidas en [cm]

$$V_{cuerpo} \simeq 80 \cdot 10^3 [cm^3] \triangleq 80 [dm^3]$$

$$\rho_{cuerpo} = \frac{M_{cuerpo}}{V_{cuerpo}} \simeq \frac{73 [kg]}{80 [dm^3]}$$

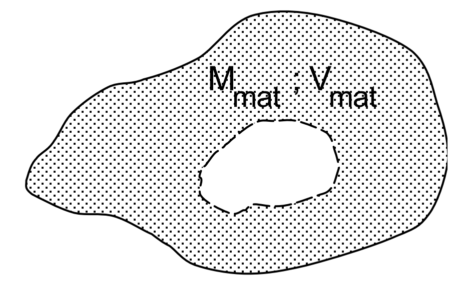
$$\triangleq \frac{73}{80} \left[kg/dm^3 \right] \simeq 0,91 \left[kg/dm^3 \right]$$

Le proponemos que usted se entretenga calculando en esta forma la densidad de su propio cuerpo. Además, usted puede controlar el cálculo de su volumen usando una tina de baño; ingénieselas para hacerlo.

Densidad de un material

- Al definir la "densidad de un objeto" (masa del objeto/volumen del objeto) no hemos considerado la composición del objeto (tipo de materiales de los que está constituido), ni su configuración geométrica (posibles huecos en un cuerpo sólido), ni las condiciones externas a las que está sometido (presión, temperatura, etc.). Hemos considerado el objeto como un todo y en un ambiente externo particular.

Consideremos ahora un cuerpo sólido con una cavidad interior. Sin preocuparnos de la cavidad que puede estar "vacía" o contener un gas de masa despreciable respecto a la masa total del cuerpo, podemos definir:



$$\text{densidad media del material} = \frac{\text{masa del material}}{\text{volumen del material}}$$

$$\bar{\rho} = \frac{M_{mat}}{V_{mat}}$$

donde hemos usado el término "densidad media" para cubrir la posibilidad de que la composición del material varíe en diferentes porciones de él.

- Si un cuerpo es **homogéneo** las masas de porciones que tienen igual volumen son iguales. Esto es, si:

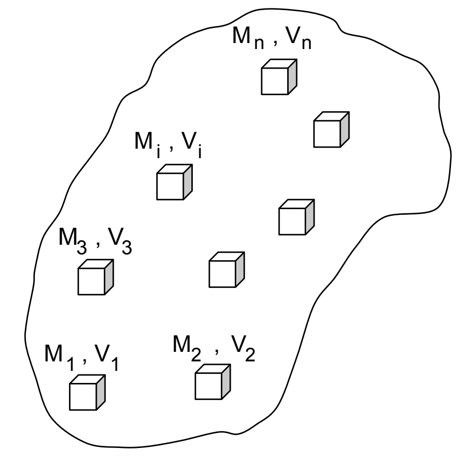
$$V_1 = V_2 = ... = V_i = \ldots = V_n$$

entonces, para las correspondientes masas se cumple:

$$M_1 = M_2 = ... = M_i = \ldots = M_n$$

y los cuocientes entre las correspondientes masas y volúmenes son iguales:

$$\frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2} = \ldots = \frac{M_i}{V_i} = \ldots = \ldots = \frac{M_n}{V_n}$$



Estos cuocientes definen una propiedad del material de que está confeccionado el cuerpo: la densidad del material. En otras palabras, densidad de un material es la masa por unidad de volumen de un cuerpo homogéneo confeccionado con este material:

$$\rho_{\text{material}} = \frac{M}{V}, \text{ de un cuerpo homogéneo.}$$

El valor de la densidad de un material, por ser una propiedad de él, puede ser usado como una característica para su identificación. Por ejemplo, en caso de minerales donde la homogeneidad varía, un rango de valores de densidades puede ser citado para tipificar muestras del mineral.

Dimensión y unidades de medición de densidad

De la definición de densidad como cuociente entre la masa y el volumen de un objeto o material, $\rho = M/V$ se deducen directamente su dimensión y las unidades de medición en que se expresa.

Como $\text{dim(masa)} = \mathcal{M}$ y $\text{dim(volumen)} = \mathcal{L}^3$, siendo $\mathcal{L}$ la dimensión de longitud, resulta:

$$\text{dim(densidad)} = \text{dim(masa/volumen)} = \mathcal{M} \cdot \mathcal{L}^{-3}$$

Cada unidad de densidad resulta del cuociente entre unidades de masa y de volumen.

En el *Sistema Internacional de Unidades*, expresando la masa en [kg] y el volumen en [m^3], obtenemos:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M_m\,[\text{kg}]}{V_m\,[\text{m}^3]} \triangleq \frac{M_m}{V_m}\left[\text{kg}/\text{m}^3\right] = \rho_m\left[\text{kg}/\text{m}^3\right]$$

o sea, la unidad básica de densidad es 1 [kg/m^3] .

En la práctica de la ingeniería y en otras ciencias, se usan corrientemente las unidades 1 [kg/dm^3] o 1 [g/cm^3]; tenemos por ejemplo, las equivalencias:

$$1\ [\mathrm{kg/m^3}] \triangleq 10^{-3}\ [\mathrm{kg/dm^3}] \qquad 1\ [\mathrm{kg/dm^3}] \triangleq 1\ [\mathrm{g/cm^3}]$$

En el sistema inglés de unidades se usan, entre otras, para densidad las unidades:

$$1\ [\mathrm{lb/yd^3}], \quad 1[\mathrm{lb/ft^3}] \quad \text{y} \quad 1[\mathrm{lb/gal}]$$

Usando las equivalencias de masa y volumen ya conocidas, podemos practicar transformaciones de unidades de densidad:

- Determinemos la equivalencia: $1[\mathrm{kg/dm^3}] \triangleq\ ?\ [\mathrm{lb/gal}]$

Recordemos las equivalencias:

$1[\mathrm{lb}] \triangleq 0{,}4536\ [\mathrm{kg}]$, $\quad 1\ [\mathrm{gal}] \triangleq 231[\mathrm{in^3}]$ $\quad$ y $\quad 1\ [\mathrm{in}] \triangleq 2{,}54\ [\mathrm{cm}]$

Obtenemos sucesivamente:

$$1[\mathrm{gal}] \triangleq 231[\mathrm{in^3}] \triangleq 231[\mathrm{in^3}]\cdot\left(\frac{2{,}54\,[\mathrm{cm}]}{1[\mathrm{in}]}\right)^3\cdot\left(\frac{1[\mathrm{dm}]}{10\,[\mathrm{cm}]}\right)^3 \triangleq$$

$$\triangleq \frac{231\cdot(2{,}54)^3}{10^3}[\mathrm{dm^3}] \simeq 3{,}785\,[\mathrm{dm^3}]$$

$$1\left[\mathrm{kg/dm^3}\right] \triangleq 1\left[\mathrm{kg/dm^3}\right]\cdot\frac{1[\mathrm{lb}]}{0{,}4536\,[\mathrm{kg}]}\cdot\frac{3{,}785\,[\mathrm{dm^3}]}{1[\mathrm{gal}]} \triangleq$$

$$\triangleq \frac{3{,}785}{0{,}4536}\left[\mathrm{lb/gal}\right] \simeq 8{,}344\left[\mathrm{lb/gal}\right]$$

- Este problema presenta la siguiente alternativa, si la densidad de cierta substancia está expresada por:

$$\rho = \rho_m\left[\mathrm{kg/dm^3}\right] \triangleq \rho_i\left[\mathrm{lb/gal}\right]$$

nos interesa encontrar la relación entre los correspondientes números de medición ρ_m en el sistema métrico y ρ_i en el sistema inglés:

$$\rho = \rho_m\left[\mathrm{kg/dm^3}\right] \triangleq \rho_m\left[\mathrm{kg/dm^3}\right]\cdot\frac{1[\mathrm{lb}]}{0{,}4536\,[\mathrm{kg}]}\cdot\frac{3{,}785\,[\mathrm{dm^3}]}{1[\mathrm{gal}]}$$

$$\rho_m\cdot\frac{3{,}785}{0{,}4536}\left[\mathrm{lb/gal}\right] \simeq 8{,}344\,\rho_m\left[\mathrm{lb/gal}\right] = \rho_i\left[\mathrm{lb/gal}\right]$$

entonces: $\rho_i = 8{,}344\rho_m$

Densidad: orden de magnitud

La masa de $1[\ell]$ de agua es 1[kg], aproximadamente. Entonces, la densidad del agua es aproximadamente 1[kg/dm^3] $\triangleq$ 10^3[kg/m^3] y escribimos: $\rho_{agua} \sim 10^3 \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right]$.

Los valores de densidades que se presentan en la Naturaleza cubren un rango muy amplio de órdenes de magnitud, desde un valor estimado del orden de 10^{-25} [kg/m^3] para el Universo como un todo, hasta valores de 10^{18} [kg/m^3] para núcleos atómicos.

Con los valores estimados de la masa del Universo, del orden de 10^{53} [kg], y el del radio del Universo, del orden de 10^{26} [m] , resulta:

$$\rho_{universo} \sim 10^{53} \Big/ \left(10^{26}\right)^3 \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right] = 10^{-25} \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right]$$

Para un protón, con una masa del orden de 10^{-27}[kg] y un radio del orden de 10^{-15}[m], resulta:

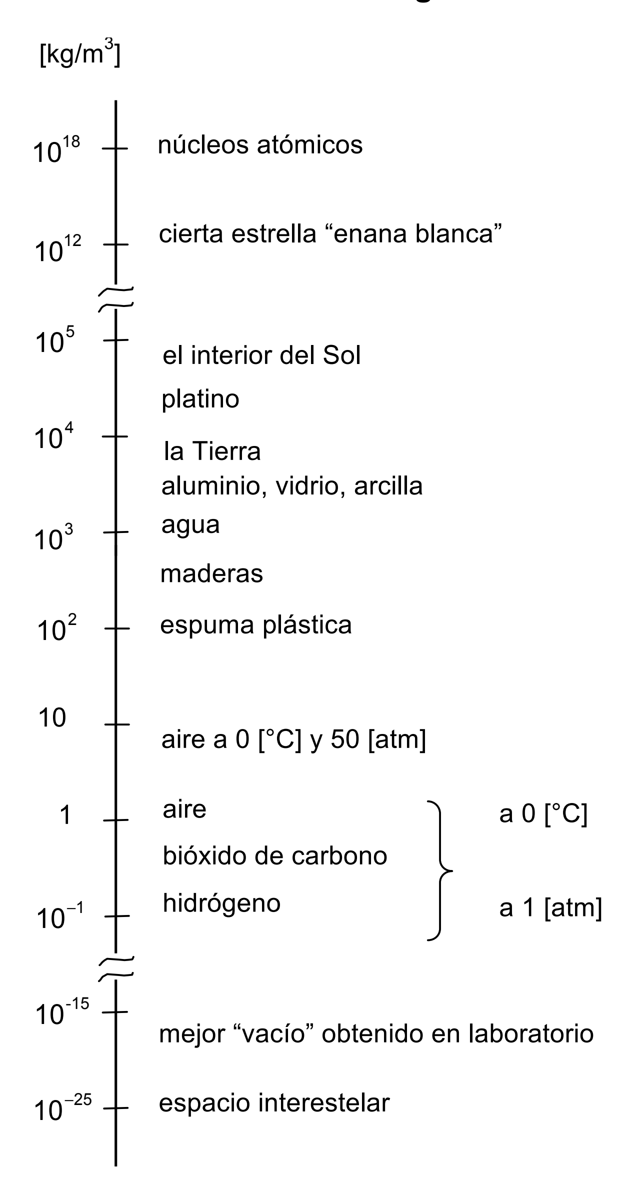
$$\rho_{protón} \sim 10^{-27} \Big/ \left(10^{-15}\right)^3 \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right] = 10^{18} \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right]$$

Para realizar un gran número de experimentos en Física y también para ciertos procesos industriales es necesario producir un “alto vacío”: disminuir al máximo la materia contenida en un recipiente. Aún con las técnicas más avanzadas no se ha logrado obtener densidades menores que del orden de 10^{-16} [kg/m^3] .

Con los valores del radio medio de la Tierra, $R_T \approx 6371[\text{km}]$ y de la masa de la Tierra, $M_T \approx 5{,}974 \cdot 10^{24}\,[\text{kg}]$, será fácil para usted verificar que la “densidad media de la Tierra” vale $\rho_t \simeq 5{,}5 \cdot 10^3 \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right]$.

Hay estrellas tan *poco densas* que $\rho \sim 10^{-7} \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right]$ y otras *tan densas* que $\rho \sim 10^{18} \left[\text{kg}/\text{m}^3 \right]$.

Orden de Magnitud de la Densidad de:



Ejercicios

7-24) Estime la masa del aire contenido en su dormitorio.

7-25) Estime la masa de un depósito de arena de forma cónica de 10[m] de radio basal y de 5[m] de altura.

7-26) Estime el volumen y la masa del cerro "La Campana".

7-27) La atmósfera terrestre tiene una masa del orden de 10^{18}[kg]. Estime el espesor, o altura sobre la superficie de la Tierra, que tendría tal capa si fuese homogénea.

7-28) Considere que el agua que hay en la Tierra ocupa un volumen del orden de 10^{17}[m^3]. Calcule qué porcentaje del volumen y de la masa de la Tierra corresponde al agua.

7-29) Suponiendo que la masa del Universo estuviera uniformemente distribuida y usando el valor estimado de la "densidad del Universo" ¿cuánto mediría la arista de un cubo que contuviera una masa de 1[g]?

7-30) Suponiendo que el número de galaxias en el Universo conocido es del orden de 10^{11}, que en promedio hay del orden de 10^{10} estrellas por galaxia y que, en promedio, la masa de una estrella es del orden de 10^{30}[kg], ¿cuál sería el orden de magnitud de la densidad promedio de la materia estelar en el Universo conocido?

7-31) Determine el orden de magnitud de la densidad de masa de un protón.

7-32) La masa de un núcleo de "uranio-238" es 238,03[u]. Recuerde que el radio efectivo del núcleo está expresado por $R = R_0 \cdot A^{1/3}$, donde A es el número másico y $R_0 \simeq 1,1$[F], un valor experimental. Calcule la densidad media del núcleo de ${}_{92}U^{238}$; exprese el resultado en [kg/m^3].

7-33) Calcule la densidad de la aleación del kilogramo prototipo.

7-34) Se ha encontrado que un cubo de metal de 1,0[in] de arista tiene una masa de 0,185[kg]. Calcule la densidad del metal, en [g/cm^3].

7-35) La capacidad de un recipiente es 15,0[ft^3]. Se vierte en él un líquido cuya densidad es 790[kg/m^3]. Calcule la masa de este líquido que se necesita para llenar el recipiente. Dé el resultado en [kg].

7-36) El osmio tiene una densidad de 22,5[g/cm^3]. Determine el largo, en [ft], de un alambre de osmio de 0,30[mm] de diámetro cuya masa es 3,2[lb].

7-37) En un día caluroso se evapora de un lago una capa de agua de 0,2[in] de espesor. Considere que el área del lago es 4,5[mile^2] y que la densidad de su agua es 0,995[kg/dm^3]. Calcule la masa del agua evaporada, en [kg].

7-38) Un cilindro hueco tiene un radio interior R_i = a[cm], un radio exterior R_e= 2a [cm] y una altura $H = 3a\left[cm\right]$. El cilindro tiene masa M = b[kg] y está construido homogéneamente con cierta aleación. Exprese la densidad de la aleación en función de a y b.

7-39) Una barra metálica tiene un largo de 3,1[m] y una sección transversal cuadrada de 2,5[cm] de lado. Su masa vale 16[kg] . Calcule la densidad de la barra.

7-40) Una mesa de forma irregular, está hecha de roble. Le informan que la densidad del roble es 850[kg/m^3] y que la masa de esa mesa es de 7,5[kg]. Determine el volumen de la madera de esa mesa.

7-41) Se ha medido la masa y el volumen de los siguientes objetos:

- una herradura de hierro tiene un volumen de 50[cm^3] y una masa de 390[g].
- un objeto de aluminio tiene un volumen de 55[cm^3] y una masa de 150[g].
- un clavo grande tiene un volumen de 1,14[cm^3] y una masa de 3,1[g].

Usando tales datos, indique de qué material está probablemente hecho el clavo mencionado.

7-42) Un cilindro hueco de cobre mide 0,30[m] de largo; su radio interior mide 0,035[m] y el espesor de su pared 0,15[dm]. La densidad del cobre es 8,9[kg/dm^3]. Calcule la masa del cilindro, en [g].

7-43) Se tiene una esfera de masa M y densidad ρ. Exprese el radio R de la esfera en términos de M y ρ.

7-44) La masa de una esfera es M y su radio es R. ¿Cuál es la masa de una esfera del mismo material y de radio 2R?

7-45) De un cubo macizo homogéneo se "saca" la esfera inscrita. Se encuentra que la masa de la esfera mide 6,2[kg] y que su volumen mide 0,56[dm^3]. Calcule la masa del cubo original.

Densidad de planetas y estrellas

Tierra: Se ha logrado medir o calcular con bastante precisión tanto la masa como el radio ecuatorial de la Tierra.

Para la masa de la Tierra se da el valor $M_t = 5{,}966 \cdot 10^{24}$ [kg]

Para el radio ecuatorial de la Tierra R_t se tiene:

valor normal: 6.378.388 [m]

determinaciones recientes: 6.378.533 ± 437 [m]

valor aproximado: $6{,}4 \cdot 10^6$ [m] $\triangleq$ $6{,}4 \cdot 10^3$[km]

orden de magnitud: 10^7 [m]

La densidad media de la Tierra tiene un valor $\rho_t = 5{,}49 \cdot 10^3 \left[kg/m^3 \right]$

En la Tierra se consideran tres capas o estratos: corteza, manto y núcleo central. La corteza está compuesta, principalmente, por granito y basalto; tiene un espesor medio de 45[km] y una densidad media de $2{,}8 \cdot 10^3$[kg/m^3]. El manto es una capa sólida de roca dura que se extiende hacia abajo hasta unos 3000[km] de profundidad. El núcleo central contiene principalmente *Fe* y *Ni*, con un estrato exterior líquido y otro inferior sólido; su densidad media es aproximadamente $9{,}5 \cdot 10^3$[kg/m^3].

Planetas: En la tabla siguiente le presentamos datos sobre el radio, la masa y la densidad media de cada "planeta de nuestro Sistema Solar"; ellos están dados en relación a los correspondientes valores de la Tierra:

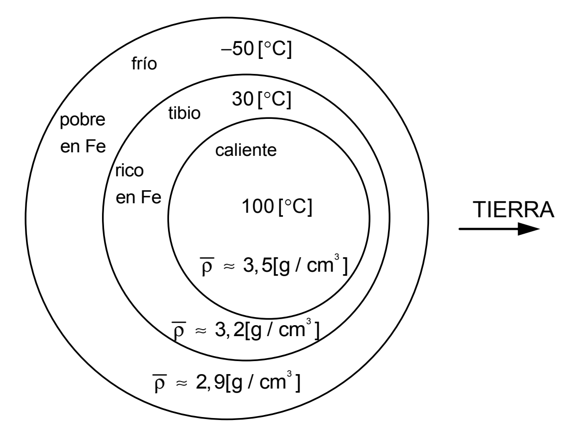
Planeta	$\mathbf{R_p / R_t}$	$\mathbf{M_p / M_t}$	$\boldsymbol{\rho_p / \rho_t}$
Mercurio	0,3583	0,0553	0,915
Venus	0,949	0,815	0,884
Tierra	1	1	1
Marte	0,533	0,107	0,768
Júpiter	11,21	317,8	0,241
Saturno	9,45	95,16	0,283
Urano	4,01	14,53	0,402
Neptuno	3,88	17,15	0,362

Luna: Se han determinado los siguientes valores para la masa y el radio medio de la Luna:

$M_{Luna} \simeq 7{,}347 \cdot 10^{22}$ [kg]

$R_{Luna} \simeq 1{,}738 \cdot 10^6$ [m]

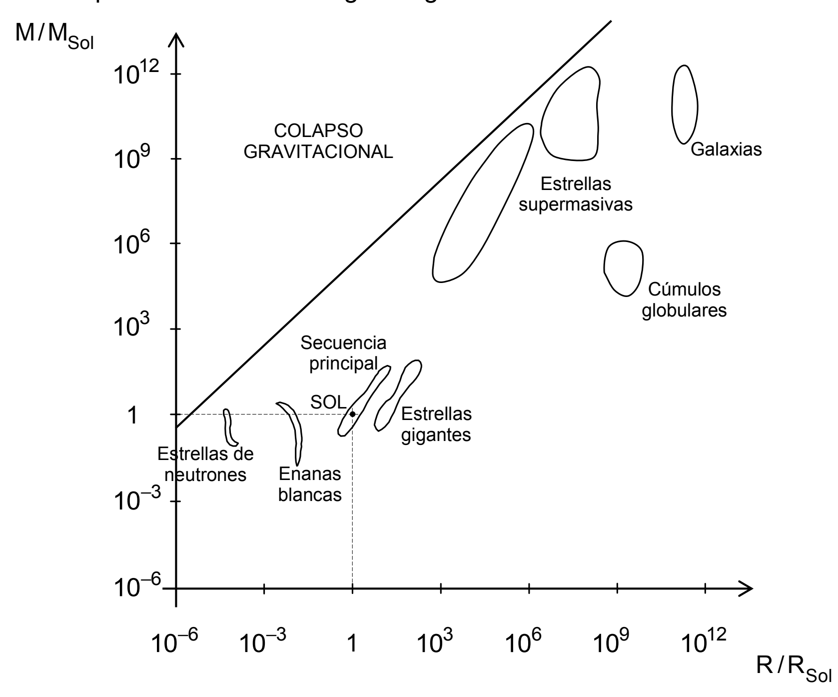
En la figura adjunta se representa esquemáticamente un modelo de la estructura interna de la Luna. En ella se distinguen tres regiones con diferentes características. En particular, se indica la densidad media de cada región.



Sol: Los valores determinados para el radio y la masa del Sol son: $R_{Sol} \simeq \left(6{,}9598 \pm 0{,}007\right) \cdot 10^8$[m] y $M_{Sol} \simeq \left(1{,}989 \pm 0{,}002\right) \cdot 10^{30}$[kg]

La densidad media del Sol resulta 1,41[kg/dm^3] y su región interior tiene una densidad media de 80[kg/dm^3].

Estrellas: La enorme cantidad de estrellas que hay en el Universo, su número es del orden de 10^{21}, se ha clasificado en ciertos grupos según sus masas y radios respecto a la masa y al radio del Sol. Nos limitaremos a invitarlo a que usted analice la figura siguiente:



La observación de los diferentes tipos de estrella da la posibilidad de estudiar el comportamiento de la materia en condiciones físicas excepcionalmente ricas en variedad de composición, de densidad, de temperatura, . . . etc.

Ejercicios

7-46) Imagínese que pudiera distinguir en la Tierra sólo dos partes, corteza y carozo, de la forma de dos esferas concéntricas, homogéneas, de densidades 2,8[kg/dm^3] y 9,5[kg/dm^3]. Calcule el radio que debería tener el carozo, en términos del radio de la Tierra , para que la densidad de la Tierra fuera 5,5[kg/dm^3] .

7-47) Con la información de la tabla sobre datos de planetas y usando los valores correspondientes para la Tierra, calcule una nueva tabla con los encabezamientos:

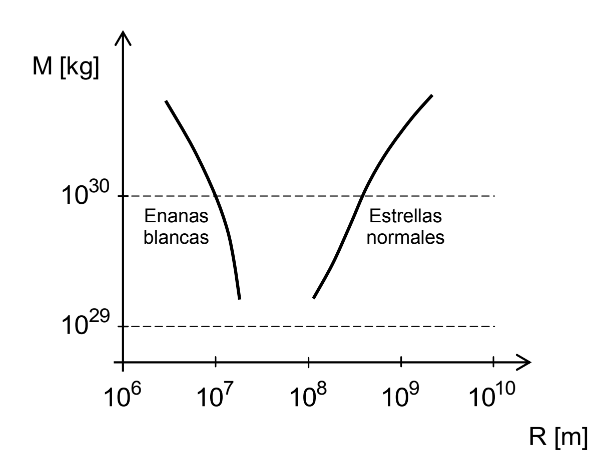
Planeta	$R_{planeta}$ 10^6 [m]	$M_{planeta}$ 10^{20} [kg]	$\rho_{planeta}$ 10^3 [kg/m^3]
…	…	…	…

Verifique, con los valores de masa y radio, los valores de densidad para cada planeta.

7-48) Con los datos de masa y radio medio de la Luna, calcule su densidad media. Suponga que la “Luna” fuera esférica, que las tres regiones mostradas en el corte transversal fueran círculos concéntricos, que tales regiones tuvieran las densidades medias indicadas en la figura correspondiente, y que la corteza exterior tuviera un espesor de 60[km] . Calcule el espesor de la región intermedia para que la densidad media de esa “Luna” fuera igual a la de la Luna.

7-49) Remítase al gráfico en que se muestra una agrupación de estrellas ordenadas según "M / M_{sol} en función de R/R_{sol} ". Elija usted una estrella (un punto en el gráfico) de cada uno de los siguientes grupos de estrellas: neutrónicas, enanas blancas, secuencia principal, gigantes y supermasivas. Determine el orden de magnitud de la densidad de cada una de esas estrellas.

7-50) El gráfico sobre las estrellas de la página anterior, puede también construirse usando la masa de las estrellas directamente en [kg] y sus radios en [m]. En la figura adjunta se ilustra tal método para los casos de estrellas "normales" o de secuencia principal y "enanas blancas" . Marque la ubicación del Sol en este gráfico, usando con cuidado la división de "escala de potencia de 10".



Compruebe usted que ambos gráficos son equivalentes, considere para ello especialmente casos extremos.

Densidad de sólidos

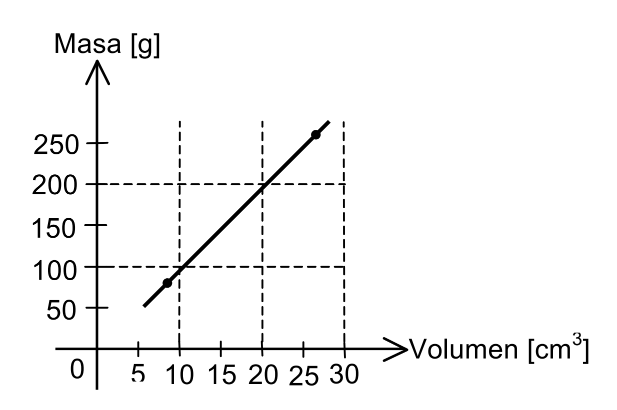
La densidad de un material sólido ρ fue definida como el cuociente entre la masa M y el volumen V de un trozo de un cuerpo homogéneo confeccionado con tal material: $\rho = M/V$.

Decir que un cuerpo es homogéneo significa que su densidad es constante: ρ es constante . Esto es, que su masa es proporcional a su volumen: $M = \rho\, V$.

Por ejemplo, si de una barra homogénea de cobre tomamos una muestra de 8,00[cm^3] y encontramos que su masa es 71,2[g], al tomar otra muestra de 27,0[cm^3] deberíamos encontrar que su masa es:

$$\frac{27,0}{8,00} \cdot 71,2 \;\simeq\; 240\,[\text{g}]$$

La densidad del cobre es 8,90[g/cm^3].



Para la determinación experimental de la densidad de un sólido puede usarse el método ya descrito: tome una muestra del material, determine su masa con una balanza y su volumen sumergiendo la muestra en una probeta graduada, parcialmente llena con un líquido en que el material no flote y no sea soluble. También puede usar una muestra del material de forma regular y simple que le permita calcular el volumen mediante fórmulas geométricas, midiendo solamente longitudes.

Valores típicos de la densidad de algunos materiales, válidos en rangos de presión y temperatura correspondientes al uso común de ellos:

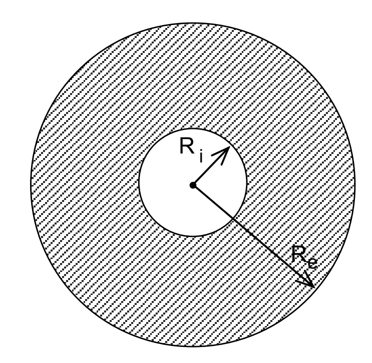
Aluminio	2,70 [kg/dm^3]	Arcilla	2,0 [kg/dm^3]
Zinc	7,20 [kg/dm^3]	Vidrio	2,5 [kg/dm^3]
Fierro	7,80 [kg/dm^3]	Cuarzo	2,6 [kg/dm^3]
Acero	7,83 [kg/dm^3]	Mármol	2,7 [kg/dm^3]
Bronce	8,50 [kg/dm^3]	Diamante	3,5 [kg/dm^3]
Cobre	8,90 [kg/dm^3]	Corcho	0,30 [kg/dm^3]
Plata	10,6 [kg/dm^3]	Pino	0,40 [kg/dm^3]
Plomo	11,4 [kg/dm^3]	Roble	0,7 [kg/dm^3]
Oro	19,3 [kg/dm^3]	Hulla	1,3 [kg/dm^3]
Platino	21,5 [kg/dm^3]	Azúcar	1,6 [kg/dm^3]
Hielo	0,92 [kg/dm^3]		

- Consideremos una esfera de fierro de 12[cm] de diámetro que tiene un hueco central de 4,0[cm] de diámetro. Calculemos el volumen y la masa del material y la densidad del objeto.

En la figura adjunta se muestra un "corte transversal" que pasa por su centro.

La densidad del material es un dato de este problema, ya que se indica que es fierro y corresponde a:

$$\rho_{mat} = 7{,}8\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right]$$



Los datos geométricos, radios R_i = 2,0[cm] y R_e = 6,0[cm], nos permiten calcular el volumen del material:

$$V_{mat} = \frac{4\pi}{3}\left(R_e^3 - R_i^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left(6{,}0^3 - 2{,}0^3\right) \simeq 8{,}7 \cdot 10^2[\text{cm}^3]$$

con lo cual la masa del material resulta:

$$M_{mat} = \rho_{mat} \cdot V_{mat} = 7{,}8\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right] \cdot 8{,}7 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}\,[\text{dm}^3]$$

$$\simeq 7{,}8 \cdot 0{,}87\left[\text{kg}\right] \simeq 6{,}8\left[\text{kg}\right]$$

Podemos calcular la densidad del objeto:

$$\rho_{objeto} = M_{objeto}/V_{objeto} \;,$$

suponiendo que la masa de aire en el hueco es despreciable:

$$M_{objeto} \simeq M_{material} \simeq 6{,}8[\text{kg}]$$

y usando el volumen total de la esfera:

$$V_{objeto} = \frac{4\pi}{3}R_e^3 = \frac{4 \cdot 3{,}14}{3} \cdot \left(6{,}0\right)^3 \simeq 9{,}0 \cdot 10^2[\text{cm}^3] \;\hat{=}\; 0{,}90\,[\text{dm}^3]$$

encontramos:

$$\rho_{objeto} = \frac{M_{objeto}}{V_{objeto}} = \frac{6{,}8\,[\text{kg}]}{0{,}90\,[\text{dm}^3]} \simeq 7{,}6\,[\text{kg}/\text{dm}^3]$$

Si hubiésemos enunciado el problema inicialmente en la forma "calcule la densidad del objeto", podríamos haber seguido el camino alternativo siguiente:

$$\rho_{objeto} = \frac{M_{obj}}{V_{obj}} \simeq \frac{M_{mat}}{V_{obj}} = \frac{\rho_{mat} \cdot V_{mat}}{V_{obj}} = \frac{\frac{4\pi}{3}\left(R_e^3 - R_i^3\right)}{\frac{4\pi}{3}R_e^3}\rho_{mat} =$$

$$= \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^3} \cdot \rho_{mat} = \left\{ 1 - \left(R_i / R_e\right)^3 \right\}\rho_{mat} =$$

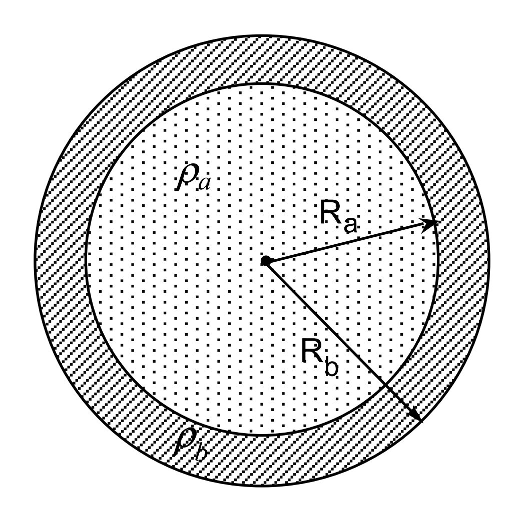
$$= \left\{1 - \left(\frac{2{,}0}{6{,}0}\right)^3\right\} \cdot 7{,}8 = \frac{26,}{27,} \cdot 7{,}8 \simeq 7{,}5\left[\text{kg}/\text{dm}^3\right]$$

¡En la medida que usted estudie y practique, adquirirá un mejor manejo de los conceptos físicos y podrá simplificar los aspectos algebraicos y de cálculo en la resolución de problemas!

- Alrededor de un eje cilíndrico de acero se ha colocado una "camisa" de bronce, de igual largo que el eje. El radio del eje es 21[mm] y el radio exterior de la "camisa" es 24[mm]; el largo del eje es 6,0[cm]. Calcule la masa del conjunto.

En el dibujo representamos la "sección transversal" del objeto. Los datos del problema son:

radio eje de acero:	R_a = 2,1 [cm]
radio "camisa" de bronce:	R_b = 2,4 [cm]
densidad del acero:	ρ_a = 7,83 [g/cm^3]
densidad del bronce:	ρ_b = 8,5 [g/cm^3]
largo común:	L = 6,0[cm]



SECCION TRANSVERSAL

Entonces:

$$M_{obj} = M_a + M_b = \rho_a V_a + \rho_b V_b =$$
$$= \rho_a \pi \cdot R_a^2 L + \rho_b \pi \cdot \left(R_b^2 - R_a^2\right) L =$$
$$= \pi \cdot \left\{\rho_a \cdot R_a^2 + \rho_b \cdot \left(R_b^2 - R_a^2\right)\right\} \cdot L$$

Introduciendo en esta expresión los radios y el largo en [cm] y las densidades en [g/cm^3], resulta directamente la masa en [g]:

$$M_{obj} \simeq 3{,}14 \cdot \left\{7{,}83 \cdot (2{,}1)^2 + 8{,}5 \cdot \left((2{,}4)^2 - (2{,}1)^2\right)\right\} \cdot 6{,}0$$
$$\simeq 3{,}14 \cdot \left\{34{,}5 + 11{,}5\right\} \cdot 6{,}0 \simeq 8{,}7 \cdot 10^2 [\text{g}] \ \triangleq \ 0{,}87\,[\text{kg}]$$

dando el resultado con el número apropiado de cifras significativas.

Podemos calcular, además, la densidad del objeto:

$$\rho_{obj} = \frac{M_{obj}}{V_{obj}} = \frac{\pi \cdot \left\{\rho_a R_a^2 + \rho_b \left(R_b^2 - R_a^2\right)\right\} L}{\pi \cdot R_b^2 \cdot L} =$$
$$= \frac{\rho_a R_a^2 + \rho_b \left(R_b^2 - R_a^2\right)}{R_b^2} =$$
$$= \rho_a \left(R_a / R_b\right)^2 + \rho_b \left\{1 - \left(R_a / R_b\right)^2\right\} = \rho_b + \left(\rho_a - \rho_b\right)\left(R_a / R_b\right)^2$$

Destaquemos que en la expresión:

$$\rho_{obj} = \rho_b - \left(R_a / R_b\right)^2 \left(\rho_b - \rho_a\right)$$

la consistencia dimensional es evidente ya que el cuociente $(R_a / R_b)^2$ es adimensional.

Además las unidades en que se exprese ρ_{obj} serán directamente las mismas que se usan para ρ_a y ρ_b; por supuesto, las unidades para R_a y R_b deben ser las mismas.

El valor numérico resulta: $\rho_{obj} \simeq 8{,}0 \left[kg / dm^3 \right]$

que es diferente del "promedio":

$$\rho_{prom} = \frac{\rho_a + \rho_b}{2} \simeq 8{,}2 \left[kg / dm^3 \right]$$

En general se cumple que $\rho_{promedio} \neq \rho_{objeto}$. Para tener la igualdad es necesario que se cumplan ciertas condiciones:

$$\rho_{promedio} = \frac{\rho_a + \rho_b}{2} = \rho_{obj} = \rho_b - \left(R_a / R_b\right)^2 \cdot \left(\rho_b - \rho_a\right)$$

y haciendo un poco de álgebra:

$$\rho_a - \rho_b = 2 \left(\frac{R_a}{R_b} \right)^2 \cdot \left(\rho_a - \rho_b\right)$$

esto es:

$$\left(R_a / R_b\right)^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad R_b = \sqrt{2}\, R_a$$

Es interesante destacar que, en este caso a lo menos, la igualdad $\rho_{promedio} = \rho_{objeto}$ se cumple con la relación entre los radios $R_b = \sqrt{2}\, R_a$, independientemente de los valores de las densidades de cada componente.

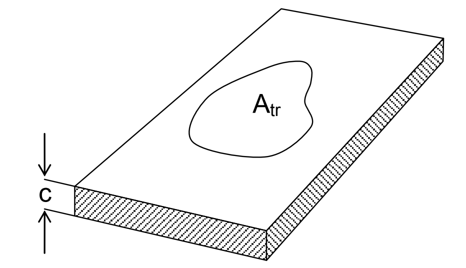
Planchas y láminas

Hablamos de planchas o láminas cuando en un cuerpo sólido una de las medidas lineales es mucho menor que las otras dos.

- Consideremos una plancha metálica que sea:

homogénea $\rightarrow$ densidad ρ constante

uniforme $\rightarrow$ espesor c constante



Nuestro problema es calcular la masa de un trozo de esta plancha de área A_{tr}

De acuerdo con la definición de densidad resulta:

$$M_{tr} = \rho \cdot V_{tr} = \rho\left(c \cdot A_{tr}\right) = \left(\rho \cdot c\right) \cdot A_{tr}$$

Observamos que en este caso la masa del trozo es proporcional a su área; la "constante de proporcionalidad" es:

$$\rho \cdot c = \rho_m \left[kg/m^3\right] \cdot c_m [m] = \sigma_m \left[kg/m^2\right] = \sigma$$

Esta cantidad σ característica de la lámina, representa una "masa por unidad de área" y recibe el nombre de **densidad superficial de masa**; tenemos:

$$M = \sigma \cdot A$$

- Deseamos determinar la masa de un pliego rectangular de cartón.

Si el pliego es más grande que la balanza de que disponemos, no podemos medir directamente su masa. Podemos proceder de la siguiente manera:

Cortamos un trozo de cartón (por ejemplo un cuadrado pequeño de lado ℓ) y medimos su masa, denotémosla por $M_{muestra}$. Calculamos la "densidad superficial":

$$\sigma_{cartón} = \frac{M_{muestra}}{A_{muestra}} = \frac{M_{muestra}}{\ell^2}$$

Medimos el ancho a y el largo b del pliego y calculamos su área:

$$A_{pliego} = a \cdot b$$

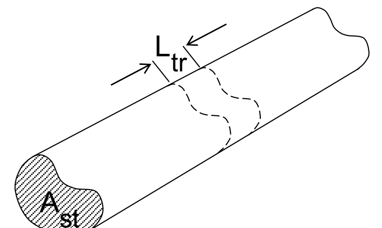
La masa del pliego resulta:

$$M_{pliego} = \sigma_{cartón} \cdot A_{pliego} = \frac{a \cdot b}{\ell^2} \cdot M_{muestra}$$

Barras y alambres

En barras y alambres las medidas lineales de la sección transversal son mucho menores que el largo.

- Consideremos una barra homogénea y uniforme:



homogénea → densidad, ρ , constante

uniforme → área de la sección transversal, A_{st}, constante

Deseamos calcular la masa que corresponde a un trozo de largo L_{tr} de esta barra.

Tenemos: $M_{tr} = \rho \cdot V_{tr} = \rho \cdot \left(A_{st} \cdot L_{tr}\right) = \left(\rho \cdot A_{st}\right) \cdot L_{tr} = \lambda \cdot L_{tr}$

Esta expresión implica que la masa del trozo es proporcional a su largo. En este caso la "constante de proporcionalidad", simbolizada por λ, representa una "masa por unidad de longitud" y la llamamos, en consecuencia, **densidad lineal de masa** .

Resulta: $M = \lambda \cdot L = \lambda_m \left[kg/m \right] \cdot L_m \, [m] = M_m \, [kg]$

- Supongamos que hemos comprado un rollo de alambre de masa $M_{alambre}$. Nos interesa saber la longitud del alambre.

Una solución sería medirlo directamente con un metro; pero si no queremos desarmar el rollo, podemos usar el siguiente procedimiento:

Tomamos una muestra de alambre de largo $L_{muestra}$.

Medimos la masa de la muestra $M_{muestra}$ y calculamos la densidad lineal:

$$\lambda_{muestra} = M_{muestra} / L_{muestra}$$

Entonces, suponiendo que el alambre es homogéneo y uniforme, λ constante, resulta:

$$\lambda_{alambre} = \lambda_{muestra}$$

y por lo tanto, la longitud buscada es:

$$L_{alambre} = \frac{M_{alambre}}{\lambda_{alambre}}$$

Ejercicios

7-51) Un objeto consta de dos partes homogéneas. La primera tiene volumen V y densidad ρ . La segunda parte tiene volumen doble y densidad triple que la primera parte. Determine la densidad media del objeto.

7-52) Se tiene una esfera hueca de fierro de radio interior R_i = 4,00[cm] y radio exterior R_e = 6,00[cm]. ¿Qué densidad debe tener un material que llene el hueco para que la esfera tenga una densidad media de 6,40[g/cm^3] ?.

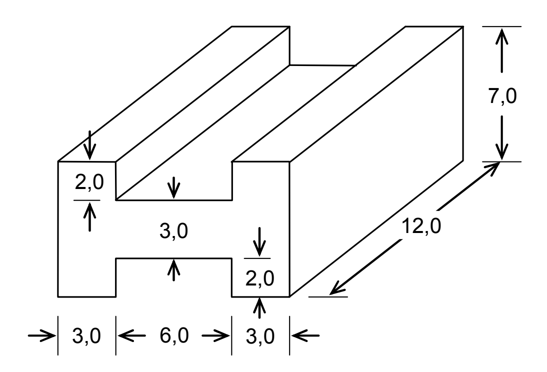
7-53) Una lámina tiene área S y masa M. ¿Cuál es la masa de otra lámina de igual material y espesor, pero de área 4S ?

7-54) Con 3,0[kg] de cobre, se confecciona una lámina homogénea y de espesor constante de 5,0[mm]. Calcule la "densidad superficial de masa" y el área de la lámina.

7-55) Estime la masa de una "resma" (500 hojas) del papel usado en este texto.

7-56) Calcule la "densidad lineal de masa" de un alambre de platino de 2,0[m] de largo y de 0,30[mm] de diámetro.

7-57) Una pieza metálica, de la forma indicada en la figura adjunta, tiene una masa de 6,12[kg]. Las medidas están dadas en centímetros. Calcule su densidad e indique de qué material es probable que haya sido confeccionada.

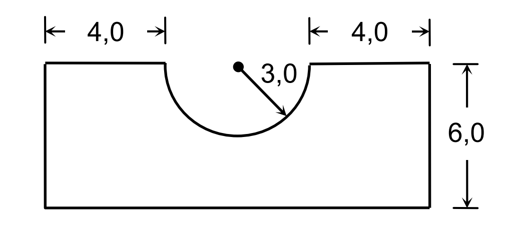


7-58) Sobre un objeto de fierro que tiene una superficie exterior de $7{,}9 \cdot 10^2 \left[cm^2 \right]$ de área se ha depositado una película de cobre de 0,18[mm] de espesor. Suponga que tal espesor es constante y calcule la masa de cobre depositado.

7-59) Infórmese sobre la densidad media de ladrillos y de "mezcla de cemento y arena fraguada" y estime la masa de las paredes de una casa.

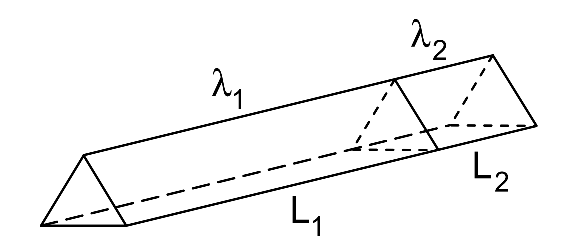
7-60) Un cuerpo esférico de radio R_i y densidad ρ_i se cubre con un material de densidad ρ_e de tal modo que se mantiene la forma esférica, alcanzando un radio R_e. Las relaciones entre las densidades y los radios son $\rho_e = \alpha\,\rho_i$ y $R_e = \beta R_i$, respectivamente. Encuentre las dimensiones y rango posible de valores para los coeficientes α y β . Calcule valores de α y β para que la densidad media del objeto sea igual al promedio de las densidades ρ_i y ρ_e .

7-61) La densidad superficial de una lámina es σ = 0,36 [kg/m^2]. Calcule la masa de una figura de la forma indicada en el dibujo hecha de esa lámina. Las medidas están dadas en centímetros.

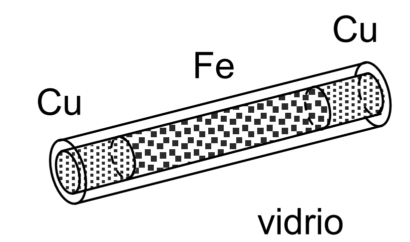


7-62) Una lámina de plata de 0,30[mm] de espesor se coloca entre dos placas de vidrio rectangulares, de 2,0[cm] de ancho, 5,0[cm] de largo y 1,5[mm] de espesor. Esta lámina cubre toda la superficie de las caras internas de las placas. Calcule la "densidad superficial media " de este conjunto.

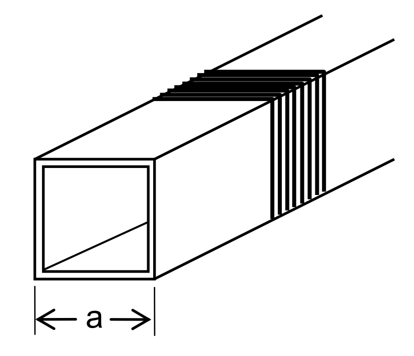
7-63) Una barra cuya sección transversal es un triángulo equilátero, está formada por la unión de un trozo de aluminio y otro de plomo de 0,4[yd] y 0,17[yd], respectivamente. La masa de la barra es 13[lb]. Calcule el valor, en [in], del lado del triángulo. Calcule λ_1 y λ_2.



7-64) El interior de un tubo de vidrio se ha llenado con limaduras de fierro y sus extremos se han cerrado con tapones de cobre. Las medidas del tubo son: 1,8[mm] de diámetro interior, 2,1[mm] de diámetro exterior y 8,0[cm] de largo. Los tapones de cobre, totalmente embutidos en el tubo, tienen 1,5[cm] de largo cada uno. Represente gráficamente la variación de la "densidad lineal del objeto" a lo largo del tubo.



7-65) Sobre una base plástica de sección transversal cuadrada de 5,0[cm] de lado, se enrollan ordenadamente 3 capas de alambre. Cada capa tiene 250 vueltas. El alambre es de cobre de 0,80[mm] de diámetro. Calcule la masa del cobre empleado.



Densidad de líquidos

Si disponemos de una balanza y de un "frasco graduado" podemos determinar experimentalmente la densidad de un líquido, usando el siguiente procedimiento:

- Determinamos la masa del frasco solo, M_f .

- Vertemos cierta cantidad del líquido cuya densidad queremos determinar en el frasco graduado y medimos directamente su volumen, V_ℓ .

- Determinamos la masa del frasco más la del líquido contenido, $M_{f\ell}$.

- La diferencia de ambas mediciones de masa da la masa de líquido:

$$M_\ell = M_{f\ell} - M_f$$

- Calculamos la densidad del líquido, $\rho_\ell = M_\ell / V_\ell$.

Si disponemos de una balanza y de un frasco que no tenga graduación de volumen, podemos modificar el procedimiento en la siguiente forma:

- Hacemos una marca en el frasco para indicar cierto volumen, V.

- Medimos la masa M_f del frasco solo.

- Echamos agua en el frasco hasta alcanzar la marca hecha y medimos la masa del frasco con agua M_{fa}. Se determina la masa del agua $M_a = M_{fa} - M_f$.

- Echamos el líquido en el frasco hasta la misma marca y medimos la masa $M_{f\ell}$ del frasco con el líquido. Calculamos la masa del líquido $M_\ell = M_{f\ell} - M_f$.

- La "densidad del líquido **relativa** al agua" es:

$$\rho_{\ell,a} = \frac{M_\ell / V_\ell}{M_a / V_a} = \frac{M_\ell / V}{M_a / V} = \frac{M_\ell}{M_a}$$, sin dimensión.

Entonces:

$$\rho_\ell = \frac{M_\ell}{M_a} \cdot \rho_a \simeq \frac{M_\ell}{M_a} \left[kg/dm^3 \right] \quad \text{con} \quad \rho_a \simeq 1{,}0 \left[kg/dm^3 \right]$$

Valores representativos de las densidades de algunos líquidos, determinados por éstos u otros procedimientos, en condiciones "normales" de temperatura y presión (0[ºC] y 1[atm]), se presentan en la siguiente tabla:

líquido	$\rho\left[\mathbf{kg/dm^3}\right]$
gasolina	0,70
éter	0,74
alcohol etílico	0,79
Kerosene ("parafina")	0,80
benceno	0,88
agua de mar	1,025
leche	1,031
glicerina	1,26
tetracloruro de carbono	1,60
ácido sulfúrico	1,84
yoduro de metileno	3,3
mercurio	13,6

- Expresemos la densidad $\rho_b = 0{,}88\left[\text{kg/dm}^3\right]$ del benceno en [lb/ft^3]

  Usando las equivalencias:

$$1[\text{lb}] \;\triangleq\; 0{,}4536\,[\text{kg}] \quad \text{y} \quad 1\,[\text{ft}] \;\triangleq\; 0{,}3048\,[\text{m}] \;\triangleq\; 3{,}048\,[\text{dm}]$$

resulta:

$$\rho_b = 0{,}88\left[\text{kg/dm}^3\right] \triangleq 0{,}88\left[\text{kg/dm}^3\right] \cdot \frac{1\,[\text{lb}]}{0{,}4536\,[\text{kg}]} \cdot \left(\frac{3{,}048\,[\text{dm}]}{1\,[\text{ft}]}\right)^3 \triangleq$$

$$\triangleq \frac{0{,}88 \cdot (3{,}048)^3}{0{,}4536}\left[\text{lb/ft}^3\right] \simeq 55\left[\text{lb/ft}^3\right]$$

El dato ρ_b = 0,88[kg/dm^3] lo podemos interpretar diciendo que la densidad del benceno relativa al agua es $\rho_{b,a}$ = 0,88 (número adimensional). Entonces, para la densidad del agua en [lb/ft^3] obtenemos en forma inmediata:

$$\rho_a = \frac{\rho_b}{\rho_{b,a}} = \frac{55\left[\text{lb/ft}^3\right]}{0{,}88} \simeq 62\left[\text{lb/ft}^3\right]$$

dado que la densidad relativa tiene un valor que es independiente de las unidades de medición usadas.

- Probablemente usted sabe que el petróleo crudo no se encuentra en la naturaleza en piscinas subterráneas, sino que está empapando los mantos en los cuales aloja. Estos mantos están constituidos por rocas porosas llamadas "arenas productoras". Analizando muestras de estas rocas, se puede hacer un estudio de la productividad de un yacimiento.

Se define "porosidad de una roca" como la relación entre el volumen de huecos (poros) y el volumen total de la roca (incluyendo granos y poros); suele expresarse en forma porcentual:

$$P = \frac{\text{volumen de huecos}}{\text{volumen total de roca}} \cdot 100$$

Consideremos que se ha extraído un trozo de cierto manto de “arenas productoras”, llamado “roca testigo” en la jerga petrolera, para el que se ha determinado en un laboratorio una masa de 16,2[kg] , un volumen de 3,46[dm^3] y una porosidad de 9,7%. Nos interesa estimar el número de “barriles de petróleo” que rendiría el manto cuyas medidas son aproximadamente 20[km] de ancho, 30 [km] de largo y 7,0[m] de espesor:

Suponiendo que la porosidad del manto es igual a la de la muestra:

$$P_{manto} = P_{muestra} = 9{,}7\%$$

y suponiendo que el volumen del petróleo es igual al de los poros:

$$V_{petróleo} = V_{poros}$$

entonces:

$$V_{petróleo} = \frac{P}{100} \cdot V_{total} = \frac{9{,}7}{100} \cdot \left(20 \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^3 \cdot 7{,}0\right) [m^3]$$

cuyo valor aproximado es:

$$V_{petróleo} \simeq 4{,}1 \cdot 10^8\,[m^3] \;\; \triangleq \;\; 4{,}1 \cdot 10^{11}\,[\ell]$$

y usando las equivalencias:

$$1\,[\text{barrel}] \;\triangleq\; 36\,[\text{Imp.gal.}] \quad \text{y} \quad 1\,[\text{Imp.gal}] \;\triangleq\; 4{,}546\,[\ell]$$

esto es, $1\,[\text{barrel}] \;\triangleq\; 36 \cdot 4{,}546[\ell] \;\simeq\; 164[\ell]$

resulta que el *número de barriles* es:

$$N_b = \frac{4{,}1 \cdot 10^{11}\,[\ell]}{164\,[\ell]} \simeq 2{,}5 \cdot 10^9$$

También nos parece interesante calcular la densidad ρ_r del material de la roca testigo, usando como dato la densidad del petróleo, $\rho_p = 0{,}84\,[kg / dm^3]$.

siendo:

$$\rho_r = \frac{M_r}{V_r} = \frac{M_{total} - M_p}{V_{total} - V_p}$$

y considerando:

$$V_p = \frac{P}{100} V_{total} \qquad \text{y} \qquad M_p = \rho_p \cdot V_p$$

se obtiene:

$$\rho_r = \frac{M_{total} - \rho_p \cdot \frac{P}{100} V_{total}}{V_{total} - \frac{P}{100} V_{total}} = \left(\frac{M_{total}}{V_{total}} - \frac{P}{100} \rho_p \right) \cdot \frac{100}{100 - P} =$$

$$= \left(\frac{16{,}2}{3{,}46} - \frac{9{,}7}{100} \cdot 0{,}84 \right) \cdot \frac{100}{100 - 9{,}7} \left[kg / dm^3 \right]$$

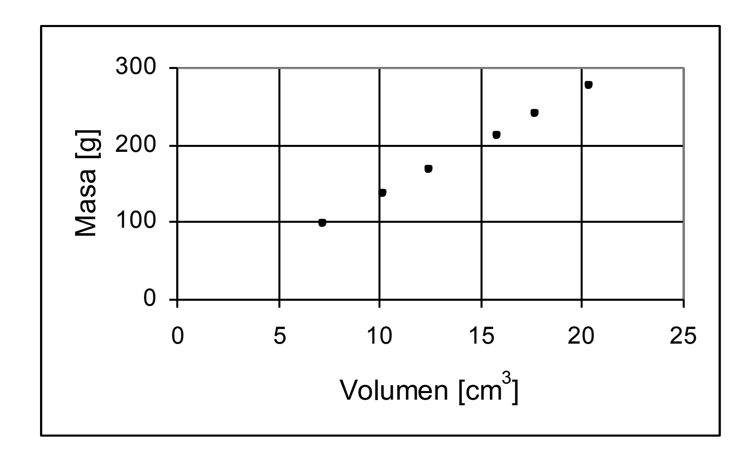
$$\approx 5{,}1 \left[kg / dm^3 \right]$$

el cual es un valor razonable para una roca sometida a presión a bastante profundidad.

Densidad del Mercurio

Determinando las masas y volúmenes de diferentes muestras de mercurio a la misma temperatura ambiental de 23[ºC], se han obtenido los valores:

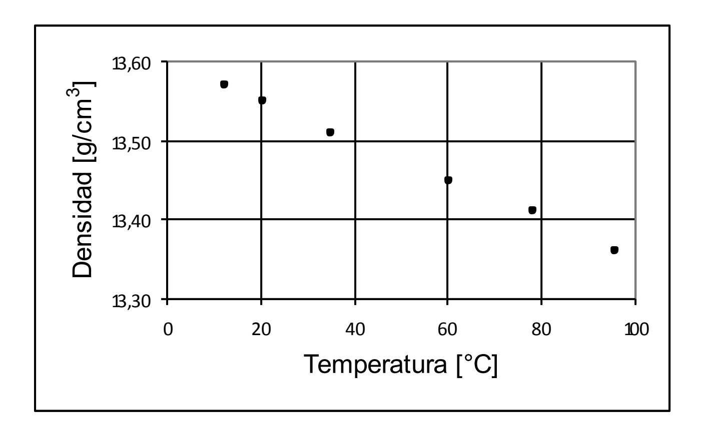
$V[cm^3]$	M[g]
7,2	97,5
10,2	137,2
12,5	169,3
15,8	212,8
17,7	240,2
20,4	276,1



Compruebe usted que el cuociente de estos valores es aproximadamente constante; $\rho_{Hg} \simeq 13,54\left[g/cm^3\right]$.

Haciendo una experiencia con una misma muestra de mercurio para determinar su densidad a diferentes temperaturas, se han encontrado los siguientes valores:

[°C]	$[g/cm^3]$
12,4	13,57
20,3	13,55
35,1	13,51
60,2	13,45
78,0	13,41
95,7	13,36



Observamos que la densidad del mercurio disminuye al aumentar la temperatura. Dentro del rango de temperaturas considerado, la densidad del mercurio se puede representar aproximadamente por la relación lineal:

$$\rho_{Hg} \simeq \left(13,60 - 0,0025t\right)\left[g/cm^3\right]$$

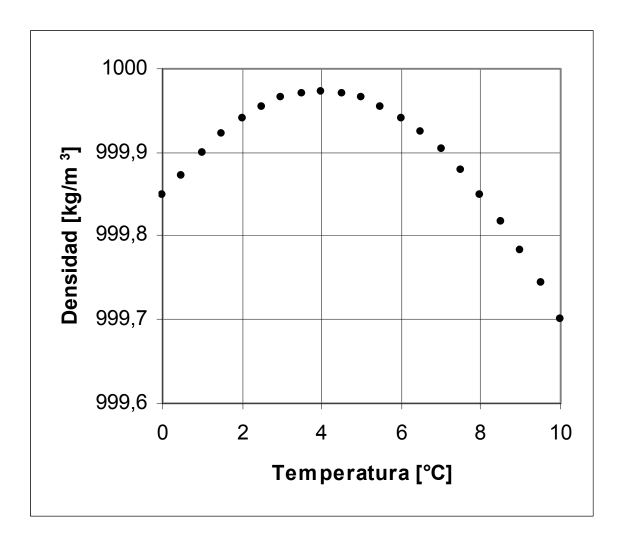
donde t representa a la temperatura expresada en [°C] .

Se ha encontrado experimentalmente que esta disminución de la densidad se produce porque el volumen de la muestra aumenta al aumentar la temperatura y porque la masa de la muestra no presenta variaciones detectables. Tal comportamiento es típico de la gran mayoría de sólidos y líquidos. Hacen excepción ciertos materiales como caucho y algunos sólidos cristalinos, dentro de un rango limitado de temperatura. Entre los líquidos que hacen excepción, nos interesa mostrar el comportamiento del agua.

Comportamiento anómalo del agua

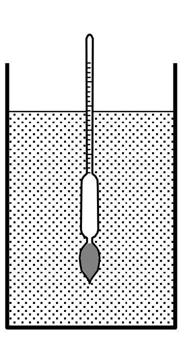
Mediciones muy precisas han permitido establecer que el agua tiene una **densidad máxima** de 999,973[kg/m^3] a la temperatura de 3,98[°C] (se suele indicar 1[kg/dm^3] a 4[°C]). A toda otra temperatura, la densidad del agua es menor. Para temperaturas mayores que 3,98[°C] el agua se dilata y disminuye su densidad; pero, al bajar la temperatura de 3,98[°C] a 0[°C] también se dilata, a diferencia de otros líquidos que al bajar la temperatura se contraen. Este comportamiento se muestra en la tabla y gráfico siguientes.

t [°C]	ρ_a [kg/m^3]
0,00	999,876
1,00	999,927
2,00	999,968
3,98	999,973
5,00	999,962
10,00	999,728
15,00	999,129
20,00	998,234



Esta simple anomalía permite la continuidad de la vida en las aguas de las regiones frías. Veamos lo que ocurre con el agua de un lago en invierno cuando la temperatura ambiente baja, por ejemplo, de unos 10[ºC] a valores menores que 0[ºC]. A medida que el agua de la superficie se enfría, se hace más densa y se hunde, subiendo agua más caliente desde el fondo a la superficie; este proceso de convección es muy eficiente y el lago se enfría hasta 4[ºC] . Luego, el agua de la superficie se enfría a temperatura inferior a 4[ºC], permaneciendo en la superficie, ya que su densidad es menor. El proceso de convección prácticamente se detiene, la superficie se hiela y el hielo, por ser menos denso que el agua, flota sobre ella. Aunque continúa el proceso de enfriamiento, éste se hace más lentamente porque el hielo y el agua son malos conductores del calor, de modo que la temperatura en las profundidades permanece en los 4[ºC] , permitiendo que la vida subsista.

Densímetro



Hemos indicado algunos métodos para la determinación de la densidad de líquidos. Queremos mencionar ahora que hay instrumentos, los **densímetros**, que permiten conocer la densidad de un líquido por una lectura directa de su escala. Un tipo de densímetro consiste en un simple flotador de vidrio, lastrado en su parte inferior y prolongado en forma de un tubo de vidrio. Debido al lastre, este instrumento flota de modo que el tubo queda en posición vertical.

El tubo queda más o menos sumergido según sea la densidad del líquido que se estudia. El valor de la densidad se lee directamente en una escala graduada en unidades apropiadas, por ejemplo [g/cm^3], colocada en el tubo. Tal vez usted ha visto usarlos como “lactómetros” o como indicadores del “estado de carga” de una batería o del “grado alcohólico” de bebidas.

Densidad de gases

La densidad de los líquidos varía con la temperatura y con la presión; pero dentro de un amplio rango de valores de presión y de temperatura, los cambios son relativamente pequeños. En cambio, la densidad de los gases es muy sensible a los cambios de presión y temperatura; por ejemplo, para el aire tenemos:

$$\rho_{aire} \simeq \begin{cases} 1{,}3\ [kg/m^3] & 0\,[°C] \ \ y \ \ 1\,[atm] \\ 0{,}95\,[kg/m^3] & 100\,[°C] \ \ y \ \ 1\,[atm] \\ 6{,}5\ [kg/m^3] & 0\,[°C] \ \ y \ \ 5\,[atm] \end{cases}$$

Para una misma masa de gas que se encuentra en diferentes estados de temperatura absoluta y presión se cumple la relación aproximada:

$$\frac{\rho_1 \cdot T_1}{P_1} \simeq \frac{\rho_2 \cdot T_2}{P_2}$$

En la escala absoluta 0[°C] equivale a 273,15[K]. La densidad de los gases es más difícil de determinar que la de líquidos o sólidos. Un procedimiento, que requiere disponer de un matraz con válvulas, de una "bomba de vacío" y de instrumentos para medir presión y temperatura, es el siguiente:

Se determina el volumen V entre las válvulas del matraz, usando por ejemplo agua. Se produce vacío en el matraz y se determina su masa $M_{m,v}$.

Se introduce el gas cuya densidad se quiere determinar, controlando presión y temperatura. Se determina la masa $M_{m,g}$ del matraz con el gas. Se calcula la densidad del gas:

$$\rho_{gas} = \frac{M_{m,g} - M_{m,v}}{V}$$

Usando este u otros procedimientos, se ha determinado la densidad de numerosos gases en diferentes condiciones. Mostramos a continuación valores aproximados de la densidad de algunos gases en condiciones "normales", 0[°C] de temperatura y 1[atm] de presión.

gas	ρ [kg / m³]	gas	ρ [kg / m³]
Hidrógeno (H_2)	0,09	Bióxido de Carbono (CO_2)	1,98
Metano (CH_4)	0,72	Propano (C_3H_8)	2,02
Nitrógeno (N_2)	1,25	Kriptón (Kr)	3,70
Aire	1,29	Xenón (Xe)	5,85
Etano (C_2H_6)	1,36	Radón (Rn)	9,73
Oxígeno (O_2)	1,43		

Divertimento. Se puede obtener una idea razonable de la variación de la densidad de la atmósfera terrestre con la altitud (densidad de una capa de aire a cierta altura h sobre la superficie de la Tierra), suponiendo que la temperatura de la atmósfera fuese constante y que la aceleración de gravedad fuese también constante. Con estas suposiciones se obtiene:

$$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-h/a}$$

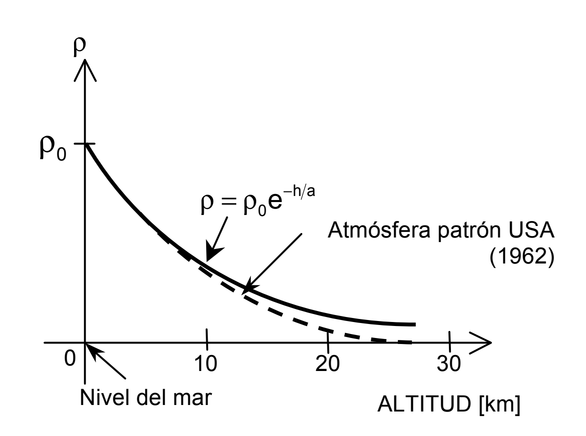
con:

$$a = P_0 / (g \cdot \rho_0)$$

$$P_0 = 1{,}01 \cdot 10^5 \left[N/m^2 \right]$$

$$g = 9{,}81 \left[m/s^2 \right]$$

$$\rho_0 = 1{,}2 \left[kg/m^3 \right] \text{a } 20[°C]$$



En la figura se representa tal variación de la densidad en función de la altitud. En la misma figura está, en línea segmentada, el resultado de un cálculo más refinado en el cual no se suponen la temperatura ni la aceleración de gravedad como constantes.

Ejercicios

7-66) Coloque un cubo de hielo en un vaso y luego llénelo con agua hasta el borde. Déjelo reposando en una mesa a temperatura ambiente ¿se derrama agua? Analice la situación.

7-67) Remítase a los datos de la densidad del agua en función de la temperatura (página 250). Calcule el volumen de 1[kg] de agua para los valores de temperatura allí dados y construya un gráfico para representar la variación de tal volumen en función de la temperatura.

7-68) Calcule la masa de aceite contenida en un tarro de 2 1/2 galones, sabiendo que la densidad relativa al agua de ese aceite es 0,9.

7-69) Un submarino de volumen $4{,}0 \cdot 10^3\ [m^3]$ tiene un masa de $3{,}1 \cdot 10^6\ [kg]$. ¿Qué masa de agua debe hacer entrar a sus estanques para mantenerse entre aguas?

7-70) Se mezclan 120[g] de un líquido de densidad 0,91[g/cm^3] con 80[g] de otro líquido de densidad 0,84[g/cm^3]. Suponiendo que estos líquidos no reaccionan químicamente, calcule la densidad de la mezcla.

7-71) Se entrega leche de densidad 1,032[g/cm^3] y que contiene un 4% en volumen de materia grasa cuya densidad relativa al agua es 0,865. ¿Cuál es la densidad de la leche descremada?

7-72) Un cubo de plomo de 10,00[cm] de arista tiene un hueco interior de 600,0[cm^3]. El hueco se llena totalmente con glicerina. Determine la densidad media del objeto.

7-73) Se requiere construir una esfera de vidrio que tenga en su interior 200[cm^3] de hueco. Se pide calcular el radio externo de esta esfera si está llena de ácido sulfúrico y debe tener en total una masa de 1,7[kg] .

7-74) Exprese la densidad del oxígeno en $\left[g/ml\right]$.

7-75) Exprese la densidad del bióxido de carbono relativa al aire y relativa al hidrógeno (todos en las mismas condiciones “normales”).

7-76) Sea $\rho_1 = a\left[kg/m^3\right]$ la densidad de cierta masa de gas a la presión $P_1 = b\left[N/m^2\right]$ y la temperatura absoluta T_1 = c [K].

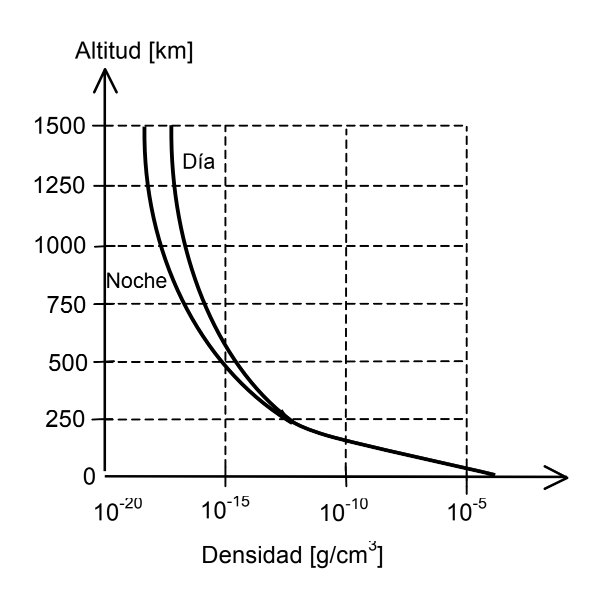
Calcule la densidad de este mismo gas al aumentar la presión a 3b [N/m^2] y disminuir la temperatura absoluta a c/2 [K].

7-77) Confeccione gráficos que representen la variación de la densidad del hidrógeno en función de la temperatura para presión constante y en función de la presión para temperatura constante.

7-78) Considere las densidades del agua: $\rho_h = 0{,}93\left[kg/dm^3\right]$ como hielo; $\rho_\ell = 1{,}0\left[g/cm^3\right]$ como líquido y $\rho_v = 1{,}3\left[kg/m^3\right]$ como vapor. Un tarro de base cuadrada, de lado $L = a\,[cm]$, está inicialmente lleno con agua líquida hasta altura $H = b\,[cm]$ y se pone a hervir. Exprese la masa del vapor producido, en términos de a y b , cuando la altura del agua en el tarro ha disminuido a 0,6 H.

7-79) Datos sobre la densidad de la atmósfera pueden obtenerse por sondas aéreas y por satélites artificiales. Hemos tomado información de dos fuentes, presentadas una por la tabla y la otra por el gráfico siguiente:

Altitud [km]	Densidad $\left[\frac{g}{cm^3}\right]$	$\left[\frac{\text{partícula}}{cm^3}\right]$
2	$1{,}05 \cdot 10^{-3}$	$2{,}2 \cdot 10^{19}$
10	$3{,}74 \cdot 10^{-4}$	$7{,}9 \cdot 10^{18}$
23	$5{,}75 \cdot 10^{-5}$	$1{,}2 \cdot 10^{18}$
32	$1{,}42 \cdot 10^{-5}$	$3{,}0 \cdot 10^{17}$
50	$1{,}02 \cdot 10^{-6}$	$2{,}2 \cdot 10^{16}$
78	$7{,}86 \cdot 10^{-8}$	$1{,}7 \cdot 10^{15}$
100	$3{,}70 \cdot 10^{-9}$	$8{,}5 \cdot 10^{13}$
213	$2{,}38 \cdot 10^{-12}$	$5{,}8 \cdot 10^{10}$
300	$1{,}29 \cdot 10^{-13}$	$3{,}2 \cdot 10^{9}$
400	$1{,}12 \cdot 10^{-14}$	$4{,}7 \cdot 10^{8}$
500	$3{,}69 \cdot 10^{-15}$	$1{,}6 \cdot 10^{8}$
700	$8{,}00 \cdot 10^{-16}$	$3{,}4 \cdot 10^{7}$
1000	$1{,}65 \cdot 10^{-16}$	$7{,}0 \cdot 10^{6}$
2000	$2{,}01 \cdot 10^{-18}$	$8{,}6 \cdot 10^{4}$
4000	$4{,}29 \cdot 10^{-21}$	$2{,}8 \cdot 10^{2}$



Construya un gráfico para representar los valores de la tabla y compárelo con el gráfico dado.

Constante de Avogadro y Cantidad de Substancia

La masa de un átomo de hidrógeno H^1 es aproximadamente igual a la masa de un protón, esto es:

$$m\left(H^1\right) \simeq 1{,}007\,[u] \simeq 1{,}673 \cdot 10^{-24}\,[g]$$

por lo cual, en 1,0[g] de hidrógeno, hay aproximadamente:

$$\frac{1{,}0\,[g]}{1{,}673 \cdot 10^{-24}\,[g]} \simeq 6{,}0 \cdot 10^{23} \text{ átomos.}$$

La masa de un átomo de C^{12} es, por definición, $m(C^{12}) = 12[u]$. Entonces, en forma análoga, el número de átomos que hay en 12,00[g] de C^{12} es:

$$\frac{12{,}00\,[g]}{12\,[u] \cdot 1{,}66057 \cdot 10^{-24}\,[g/u]} \simeq 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ átomos}$$

El número de átomos que hay en A[g] del elemento ${}_ZX^A$ es aproximadamente igual al número de átomos que hay en 12[g] de ${}_6C^{12}$. El número de átomos que hay en exactamente 12[g] de C^{12} es igual al **número de Avogadro**, que es el valor numérico de la **constante de Avogadro**.

$$\text{Constante de Avogadro} = N_A = \left(6{,}02214179 \pm 0{,}00000030\right) \cdot 10^{23} \left[1/\text{mol}\right]$$

De acuerdo con recomendaciones internacionales, la decimocuarta Conferencia General de Pesos y Medidas (1971) adoptó para **el mol**, unidad de **cantidad de substancia**, la siguiente definición :

El mol es la cantidad de substancia de un sistema que contiene tantas entidades elementales como átomos hay en exactamente 0,012[kg] de carbono 12.

Cuando se emplea “el mol” deben indicarse las entidades elementales del sistema, que pueden ser átomos, moléculas, radicales, iones, electrones, fotones, otras partículas o grupos específicos de tales partículas.

Notemos que el mol está definido en base a la constante de Avogadro.

La constante de Avogadro se presenta también en muchas otras situaciones físicas. Es realmente una de las constantes fundamentales de la Naturaleza, que nos permite establecer una conexión entre el microcosmos y el mesocosmos.

La palabra **mol** deriva del latín “moles”, que significa montón o pila; la palabra **molécula** es su diminutivo, pequeño mol.

Debemos destacar que la definición de mol contiene al mismo tiempo el concepto de cantidad de substancia. La cantidad de substancia de un sistema expresa el cuociente entre el número de entidades elementales escogidas para describir la constitución de tal sistema y la constante de Avogadro.

$$\text{Cantidad de substancia} = \frac{\text{número de entidades elementales}}{\text{constante de Avogrado}}$$

$$S = \frac{n}{N_A} = \frac{n}{n_A}\,[\text{mol}] \simeq \frac{n}{6{,}022 \cdot 10^{23}}\,[\text{mol}]$$

Para el concepto "cantidad de substancia" se usan las expresiones "amount of substance" en inglés, "Stoffmenge" en alemán y "quantité de matière" en francés. El término francés recuerda "quantitas materiae", que se usaba antiguamente para el concepto que hoy llamamos masa; este término no debe provocar confusiones, ya que masa y cantidad de substancia son conceptos totalmente distintos.

Definición de Masa Molar (MM)

Sea m la masa de un sistema y S su cantidad de substancia, entonces, el concepto masa molar MM lo definimos como:

Masa Molar de un sistema es el cuociente entre la masa m y la cantidad de materia S de ese sistema.

$$\text{Masa Molar} = \frac{\text{masa}}{\text{cantidad de substancia}}$$

$$\text{MM} = \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{a [kg]}}{\text{b [mol]}} = \frac{\text{a}}{\text{b}}\left[\text{kg/mol}\right]$$

Considerando como dimensiones fundamentales las de masa y la de cantidad de substancia, obtenemos:

$$\text{dim(masa molar)} = \frac{\text{dim(masa)}}{\text{dim(cantidad de substancia)}} = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{S}}$$

por tanto, la dimensión de masa molar es $\mathcal{M}\mathcal{S}^{-1}$.

La masa molar de una substancia corresponde a la masa de 1 [mol] de entidades elementales de dicha substancia.

Por ejemplo, por definición, 1 [mol] de átomos de C^{12} tiene una masa de 12[g], por lo tanto:

$$\text{MM}\left(\text{C}^{12}\right) = \frac{\text{m}}{\text{S}} = \frac{12\left[\text{g}\right]}{1\left[\text{mol}\right]} = 12\left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$$

Ejemplo: calcule la masa molar del electrón.

$$\text{Masa de un electrón } = \text{m}_\text{e} \approx 9{,}1\cdot 10^{-31}\left[\text{kg}\right]$$

$$\begin{aligned}\text{Masa de 1}\left[\text{mol}\right]\text{de electrones} &= \text{n}_\text{A}\cdot \text{m}_\text{e}\\ &\approx 6{,}022\cdot 10^{23}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\left[\text{kg}\right]\\ &\approx 5{,}48\cdot 10^{-7}\left[\text{kg}\right]\end{aligned}$$

$$\text{MM} = \frac{\text{m}}{\text{S}} = \frac{5{,}48\cdot 10^{-7}\left[\text{kg}\right]}{1\left[\text{mol}\right]}$$

$$\text{MM}\left(\text{electrón}\right) \approx 5{,}48\cdot 10^{-7}\left[\text{kg/mol}\right]$$

En la tabla periódica de los elementos se indica la masa molar promedio de los diferentes elementos considerando su abundancia natural.

Por ejemplo, $\text{MM}\left(\text{Cu}\right) \approx 63{,}54\left[\frac{\text{g}}{\text{mol}}\right]$.

Algunas veces a la masa molar se la llama "peso atómico" o "masa atómica".

Consideremos una muestra de 1[mol] de una substancia pura que se considera formada por átomos; sea X el símbolo químico de esos átomos.

Sea m(X)= a[u] la masa de uno de estos átomos.

Escribamos la constante de Avogadro en la forma $N_A = n_A$ [1/mol].

Entonces la masa molar del elemento X es:

$$MM(X) = m(X) \cdot N_A = a\,[u] \cdot n_A\,[1/mol]$$

Como, por definición, la masa de un átomo de C^{12} es $m(C^{12})$ = 12[u] y como el número de átomos que hay en 12[g] de carbono 12 es igual al número de Avogadro n_A, resulta la equivalencia:

$$1[u] = \frac{1}{12} m\left[C^{12}\right] \;\hat{=}\; \frac{1}{12} \cdot \frac{12\,[g]}{n_A} = \frac{1}{n_A}\,[g]$$

con la cual:

$$MM(X) \;\hat{=}\; a \cdot 1[u] \cdot n_A \left[1/mol\right] \;\hat{=}\; a \cdot \frac{1}{n_A}[g] \cdot n_A \left[1/mol\right]$$
$$\hat{=}\; a\left[g/mol\right]$$

Lo anterior implica que si la masa de un átomo de cierto elemento es a[u], entonces, su masa molar es a[g/mol].

Podemos expresar la masa molar de una substancia constituida por átomos X en otra forma, por supuesto equivalente. Para ello escribimos la constante de Avogadro como el cuociente entre la masa molar y la masa de un átomo, tanto para el elemento X como para el C^{12}:

$$N_A = \frac{MM(X)}{m(X)} = \frac{MM(C^{12})}{m(C^{12})}$$

obteniendo:

$$MM(X) = \frac{m(X)}{m(C^{12})} \cdot MM(C^{12})$$
$$= \frac{m(x)}{m(C^{12})} \cdot 12\left[\frac{g}{mol}\right]$$

donde hemos usado el valor $MM(C^{12}) = 12\left[g/mol\right]$.

Hemos anotado explícitamente la razón $m(X)/m(C^{12})$ entre la masa m(X) de un átomo X y la masa $m(C^{12})$ de un átomo de carbono 12 , ambas expresadas en una misma unidad. Esta razón puede determinarse experimentalmente en forma mucho más precisa, por ejemplo por espectrometría de masas, que cada una de tales masas.

Consideremos el caso de una substancia pura que se supone está constituida de moléculas B que son combinaciones de átomos X e Y según la fórmula estructural $B = X_\alpha Y_\beta$.

La masa relativa a la masa de C^{12} de una de estas moléculas la podemos escribir de la forma:

$$\frac{m(B)}{m(C^{12})} = \alpha \cdot \frac{m(X)}{m(C^{12})} + \beta \cdot \frac{m(Y)}{m(C^{12})} = \alpha \cdot r(X) + \beta \cdot r(Y)$$

donde se usan los cuocientes $r(X) = m(X) / m(C^{12})$ y $r(Y) = m(Y) / m(C^{12})$ entre las masas de los átomos X e Y respecto a la masa $m(C^{12})$ de carbono 12 , por estar determinados con mejor precisión que cada una de las masas atómicas independientemente.

La masa molar de esta substancia queda entonces determinada por:

$$MM(B) = \frac{m(B)}{m(C^{12})} \cdot 12 \left[\frac{g}{mol}\right]$$

La expresión de la masa molar para substancias de moléculas con estructuras químicas más complicadas se obtiene de modo similar.

Hemos presentado métodos para calcular valores de cantidades físicas relacionadas con la unidad 1[mol] usando resultados de mediciones de masas atómicas. Los resultados cuantitativos de análisis o dosimetría química pueden expresarse en moles; es decir, en unidades de cantidad de substancia de las partículas constituyentes.

Estudiemos a continuación algunos ejemplos sobre estas materias.

Ejemplos

- A un físico le proporcionan cierta cantidad de magnesio (Mg) diciéndole que es "100% químicamente puro". El físico se interesa en saber si todos los átomos de Mg son iguales y analiza una muestra en un "espectrómetro de masas". Obtiene los siguientes resultados:

isótopo	**masa [u]**	**abundancia %**
$_{12}Mg^{24}$	23,98504	78,60
$_{12}Mg^{25}$	24,98584	10,11
$_{12}Mg^{26}$	25,98259	11,29

Calculemos, usando estos datos, **la masa atómica del magnesio.**

La masa atómica de un elemento se define como la suma de las masas de sus isótopos ponderadas por los respectivos porcentajes de abundancia natural. Entonces:

$$m(Mg) = \frac{78,60}{100} m(Mg^{24}) + \frac{10,11}{100} m(Mg^{25}) + \frac{11,29}{100} m(Mg^{26})$$

$$\simeq (0,7860 \cdot 23,985 + 0,1011 \cdot 24,9858 + 0,1129 \cdot 25,9826)[u]$$

$$\simeq 24,31[u]$$

- El átomo de flúor F^{19} y el átomo de carbono C^{12} tienen masas que están en la razón $r(F^{19}) = 1,5832$. Calculemos la cantidad de substancia correspondiente a 43,2[g] de gas molecular F_2 .

La masa molar $MM(F_2)$ del gas molecular F_2 es:

$$MM(F_2) = 2 \cdot \frac{m(F^{19})}{m(C^{12})} \cdot 0{,}012\left[\frac{kg}{mol}\right] = 2 \cdot 1{,}5832 \cdot 0{,}012\left[\frac{kg}{mol}\right]$$
$$\simeq 0{,}037997\left[kg/mol\right]$$

La cantidad de substancia S_G que corresponde a una masa M_G = 43,2[g] de gas F_2 es:

$$S_G = \frac{M_G}{MM(F_2)} \simeq \frac{43{,}2 \cdot 10^{-3}[kg]}{0{,}0380\left[kg/mol\right]} \simeq 1{,}14\,[mol]$$

- Estimemos el tamaño de la molécula de agua.

La masa molar del agua es 0,018015[kg/mol] $\simeq$ 18[g/mol]. Esto es, en 18[g] de agua ($\simeq$ 1[mol] de agua) hay $n_A \simeq 6, \cdot 10^{23}$ moléculas de agua.

Considerando la densidad del agua igual a 1[g/cm^3], resulta que en 18[cm^3] hay aproximadamente $6, \cdot 10^{23}$ moléculas. A cada molécula le corresponde aproximadamente un volumen de:

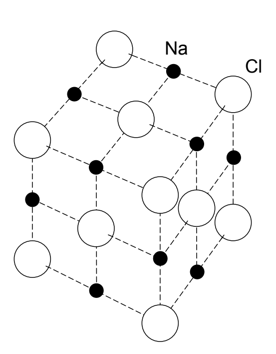
$$18\,[cm^3]/6, \cdot 10^{23} = 3, \cdot 10^{-23}\,[cm^3]$$

Suponiendo, además, que la molécula de agua tuviese una forma esférica de radio R, tenemos:

$$\frac{4\pi}{3}R^3 \simeq 3, \cdot 10^{-23}\,[cm^3]$$

por tanto el radio $r \approx 1{,}927$ [Å], es decir, su diámetro $\approx 3{,}854$ [Å],

- Calculemos la separación interatómica en un cristal de cloruro de sodio. La densidad del NaCl cristalino es 2,16[g/cm^3] y la masa molar del NaCl es 58,5[g/mol].



Considerando que el NaCl forma un cristal cúbico y llamando d a la distancia interatómica y V_{at} al volumen por átomo, se cumple $V_{at} = d^3$.

El volumen atómico lo determinamos en la siguiente forma:

masa por "molécula": $m(NaCl) = \dfrac{MM(NaCl)}{N_A}$

volumen por "molécula": $V(NaCl) = m(NaCl)/\rho_c$

número de átomos por "molécula": η

volumen por átomo: $V_{at} = \dfrac{V(NaCl)}{\eta}$

Entonces:

$$d^3 = V_{at} = \frac{V(NaCl)}{\eta} = \frac{MM(NaCl)}{\eta \cdot N_A \cdot \rho_c}$$

$$= \frac{58,5\,[g/mol]}{2 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}\,[1/mol] \cdot 2,16\,[g/cm^3]}$$

$$= \frac{58,5 \cdot 10^{-23}}{2 \cdot 6,02 \cdot 2,16}[cm^3] \simeq 2,25 \cdot 10^{-23}[cm^3] \simeq 22,5\,[Å^3]$$

Dando para el espacio interatómico $d \simeq 2,82$ [Å]

Aunque realmente el Na y el Cl no forman moléculas al cristalizar, hemos usado el término "molécula" para facilitar la comprensión del problema.

Ejercicios

7-80) Los resultados de la masa y abundancia natural de los isótopos estables de una muestra de silicio están dados en la tabla adjunta. Calcule la masa atómica del silicio.

isótopo	**masa [u]**	**abundancia [%]**
$_{14}Si^{28}$	27,97693	92,27
$_{14}Si^{29}$	28,97649	4,68
$_{14}Si^{30}$	29,97376	3,05

7-81) El cloro, elemento de número atómico Z =17, tiene una masa atómica de 35,453[u]. Sus únicos dos isótopos estables tienen masas relativas a la masa del C^{12} de $r(Cl^{35}) \simeq 2,9141$ y $r(Cl^{37}) \simeq 3,0805$ respectivamente. Calcule la abundancia natural de estos dos isótopos.

7-82) Determine aproximadamente el número de átomos que hay en 4[g] de uranio 235.

7-83) El nitrógeno tiene masa atómica igual a 14,0067 [u]. ¿Cuántos moles hay en 6,0[g] de nitrógeno?

7-84) Calcule el número de moléculas que hay en 0,021[kg] de helio. La masa atómica del He es 4,0026[u].

7-85) La densidad del cobre, a cierta temperatura, es 8,885[kg/dm^3]. La masa atómica del cobre es 63,57[u]. Calcule la cantidad de substancia, expresada en [kmol] y el número de átomos de cobre que hay en 1,0[m^3] de este metal.

7-86) La densidad es proporcional al número de moléculas por unidad de volumen. Estime el número de moléculas que permanecen en 1[cm^3] de una cámara de alto vacío en que la densidad del aire en ella ha llegado a un valor de 10^{-13}[kg/m^3] . La masa molar media del aire es aproximadamente 29[g/mol].

7-87) El átomo de oxígeno en la molécula de agua ocupa aproximadamente la mitad del volumen de dicha molécula. Estime el diámetro de un átomo de oxígeno.

7-88) Analizando resultados obtenidos en la difracción de rayos X producida por un cristal se pueden obtener datos característicos del cristal como la separación interatómica a, el volumen de la "celda unitaria" Vc y el número de moléculas en la celda unitaria η_c, entre otros. Estos datos están relacionados a la densidad ρ del compuesto, un dato macroscópico, por $\eta_c = V_c \cdot \rho \cdot N_A / MM$ donde MM

es la masa molar y N_A es la constante de Avogadro. Use los datos conocidos para la pirita $(FeS_2): \eta_c = 4, \ V_c = a^3$ con $a \simeq 5{,}41[Å]$, $\rho \simeq 5{,}02\left[g/cm^3\right]$ y $MM \simeq 0{,}12\left[kg/mol\right]$, para calcular la constante de Avogadro.

7-89) En el análisis de una roca se encuentra que el 2,2% de su masa es potasio. En una muestra de 100[g] de potasio hay: 93,08[g] de K^{39}; 0,012[g] de K^{40} y 6,908[g] de K^{41}. Siendo K^{39}, K^{40} y K^{41} los isótopos naturales del potasio. Exprese porcentualmente la abundancia natural de cada isótopo del potasio. Calcule la cantidad de K^{40} en partes por millón (ppm) que hay en la roca.

7-90) Suponga que los elementos que se encuentran en la Tierra se formaron alrededor de unos $5 \cdot 10^9$[año] atrás. El isótopo radiactivo de potasio $_{19}K^{40}$, cuya semivida es $1{,}3 \cdot 10^9$[año] , tiene hoy una abundancia natural de 0,012% . Calcule la abundancia relativa de potasio 40 y de los isótopos estables de potasio hace cinco mil millones de años.

Concentración o densidad de cosas

Hemos discutido hasta ahora la densidad de substancias. El concepto de densidad se puede aplicar también a diversas cosas para establecer cuocientes de comparación. Así hablamos por ejemplo de "partículas por metro cúbico", "ovejas por hectárea", "automóviles por habitante", etc. A continuación le presentamos algunos ejemplos:

- Chile continental tiene un área de $756.950[km^2]$ y sus habitantes en 2008 están estimados en 16.757.442 . Decimos que la "densidad de población del país" es de:

$$D = \frac{\text{Población [habitante]}}{A\,[km^2]}$$

$$= \frac{16.757.442}{756950} \cong 22\left[\frac{\text{habitante}}{km^2}\right]$$

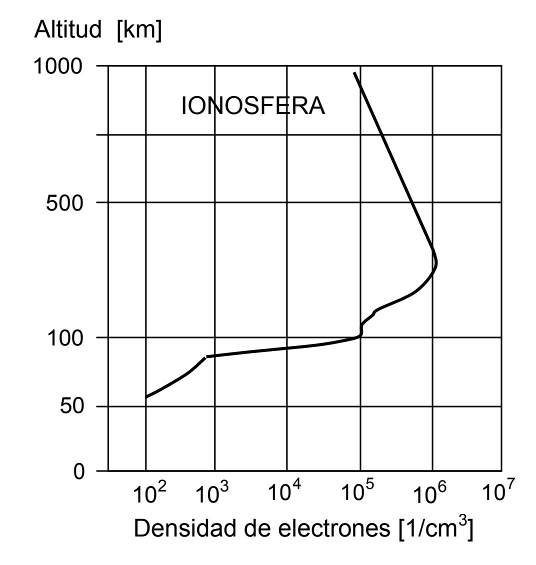
Vemos claramente que el concepto de densidad de población se parece mucho al de densidad superficial, que es masa por unidad de área. En la vida diaria tenemos muchos conceptos que se expresan de manera análoga.

- En una propaganda de pinturas nos dicen que un galón sirve para cubrir $60[m^2]$. Sabiendo que un galón equivale aproximadamente a 3,8 litros, podemos calcular el **rendimiento** de la pintura en $[m^2/\ell]$:

rendimiento de la pintura $= \dfrac{60\,[m^2]}{3{,}8\,[\ell]} \simeq 16\left[m^2/\ell\right]$

En el estudio de las partículas y de radiaciones el concepto de partículas por unidad de volumen es muy usado.

En el gráfico adjunto se muestra la variación de la **concentración** de electrones en función de la altitud sobre la superficie de la Tierra.



Ejercicios

7-91) Una información aparecida en un periódico dice: "Caen en promedio, alrededor de mil cien toneladas de polvo por milla cuadrada por año". Exprese esta información en $\left[\text{kg} / \text{m}^2 \cdot \text{año} \right]$.

7-92) La densidad en cierta región del universo en que abundan protones es del orden de $10^{-29}\left[\text{g}/\text{cm}^3 \right]$. Se pide calcular el orden de magnitud de la concentración de protones en esa región, en [1/m^3].

7-93) Un conglomerado globular de estrellas es una distribución esférica del orden de 10^5 estrellas. El diámetro del conglomerado puede ser del orden de 40[pc]. Si supone que las estrellas están distribuidas uniformemente en el volumen del conglomerado. Calcule la "densidad media de estrellas" en este conglomerado.

7-94) Tome una novela. Ábrala al azar y determine cuántas palabras por decímetro cuadrado hay en una página. Estime el número de palabras escritas en ese libro.

7-95) En una caja se echan 3.000 bolitas de cristal de 0,8[mm] de diámetro. Estime el "número de bolitas por centímetro cúbico" que hay en la caja.

7-96) Considere una siembra de 700 hectáreas de trigo que rinde 17 quintales por hectárea. La densidad del trigo a granel es aproximadamente 1,4[g/cm^3]. ¿Cuántos camiones de 25[m^3] de capacidad de carga serían necesarios para transportar esa producción de trigo?

7-97) Para una buena atención de los alumnos en los laboratorios de enseñanza de Ciencias Naturales se recomienda un área de 3,0 a 3,5[m^2] por alumno. Determine las dimensiones apropiadas de un laboratorio para que trabajen simultáneamente 40 alumnos.

7-98) Se tiene una plancha de cobre de 2,3[m^2] de área y 3,5[mm] de espesor. En la plancha se deben hacer orificios de 1,0[cm] de radio. Los orificios quedan distribuidos de manera uniforme con una densidad media de orificios igual a 8,7[1/dm^2]. Calcule la masa de la plancha una vez hechos los orificios.

CAPÍTULO VIII

TEMPERATURA Y DILATACIÓN



Es usual que antes de entrar a la ducha en la mañana acerquemos la mano al agua y apelando a nuestra experiencia sensorial, decidamos si está "fría" o "caliente" y regulemos las llaves hasta que el agua esté a nuestro gusto; es decir, **sentimos** lo caliente y lo frío de un objeto cuando lo tocamos o nos acercamos a él.

Una percepción de este tipo no tiene validez científica debido a que es subjetiva. Considere la siguiente experiencia:

> Se tienen tres recipientes con agua "fría" , "tibia" y "caliente", respectivamente. Sumergimos la mano derecha en el agua "caliente" y la izquierda en el agua "fría", y luego retiramos rápidamente ambas manos de los recipientes y las sumergimos en el agua "tibia". Observaremos que de cada mano se obtiene una percepción distinta. ¡Hágalo!.

El sentir lo frío o caliente, al tocar un objeto, depende también del material, de la calidad de la superficie y aun del color de tal objeto.

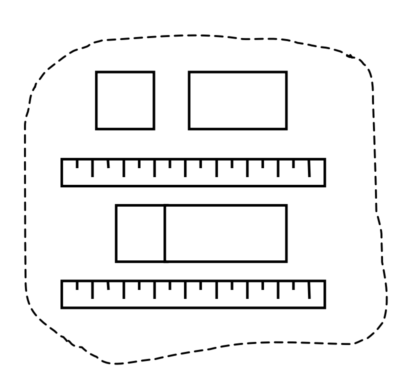
Para hacer cuantitativo este tipo de percepción, esto es, para poder indicar cuán "frío" o cuán "caliente" está un objeto, se introduce la cantidad física **temperatura**.

Preocupémonos inicialmente de definir la **igualdad de temperatura** de dos cuerpos. Para ello podemos observar los cambios que se producen en algunas propiedades físicas de dos cuerpos, previamente aislados, al ser puestos en contacto:

Escogemos dos bloques y medimos sus largos antes de ponerlos en contacto.

Ponemos ambos bloques en contacto y observamos los cambios de sus largos a medida que transcurre el tiempo.

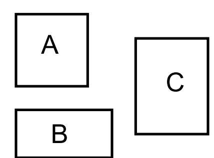
Cuando ya no detectamos ningún cambio de sus largos, diremos que ambos bloques tienen "igual temperatura'".



Principio cero de la Termodinámica

En general, dos cuerpos aislados están en igualdad de temperatura cuando no se observan cambios en ninguna de sus propiedades físicas macroscópicas.

Si determinamos que la temperatura de los cuerpos A y C son las mismas y que la de los cuerpos B y C son las mismas, entonces concluiremos que la temperatura de A es igual a la temperatura de B.



Esto puede parecer obvio porque estamos familiarizados con este tipo de razonamiento, similar al axioma matemático "dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí". Pero, puesto que la conclusión no es derivable de ningún otro principio físico, se le da el nombre de "Principio Cero de la Termodinámica". Este principio justifica cualquier método de medición de temperatura.

Aunque el vocablo "temperatura" es tan usado, la definición de **temperatura** en Física exige para su comprensión conocimientos que usted adquirirá posteriormente. Por el momento nos interesa medir temperatura, más que definir temperatura.

Asociamos temperatura a la sensación de "frío" o "caliente". La expresión "hace calor" se emplea en la vida diaria, como sinónimo de "alta temperatura ambiente". En Física los conceptos de calor y temperatura son **totalmente distintos** y, por tanto, no puede reemplazarse uno por otro. No emplee la palabra "calor" por la palabra "caliente".

Comparación de temperaturas

Examinemos la siguiente situación experimental:

Consideremos dos bloques de cobre que inicialmente tienen largos L_A y L_B. Si después de tenerlos en contacto durante cierto tiempo observamos que el bloque A se alargó $\left(L'_A > L_A\right)$ y que el B se acortó $\left(L'_B < L_B\right)$, diremos que la temperatura inicial T_A de A era **menor** que la temperatura inicial T_B de B:

$$L'_A > L_A \text{ y } L'_B < L_B \Rightarrow T_A < T_B$$

esto es, podemos comparar temperaturas.

Habiéndose establecido criterios para la igualdad y desigualdad de las temperaturas de dos cuerpos, estamos en condiciones de **graduar** uno de los cuerpos basándonos en las variaciones debidas

a los cambios de temperatura de alguna de sus propiedades físicas. A este cuerpo así graduado le llamamos **termómetro**.

Si hemos elegido las variaciones de longitud para graduar, obtenemos un termómetro que nos indicará la temperatura de otro cuerpo cuando puesto en contacto con él su propia longitud se estabilice. Para no afectar significativamente la temperatura del otro cuerpo, entre otras precauciones, debe cuidarse que la masa del termómetro sea mucho menor que la del cuerpo.

Al hablar de temperatura nos referimos a la cantidad física que medimos con un termómetro.

Escalas de Temperatura

Para graduar termómetros y poder medir temperaturas, necesitamos asignar ciertos valores a las temperaturas a las cuales se realizan procesos dados. Cada proceso elegido debe ser un fenómeno físico fácilmente reproducible y que dependa de manera estable de una temperatura fija. Al emplear los términos “estable” y “fija” queremos significar que el fenómeno se realiza siempre a la misma temperatura y ésta se mantiene constante durante todo el desarrollo del fenómeno.

Estas consideraciones nos permiten en la práctica establecer unidades de temperaturas y definir escalas de temperatura.

Describiremos a continuación uno de los métodos que permiten graduar un termómetro :

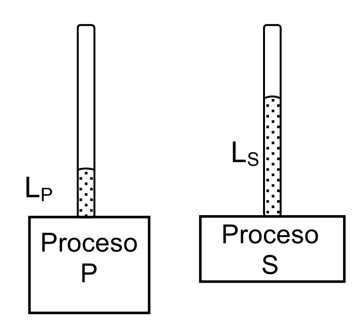
Sean P y S dos procesos que se desarrollan a temperaturas fijas. Asignemos a esas temperaturas los valores:

t_P = a [unidad de temperatura] y
t_S = b [unidad de temperatura] respectivamente.

Hagámonos de un pequeño tubo de vidrio que contenga, sin llenarlo, cierta cantidad de mercurio.

Coloquemos este tubo en contacto con la substancia en que se desarrolla el proceso P. La columna de mercurio alcanza un largo L_P; a este largo le asociamos el valor t_P de temperatura.

Repitamos la operación de manera análoga con el proceso S; al largo L_S le asociamos la temperatura t_S.



Cada vez que la columna de mercurio alcance los largos L_P *o* L_S diremos que la temperatura detectada es t_P o t_S según corresponda. Si la columna de mercurio alcanza un largo L tal que $L_P < L < L_S$, la temperatura detectada t está entre t_P y t_S. Con este tubo podremos medir temperaturas

mayores o menores que las indicadas, siempre que se cumplan ciertas condiciones que determinan el comportamiento del tubo y del mercurio.

Escala Celsius: Se escogen como sistemas de referencia hielo fundente (mezcla de hielo y agua químicamente puros) y vapor de agua pura en ebullición, ambos a presión normal. A las correspondientes temperaturas se asignan los valores 0 [°C] y 100 [°C]. La unidad de temperatura:

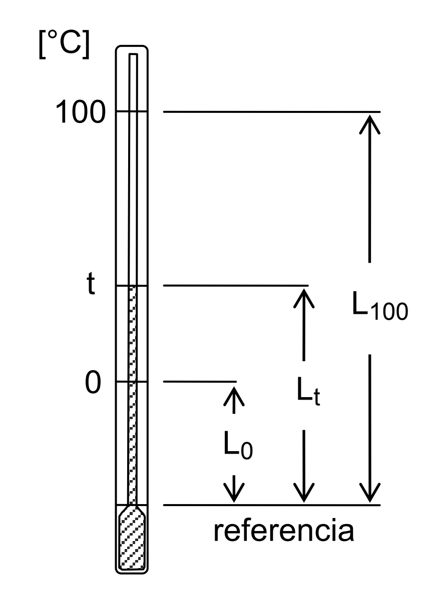
Un grado Celsius ...... 1 [°C]

queda definida como la **centésima** parte de tal rango de temperaturas.

Si para un termómetro de mercurio graduado según la escala Celsius el 0 [°C] corresponde a un largo L_o y el 100 [°C] corresponde a un largo L_{100}, entonces, al largo L_t le corresponde una temperatura t determinada por:

$$t = \frac{L_t - L_0}{L_{100} - L_0} \cdot 100\,[°C] = a_t\,[°C]$$

relación válida mientras se cumpla la proporcionalidad entre la longitud de la columna y la temperatura.



Observe que el valor de t es independiente del nivel de referencia elegido para medir los largos.

Escala Fahrenheit: Esta escala se estableció originalmente asignando 0 [°F] a la temperatura de fusión de cierta mezcla frigorífica de hielo y cloruro de amonio y 96 [°F] a la temperatura de la sangre de un cuerpo humano sano. Actualmente esta escala se relaciona con la de Celsius de modo que la temperatura de 0 [°C] corresponde a 32 [°F] y la de 100 [°C] a 212 [°F]. Por tanto, la unidad de temperatura:

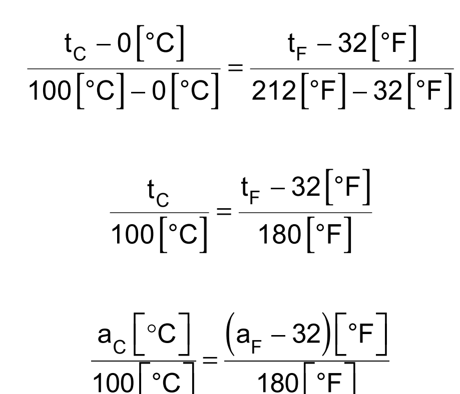
Un grado Fahrenheit ...... 1 [°F]

se obtiene como la 180 ava parte del rango de temperaturas entre 32 [°F] y 212 [°F].

Usemos un termómetro graduado en la escala Celsius y otro graduado en la escala Fahrenheit para medir una misma temperatura t. Las lecturas en los termómetros son $t_C = a_C$ [°C] y $t_F = a_F$ [°F], respectivamente, de modo que:

$$t = a_C \left[°C\right] \triangleq a_F \left[°F\right]$$

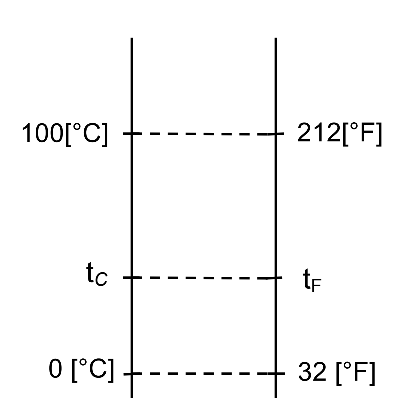
Para encontrar la relación entre las lecturas t_C y t_F establecemos la siguiente proporción:



$$\frac{t_C - 0[°C]}{100[°C] - 0[°C]} = \frac{t_F - 32[°F]}{212[°F] - 32[°F]}$$

$$\frac{t_C}{100[°C]} = \frac{t_F - 32[°F]}{180[°F]}$$

$$\frac{a_C[°C]}{100[°C]} = \frac{(a_F - 32)[°F]}{180[°F]}$$



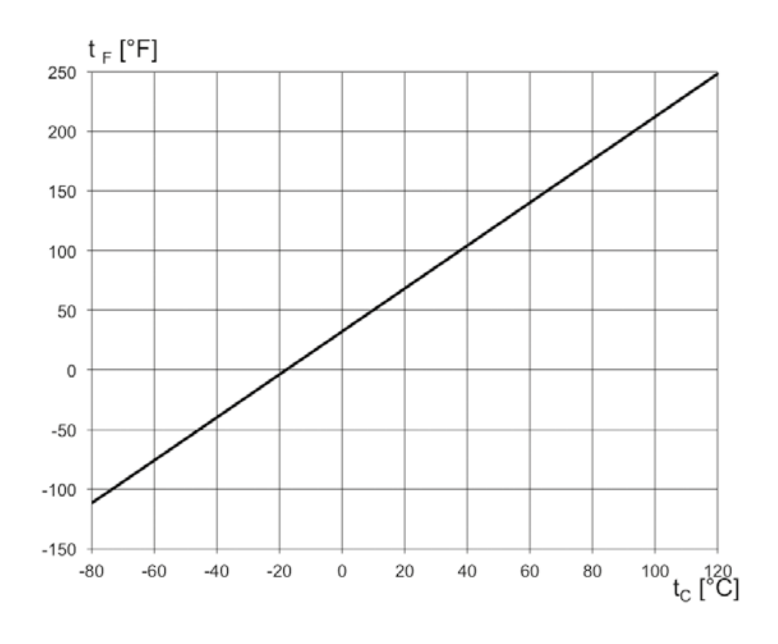
dando para los respectivos números de medición a_C y a_F la relación:

$$a_C = \frac{100}{180} \cdot (a_F - 32) = \frac{5}{9} \cdot (a_F - 32)$$

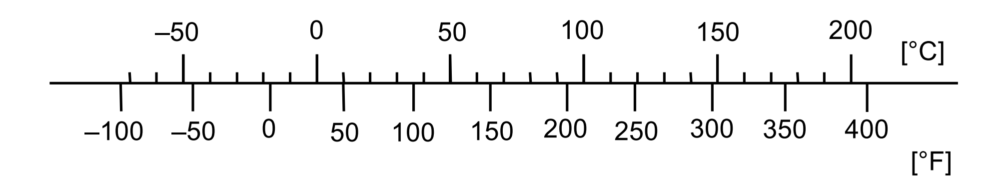
por lo cual:

$$t_C = \frac{5[°C]}{9[°F]} \cdot (t_F - 32[°F]) = a_C[°C]$$

La relación lineal $t_F = \frac{9}{5} t_C + 32[°C]$ entre los pares de lecturas t_F en escala Fahrenheit y t_C en escala Celsius, correspondiendo cada par a una misma temperatura, queda ilustrada en el gráfico que sigue:



Otra forma de representar la relación entre las escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit es mediante el siguiente *monograma*:



Escala Kelvin: Consideraciones teóricas, avaladas por todos los experimentos efectuados a la fecha, establecen que por ningún proceso real puede enfriarse un sistema físico hasta alcanzar una determinada "temperatura mínima" (Tercer Principio de la Termodinámica). A esta temperatura se le asigna el valor "cero Kelvin". Respecto a este cero, la temperatura es positiva para todo sistema físico.

Se introduce una escala de temperatura que usa como unidad de temperatura:

Un Kelvin ...... 1 [K]

definida de tal modo que la temperatura a la cual hielo, agua líquida y vapor de agua coexisten en equilibrio es 273,16 [K] .[1] La temperatura medida en escala Kelvin se denomina "temperatura absoluta".

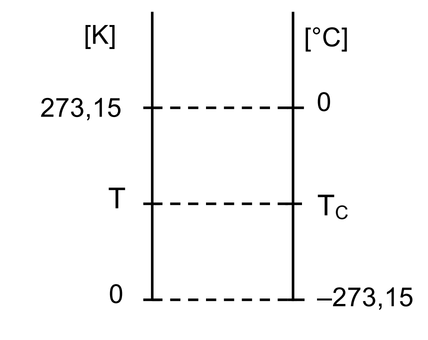
Por definición, la temperatura Celsius (símbolo t_C) se relaciona con la temperatura Kelvin (símbolo *T*) por:

$$t_C = T - T_f \ : \text{con} \ \ T_f = 273{,}15 \, [K]$$

siendo 273,15 [K] el punto de ebullición del agua, a presión atmosférica.

La unidad "grado Celsius" es por lo tanto, equivalente a la unidad "Kelvin":

$$1\left[K\right] \ \hat{=} \ 1\left[°C\right]$$



Un intervalo o diferencia de temperaturas tiene el mismo valor expresado en [°C] y en [K].

Ejemplos

- Expresemos la temperatura 451 [°F] en [°C] y en [K].

Formando la proporción:

$$\frac{t_C}{100\left[°C\right]} = \frac{t_F - 32\left[°C\right]}{180\left[°F\right]} = \frac{\left(451\text{-}32\right)\left[°F\right]}{180\left[°F\right]} = \frac{419}{180}$$

[1] A esta temperatura se le llama el "punto triple del agua".

obtenemos:

$$t_C = \frac{419}{180} \cdot 100 \left[°C\right] = \frac{5}{9} \cdot 419 \left[°C\right] \quad \simeq \quad 233 \left[°C\right]$$

Recordando la definición:

$$t_C = T - 273{,}15 \left[K\right]$$

resulta:

$$T = 233\left[°C\right] + 273{,}15\left[K\right] \;\hat{=}\; 233\left[K\right] + 273{,}15\left[K\right]$$
$$\simeq \quad 506\left[K\right]$$

- Supongamos que disponemos de un termómetro de mercurio y de otro de alcohol. Sabemos que el mercurio se solidifica a –38,9 [°C] y que el alcohol lo hace a –117 [°C]. Nos interesa determinar si podemos usar estos termómetros en un lugar donde la temperatura en invierno descienda hasta –60 [°F].

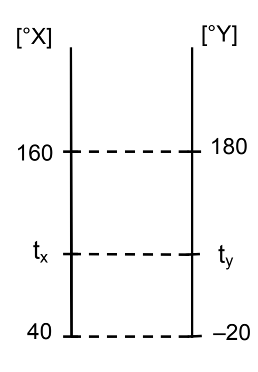
La temperatura $t_F = -60\left[°F\right]$ corresponde en [°C] a:

$$t_C = \frac{5}{9} \cdot \left(t_F - 32\left[°F\right]\right) = \frac{5}{9} \cdot \left(-60 - 32\right)\left[°C\right] \simeq -51\left[°C\right]$$

Como a esta temperatura el mercurio está solidificado, sólo nos serviría el termómetro de alcohol.

- Consideremos dos escalas de temperaturas que se han diseñado asignando a las temperaturas de dos procesos los valores 40 [°X] y 160 [°X] para una, y –20 [°Y] y 180 [°Y] para la otra, respectivamente. Deseamos expresar una temperatura de 57[°X] "en grados Y".

Comencemos por deducir una expresión general que relacione ambas "escalas de temperatura" formando la proporción:



$$\frac{t_Y - \left(-20\right)\left[°Y\right]}{\left(180 - \left(-20\right)\right)\left[°Y\right]} = \frac{t_X - 40\left[°X\right]}{\left(160 - 40\right)\left[°X\right]}$$

$$t_Y + 20\left[°Y\right] = \frac{t_X - 40\left[°X\right]}{120\left[°X\right]} \cdot 200\left[°Y\right]$$

$$t_Y = \frac{t_X - 40\left[°X\right]}{120\left[°X\right]} \cdot 200\left[°Y\right] - 20\left[°Y\right]$$

Entonces, para la temperatura expresada por t_X = 57 [°X] resulta el valor equivalente:

$$t_Y = \left\{\frac{57 - 40}{120} \cdot 200 - 20\right\}\left[°Y\right] \quad \simeq \quad 8\left[°Y\right]$$

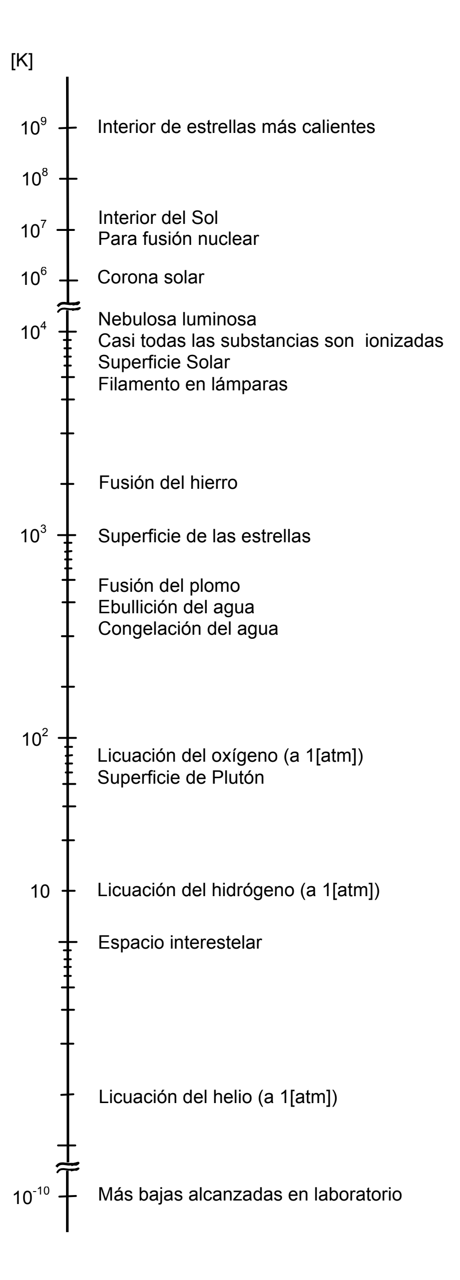
Temperatura: órdenes de magnitud

Hemos señalado la existencia de una temperatura mínima inalcanzable de 0 [K]. Con técnicas modernas se pueden alcanzar fácilmente temperaturas del orden de 1 [K] sumergiendo un sistema en helio líquido. Con un esfuerzo apreciablemente mayor es posible trabajar con temperaturas tan bajas como 10^{-2} [K] o aún 10^{-3} [K]. Las temperaturas más bajas obtenidas en laboratorios son del orden de 10^{-10} [K].

La temperatura del espacio interestelar es del orden de 10 [K] y la temperatura ambiente en la Tierra es del orden de 10^2 [K] (entre unos –70 [°C] y 50 [°C]). El orden de magnitud de la temperatura de fusión de la mayoría de los metales es 10^3 [K].

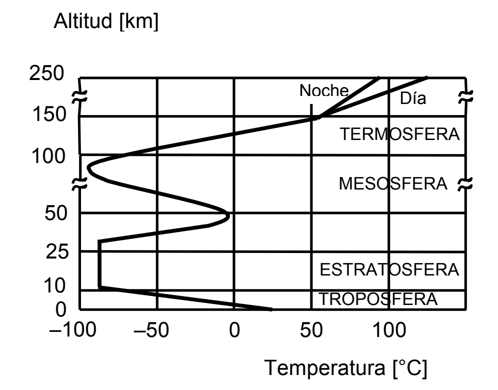
La temperatura en la superficie de las estrellas es del orden de 10^3 [K] a 10^4 [K] y los interiores de ellas alcanzan hasta 10^9 [K]. En los procesos de fisión nuclear se alcanzan temperaturas hasta 10^8 [K] ; temperaturas de tal magnitud permiten iniciar procesos de fusión nuclear. Especulaciones teóricas recientes predicen que las temperaturas en el Universo tendrían un límite máximo del orden de 10^{13} [K].

Temperaturas

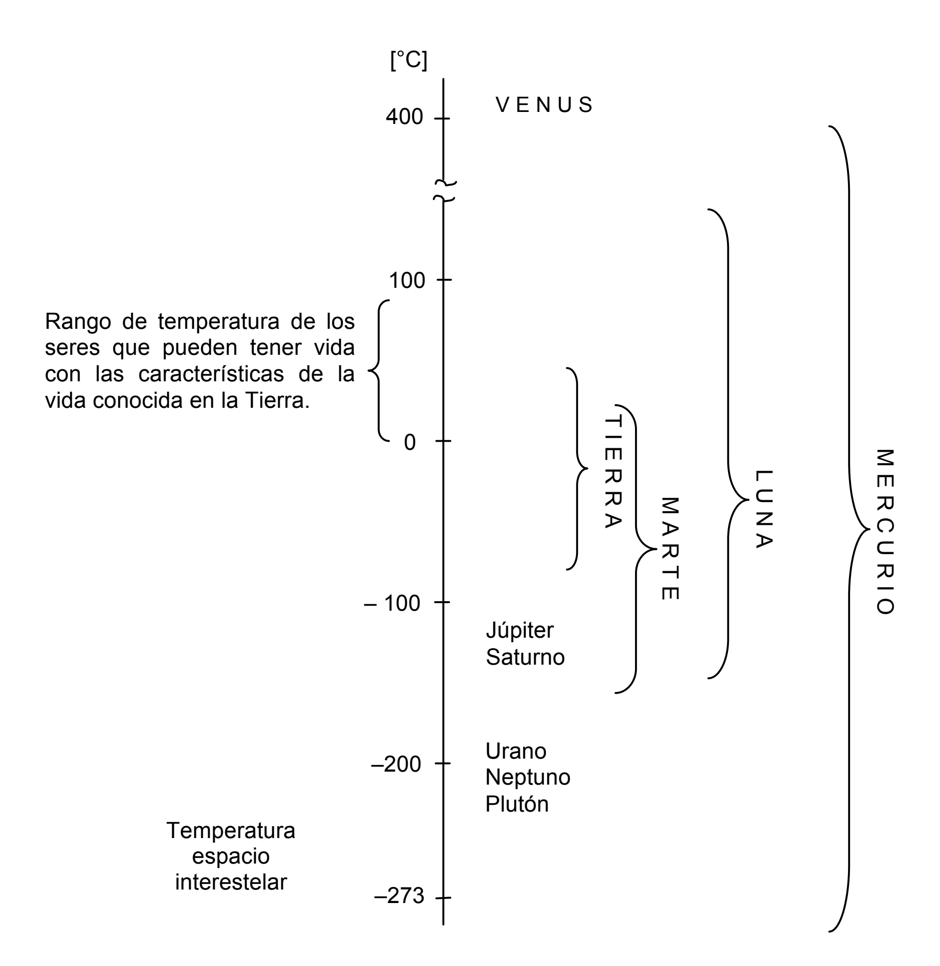


Temperaturas: Atmósfera. Planetas

- En el gráfico adjunto le mostramos las variaciones de la temperatura de la atmósfera con la altitud (altura con respecto a la superficie de la Tierra).



- En la escala presentada a continuación le informamos de los rangos de temperaturas en los planetas de nuestro sistema solar.



Ejercicios

8-1) Se considera como temperatura normal del cuerpo humano la de 37 [°C]. Exprese esta temperatura en [°F] y compárela con la usada originalmente por Fahrenheit para establecer su escala. Comente.

8-2) Puede transformarse una temperatura expresada en [°F] a su equivalente en [°C] sumándole 40, multiplicando la suma por 5/9 y restando 40 del producto. Verifique la exactitud del procedimiento.

¿Cómo se debería modificar el procedimiento anterior para convertir temperatura Celsius a temperatura Fahrenheit?

8-3) La variación de la temperatura anual en cierta localidad se extiende desde –30 [°C] hasta 30 [°C]. Exprese este rango de temperaturas en grados Fahrenheit.

8-4) ¿A qué temperatura dan la misma lectura las escalas de Fahrenheit y Celsius?

8-5) Complete las subdivisiones en la escala Fahrenheit del monograma de la página 268 y compruebe algebraicamente la correspondencia de algunos valores.

8-6) ¿A qué temperatura la lectura en la escala Celsius corresponde a un tercio de la lectura en la escala Fahrenheit? Dé el resultado en [°C].

8-7) Para determinada temperatura, las lecturas en las escalas Celsius y Fahrenheit son iguales en valor absoluto, pero de signo contrario. Determine esa temperatura.

8-8) Transformar el intervalo de temperatura correspondiente a 18 [°F] en su equivalente de la escala Celsius.

8-9) Una escala centígrada de temperatura propuesta por Celsius en 1742 tenía el 0 correspondiente con el punto de ebullición del agua y el 100 con el de fusión del hielo. Obtenga el valor correspondiente a la temperatura de 68 [°F] en esa escala.

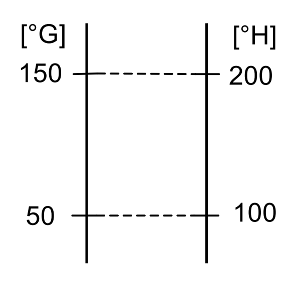
8-10) Se aumenta la temperatura absoluta de un objeto en un 10,0% , desde 0,0 [°C] . Calcule la temperatura, en [°C] , que alcanza el objeto.

8-11) Un cuerpo que tiene una temperatura de 25 [°C] se coloca en un horno de tal modo que su temperatura aumenta uniformemente con rapidez de 0,050 [K/s] . Calcule la temperatura del cuerpo a los 10 [min] después de ser colocado en el horno.

8-12) La temperatura de una habitación sube desde X [°F] hasta Y [°F] . Transforme este aumento de temperatura a [K] .

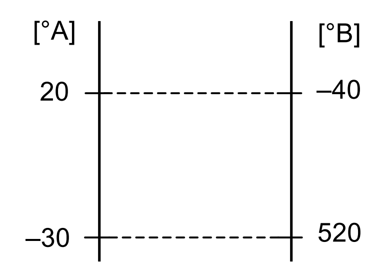
8-13) ¿A qué temperatura dan la misma lectura las escalas Fahrenheit y Kelvin?

8-14) Se calibran dos termómetros de tal modo que a un punto de referencia se asignan los valores 50 [°G] y 100 [°H], respectivamente; a otro punto de referencia se asignan los valores 150 [°G] y 200 [°H], respectivamente. Exprese la temperatura de 27 [°H] en [°G].



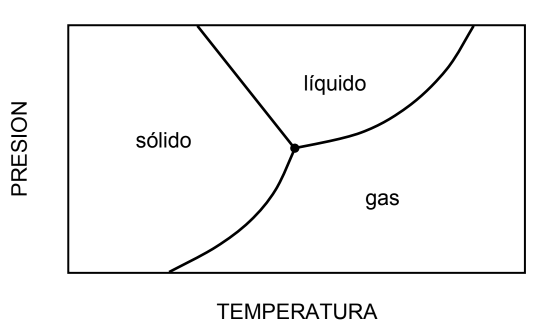
8-15) En cierta escala G de temperatura se asigna el valor 0 [°G] al punto de ebullición normal del agua y 150 [°G] al punto de fusión del hielo. Calcule a qué temperatura las lecturas en la escala G y en la escala Celsius coinciden numéricamente.

8-16) Se diseñan dos escalas lineales de temperatura usando las unidades 1 [°A] y 1 [°B] y cuyas temperaturas de referencia (puntos fijos) coinciden según el esquema de la figura. Calcule la lectura en cada escala que corresponda al cero de la otra.



8-17) En la “escala Rankine” se usa como unidad de temperatura “un grado Rankine” (1[°R]) con la equivalencia 1 [°R] $\triangleq$ 1 [°F] . La “temperatura Rankine” T_R está relacionada con la “temperatura Fahrenheit” t_F por $T_R = t_F + 459{,}67$ [°R]. Exprese la temperatura 0 [°R] en [K]. Determine una expresión general para relacionar temperaturas en escala Rankine y en escala Kelvin.

8-18) Se define el “punto triple” del agua como el estado en el cual coexisten en equilibrio térmico las fases sólida, líquida y gaseosa del agua. Por acuerdo internacional (Décima Conferencia de Pesos y Medidas, París, 1954) a la temperatura del punto triple del agua se asigna el valor de 273,16 [K].



Podemos construir un termómetro basado en las variaciones que experimenta una cantidad física F con los cambios de temperatura y graduarlo tomando como referencia el valor F_{pt} que asume la cantidad F cuando la temperatura es la del punto triple del agua; al indicar sólo un punto de referencia, está implícito que el otro punto de referencia corresponde al 0 [K].

Considere que la propiedad física F escogida varía con la temperatura T de acuerdo a la relación lineal $T(F) = \lambda F$. Determine la constante de proporcionalidad considerando la condición $T(F_{pt}) = T_{pt}$ correspondiente al punto triple del agua y escriba la función T(F) usando el resultado obtenido. Si en un

caso particular se tiene F_{pt} = 72,7 [unidad] ¿qué temperatura indicaría el termómetro cuando la medición de F diera el valor de 17,4 [unidad]?

8-19) La graduación de la "escala práctica internacional de temperaturas", en el rango de 0 [°C] a 660 [°C], se basa en las variaciones que experimenta la resistencia eléctrica de un "termómetro de platino" con los cambios de temperatura, usándose la fórmula:

$$R(t_c) = R_0 \cdot (1 + At_c + Bt_c^2)$$

siendo $R(t_c)$ el valor de la resistencia a la temperatura t_c en la escala Celsius.

Los valores de la resistencia medidos para las temperaturas del punto triple del agua (273,16 [K]), del punto de ebullición del agua (100,00 [°C]) y del punto de ebullición del azufre (444,60 [°C]) son 12,00 [Ω]; 14,82 [Ω] y 27,18 [Ω], respectivamente. Calcule los valores de las constantes R_o , A y B. Si al colocar el termómetro sobre un objeto se mide que su resistencia vale 30 [Ω] ¿cuál es la temperatura del objeto?. Represente gráficamente la función $R(t_c)$.

8-20) Consiga un termómetro "de mercurio", que esté graduado por lo menos hasta 100 [°C]. Coloque el termómetro en agua hirviendo durante algunos minutos. Saque el termómetro del agua y observe la variación de la columna del mercurio en el transcurso del tiempo; tomando nota de la indicación del termómetro, por ejemplo, cada 5[s] durante el primer medio minuto, cada 10[s] durante el siguiente minuto y luego cada 20[s], hasta que la lectura del termómetro prácticamente no cambie. Suponga que en esta situación experimental la lectura T del termómetro en función del tiempo t queda descrita aproximadamente por:

$$T(t) - T_a = (T_0 - T_a) \cdot 2^{-t/\tau}$$

siendo T_a la temperatura ambiente, T_o la temperatura en el instante $t = 0$ y τ un parámetro de dimensión tiempo. Basado en sus datos, calcule el valor de τ y represente T en función del tiempo. Comente.

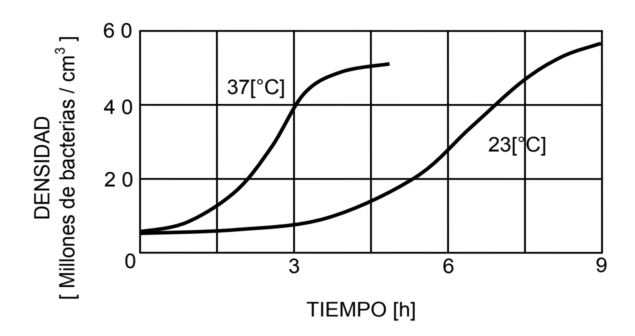
8-21) Los procesos metabólicos en los organismos vivos se realizan en un rango relativamente estrecho de temperaturas. Sin embargo, algunas excepciones aumentan significativamente ese rango. Por ejemplo, granos de polen y semillas de algunas plantas han recobrado su actividad normal después de haber sido expuestas a la temperatura del helio líquido y algunas bacterias pueden sobrevivir por varios meses a las temperaturas cercanas a –180 [°C]. Por otra parte, algunos animales de "sangre fría", como el pez "Barbus thermalis", viven en aguas termales de 50 [°C]; algunas especies de bacterias se desarrollan vigorosamente a temperaturas de 70 [°C] y otras viven en arenas petrolíferas a unos 100 [°C]; y aún más, ciertos virus resisten temperaturas de casi 150 [°C].

Ubique en la "escala de temperaturas" de la página 271 la siguiente información:

–268 [°C] , sobreviven granos de polen y semillas
–254 [°C] , sobreviven especies particulares de hongos
–8 [°C] , desarrollo de algunos mohos primitivos
1 [°C] , temperatura del cuerpo de la ardilla "Citellus tridecemlimeatus" invernando
36 [°C] , temperatura media de mamíferos
40 [°C] , temperatura media de pájaros
70 [°C] , cierta bacteria termofílica
85 [°C] , alga verdeazul en aguas termales
100 [°C] , bacteria en pozos petrolíferos profundos.

8-22) La temperatura en un cultivo bacteriano influye en el tamaño de las bacterias y en su proliferación.

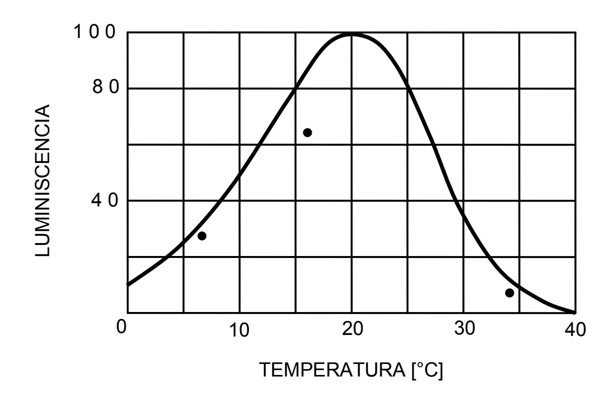
Las curvas de la figura adjunta representan la densidad de un cultivo de la bacteria "Escherichia coli" en función del tiempo a dos diferentes temperaturas.



Comente sobre el efecto que tiene la temperatura en la rapidez de crecimiento y en la población bacterial total. Estime, por interpolación, el número relativo de bacterias en función del tiempo si la temperatura del cultivo fuera 31 [°C].

8-23) La luminiscencia de ciertas bacterias varía con la temperatura. Para medir la luminiscencia relativa de la bacteria "Photobacterium phosphoreum" se preparó un cultivo en solución salina en un frasco transparente, que se fotografió sin ayuda de luz exterior.

Los resultados de una serie de mediciones de luminosidad a diferentes temperaturas se muestran en el gráfico adjunto. La curva indica la luminosidad relativa de las bacterias cuando la temperatura de ellas se ha aumentado progresivamente.



Los puntos representan las mediciones efectuadas mientras el cultivo bacteriano se enfriaba, después de haberlo calentado hasta 40 [°C].

Considere que las variaciones de la luminiscencia con cambios de temperatura pueden ser descritas adecuadamente por la función

$$L(T) = \frac{L_m}{1 + A \cdot (T - T_m)^2}$$

y úsela para representar la luminosidad de las bacterias cuando su temperatura se ha disminuido desde 40 [°C] hasta 0 [°C].

8-24) En la tabla adjunta se encuentran las temperaturas de fusión y de ebullición de algunas substancias.

“**Punto de ebullición”** de una substancia es la temperatura a la cual sus fases de gas y de líquido subsisten en equilibrio térmico a presión normal.

“Punto de fusión” de una substancia es la temperatura a la cual sus fases de sólido y líquido subsisten en equilibrio térmico a presión normal.

Substancia	Temperatura de fusión [K]	Temperatura de ebullición [K]
Tungsteno	3650	5800
Oro	1340	2090
Plomo	600	2020
Agua	273	373
Nitrógeno	66	77
Hidrógeno	13.8	20,3

Construya una tabla similar en que las temperaturas estén expresadas en “grados Celsius”.

8-25) Experimentalmente se ha determinado que la temperatura de la llama en un arco eléctrico es aproximadamente de 4000 [ºC]. En la lista que le presentamos a continuación le damos a conocer algunos valores máximos de temperaturas de llamas producidas por combustión:

1700 [°C] , gas de cañería
3900 [°C] , oxi-hidrógeno
3300 [°C] , oxi-acetileno
3500 [°C] , oxi-aluminio
4300 [°C] , hidrógeno-flúor
4700 [°C] , oxi-cianógeno

Considere los “puntos de fusión” de los siguientes materiales:

3150 [°F] , sílica
3750 [°F] , alúmina
5050 [°F] , magnesio
6100 [°F] , tungsteno
6400 [°F] , carburo de zirconio
7250 [°F] , carburo de hafnio

Suponga que desea fundir muestras de estos materiales colocándolas en llamas producidas por combustión o arco eléctrico. Indique de qué llamas podría hacer uso para cada una de las muestras.

8-26) Para la fabricación de algunos componentes electrónicos se requiere que ciertos átomos difundan en un material dado. En la descripción de tal proceso interviene la cantidad física *D* cuya variación con la temperatura absoluta T está dada por

$$D(T) = D_0 2^{-\alpha/T}$$

¿Cuál es la dimensión de α si $\dim(T) = \theta$?

Calcule el valor de α si $D_0 = 20\left[cm^2/s\right]$ y D vale $3{,}1 \cdot 10^{-4}\left[cm^2/s\right]$ cuando la temperatura es 200 [°C].

Represente gráficamente D en función de la temperatura para el rango entre 20 [ºC] y 400 [ºC].

Dilatación

La experiencia nos dice que al cambiar la temperatura de un cuerpo se producen variaciones en su tamaño; cambian, por ejemplo, los valores de las aristas de un prisma, el diámetro de una esfera, el diámetro y la altura en un cilindro, el largo y el ancho de una plancha, el radio de un disco, el diámetro de un anillo o el largo de una barra.

Aunque las dilataciones afectan el **volumen** de los cuerpos, en determinadas circunstancias podemos considerar "dilataciones en **longitud**" cuando el largo es muy grande con respecto a las medidas lineales de las secciones transversales, como en alambres, cables, rieles y barras. Análogamente, consideramos "dilataciones en **superficie**" cuando examinamos láminas o planchas, donde el espesor es pequeño con respecto a cualquier medida lineal de la superficie.

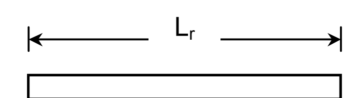
Dilatación lineal

Al medir el largo de una barra a diferentes temperaturas se encuentra que éste cambia con la temperatura.

Sea L_r el largo de una barra medido a una temperatura de referencia t_r, y sea L_d su largo a otra temperatura t_d.

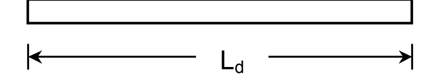
Los valores del cambio de temperatura

Temperatura t_r



$$\Delta t = t_d - t_r$$

y del correspondiente cambio de longitud



$$\Delta L = L_d - L_r$$

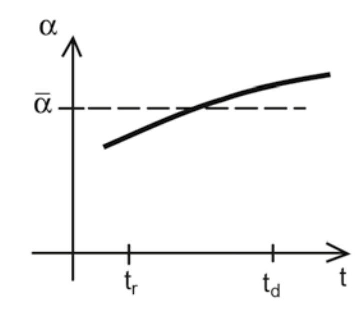
Temperatura t_d

determinados experimentalmente, pueden ser relacionados por la expresión *aproximada*:

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \bar{\alpha}\,\Delta t$$

El "cambio unitario de longitud" $\Delta L / L_r$ es proporcional al cambio de temperatura Δt. El factor de proporcionalidad $\bar{\alpha}$, llamado "coeficiente de dilatación lineal medio", es una característica del material.

El coeficiente de dilatación lineal de un material dado es función de la temperatura. El valor medio de él depende del rango de temperaturas considerado y de la temperatura de referencia escogida. Sin embargo, en la práctica los posibles valores medios no tienen diferencias significativas en un rango de temperaturas del orden de 10^2 [°C].



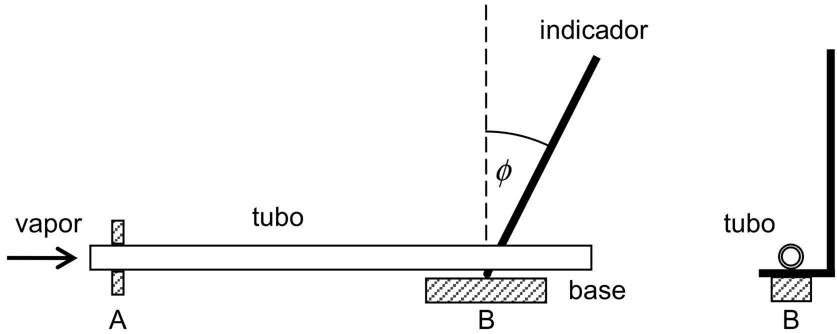
Por requerimientos de consistencia dimensional:

$$\dim\left(\frac{\Delta L}{L_r}\right) = \dim\left(\bar{\alpha}\,\Delta t\right) = 1$$

Además, si en los cálculos las temperaturas se expresan en cierta unidad [u.t.], con lo cual $\Delta t = a$ [u.t.] , entonces $\alpha = b\left[1/\text{u.t.}\right]$ es la forma correcta de expresar el coeficiente de expansión lineal.

Un experimento

Sujetamos un tubo de cobre mediante un fijador colocado cerca de uno de sus extremos. El otro extremo del tubo se apoya sobre un alambre delgado, doblado en forma de "L", que sirve de indicador.



Medimos la temperatura ambiente t_a. Medimos la longitud L_a entre el fijador A y el punto B en que el tubo se apoya en el alambre indicador. Medimos el diámetro D del alambre indicador.

Hacemos pasar vapor de agua por el tubo de cobre durante cierto tiempo para que éste adquiera la temperatura t_v del vapor. Medimos el ángulo ϕ descrito por el alambre indicador.

Los valores obtenidos en las mediciones fueron:

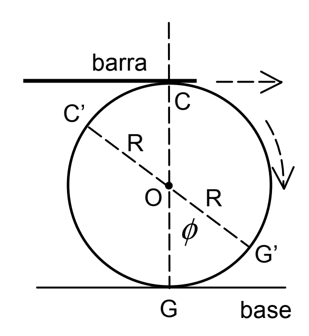
$$D = 0{,}60\,[\text{mm}] \qquad t_a = 16\,[°\text{C}] \qquad L_a = 62{,}0\,[\text{cm}]$$

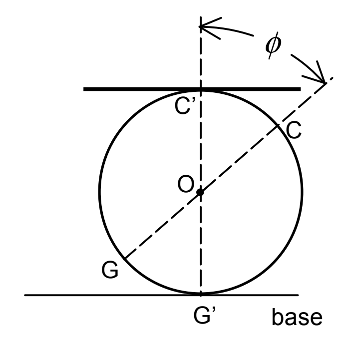
$$t_v = 100\,[°\text{C}] \qquad \phi = 85°$$

La dilatación del tubo de cobre hace que el alambre indicador gire. La relación entre el incremento ΔL en el largo del tubo, el ángulo de giro ϕ, en radianes, y el diámetro D del alambre, puede ser encontrada mediante el siguiente razonamiento:

Si un cilindro rueda un ángulo ϕ, sin resbalar, su apoyo en la base cambia del punto G al punto G', corriéndose una distancia $R\phi$.

Si además, una barra colocada sobre el cilindro no resbala, su punto de apoyo cambia de C a C', corriéndose también en $R\phi$. Resulta, por tanto, que al girar el cilindro un ángulo ϕ, el punto de apoyo de la barra sobre el cilindro se desplaza, respecto a un observador fijo en la base, una distancia $2R\phi$, siempre que no haya resbalamiento.





Obtenemos así la relación $\Delta L \simeq D \cdot \phi$

Entonces, las mediciones efectuadas nos permiten calcular, aproximadamente, el coeficiente de dilatación lineal del cobre:

$$\alpha_{Cu} = \frac{\Delta L}{L_a} \cdot \frac{1}{\Delta t} \simeq \frac{D \cdot \phi}{L_a \cdot (t_v - t_a)} =$$

$$= \frac{0{,}60\,[mm] \cdot \frac{85 \cdot 2\pi}{360}\,[rad]}{620\,[mm] \cdot (100 - 16)\,[°C]}$$

obteniendo $\alpha_{Cu} \simeq 1{,}7 \cdot 10^{-5} \left[1/°C\right]$

Coeficientes de dilatación lineal

- En la tabla siguiente indicamos valores medios típicos de coeficientes de dilatación (expansión) lineal de algunas substancias:

Material	α $[1/°C]$	**Material**	α $[1/°C]$
Cuarzo	$4{,}0 \cdot 10^{-7}$	Bronce	$2{,}0 \cdot 10^{-5}$
Invar	$9{,}0 \cdot 10^{-7}$	Aluminio	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$
Vidrio	$5{,}0 \cdot 10^{-6}$	Zinc	$2{,}5 \cdot 10^{-5}$
Acero	$1{,}2 \cdot 10^{-5}$	Plomo	$2{,}9 \cdot 10^{-5}$
Cobre	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	Hielo	$5{,}1 \cdot 10^{-5}$
Latón	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$	Caucho	$8{,}0 \cdot 10^{-5}$

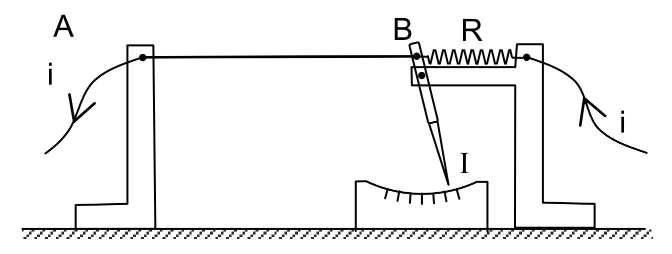
El valor indicado para el coeficiente de expansión lineal del hielo es válido en el rango de temperaturas entre –10 [°C] y 0 [°C].

Que el coeficiente de expansión del acero sea $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ [1/°C] significa que el largo de un alambre de acero de 1[km] aumentaría en 12[mm] si la temperatura subiera en 1 [°C].

El cuarzo, por tener el coeficiente de expansión relativamente más pequeño, sirve para construir patrones secundarios de longitud y recipientes irrompibles al ser sometidos a cambios bruscos de temperatura.

El "invar" es una aleación de níquel y hierro (36% de Ni) cuyo coeficiente de dilatación lineal es unas 20 veces menor que el de los metales ordinarios, por lo cual es utilizado en la fabricación de piezas de aparatos cuyo funcionamiento se quiere que sea prácticamente independiente de cambios de temperatura.

- El esquema de otro aparato que nos permite determinar coeficientes de expansión, es el siguiente:



Un hilo metálico fino, por ejemplo de cromo-níquel, va de A a B y es mantenido tenso por un resorte R. El hilo se calienta por medio de una corriente eléctrica. La variación de temperatura produce un alargamiento del hilo metálico. La acción del resorte permite detectar el alargamiento mediante la aguja indicadora I.

Lo más interesante de este aparato es que nos permite visualizar el modo como se alarga o se acorta un hilo de cierto material. Si se usa un hilo de acero y se le calienta hasta los 900 [°C] y después se lo deja enfriar se verá que la aguja se mueve de manera irregular entre los 900 [°C] y 800 [°C], lo que nos indica que las variaciones de longitud del acero no son proporcionales a los cambios Δt de temperatura en ese rango.

Estudios similares nos indican los rangos de temperaturas dentro de los cuales nos es permitido usar los coeficientes de expansión lineal como constantes en la expresión aproximada $\Delta t \simeq L \, \alpha \, \Delta t$.

Aproximaciones de "primer orden"

Hemos indicado que el cambio del largo de una barra producido por un cambio de temperatura puede expresarse aproximadamente por:

$$L = L_r \, \bar{\alpha} \Delta t$$

siendo L_r el largo de la barra medido a la temperatura de referencia t_r.

Los valores experimentales de los coeficientes de dilatación lineal tienen en general un orden de magnitud menor o igual a 10^{-5} [1/°C]. Aún considerando variaciones de temperatura del orden de 10^2 [°C] , el producto $\bar{\alpha} \Delta t$ tiene a lo más un orden de magnitud de 10^{-3}:

$$\bar{\alpha} \sim 10^{-5} \left[1/°C\right] \quad \text{y} \quad \Delta t \sim 10^2 \left[°C\right] \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha} \Delta t \sim 10^{-3} << 1$$

Cuando en el estudio de algunas situaciones físicas están involucradas cantidades cuyas magnitudes son "mucho menor que uno" puede resultar conveniente, tanto en el desarrollo algebraico como en los cálculos numéricos, efectuar juiciosamente ciertas *aproximaciones*. En esta oportunidad trataremos un tipo de aproximaciones que, siendo de utilidad general, tendrán aplicación inmediata en problemas de dilatación.

- Consideremos la expresión $\left(1+\delta\right)^2 = 1 + 2\delta + \delta^2$

  Si $\delta = 4 \cdot 10^{-3}$ resulta:

$$\begin{aligned} \left(1+\delta\right)^2 &= 1 + 8 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-6} \\ &= 1{,}008016 \;\simeq\; 1{,}008 = 1 + 2\delta \end{aligned}$$

  Si $\delta = -4 \cdot 10^{-3}$ resulta:

$$\begin{aligned} \left(1+\delta\right)^2 &= 1 - 8 \cdot 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-6} \\ &= 0{,}992016 \;\simeq\; 0{,}992 = 1 + 2\delta = 1 - 2\left|\delta\right| \end{aligned}$$

  Entonces, si $\left|\delta\right| << 1$ se cumple $\delta^2 << \left|\delta\right|$ y en la suma $1+2\delta+\delta^2$ el término δ^2 puede ser "despreciado" respecto al término $1+2\delta$, obteniendo la aproximación de "primer orden" en δ:

$$\left(1+\delta\right)^2 \simeq 1+2\delta$$

- Consideremos la expresión $\left(1+\delta\right)^3 = 1+3\delta+3\delta^2+\delta^3$

  Si $\delta = 7 \cdot 10^{-3}$ resulta:

$$\begin{aligned} \left(1+\delta\right)^3 &= 1+21 \cdot 10^{-3} + 147 \cdot 10^{-6} + 343 \cdot 10^{-9} \\ &= 1{,}021147343 \;\simeq\; 1{,}021 = 1+3\delta \end{aligned}$$

  Al comparar los órdenes de magnitud de los términos de $1+3\delta+3\delta^2+\delta^3$:

$$3\delta \sim 10^{-2} \qquad 3\delta^2 \sim 10^{-4} \qquad \delta^3 \sim 10^{-7}$$

observamos, que los términos en δ^2 y en δ^3 pueden ser despreciados en la suma con respecto al término $1+3\delta$.

Entonces, si $|\delta| << 1$ resulta $|\delta^3| << 3\delta^2 << 1+3\delta$, por lo cual adoptamos como buena aproximación de "primer orden en δ a:

$$(1+\delta)^3 \simeq 1+3\delta$$

- Busquemos una aproximación para $\frac{1}{1+\delta}$

Si $\delta = 7\cdot 10^{-3}$resulta:

$$\frac{1}{1+\delta} = \frac{1}{1{,}007} = 0{,}99304866...$$
$$\simeq 0{,}993 = 1-\delta$$

Si $\delta = -7\cdot 10^{-3}$ resulta:

$$\frac{1}{1+\delta} = \frac{1}{0{,}993} = 1{,}00704935...$$
$$\simeq 1{,}007 = 1-\delta = 1+|\delta|$$

Procediendo algebraicamente:

$$1:(1+\delta) = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 ...$$

producto $1+\delta$
resta $-\delta$

producto $-\delta-\delta^2$
resta δ^2

producto $\delta^2+\delta^3$
resta $-\delta^3$

notamos que si $|\delta| << 1$ podemos usar la aproximación:

$$\frac{1}{1+\delta} = (1+\delta)^{-1} \simeq 1-\delta$$

que es una aproximación de primer orden en δ.

- Para encontrar una aproximación de primer orden en δ para $\sqrt{1+\delta}$, podemos usar el siguiente método:

Si $|\eta| << 1$ tenemos que $$(1+\eta)^2 \simeq 1+2\eta$$

por tanto $$1+\eta \simeq \sqrt{1+2\eta}$$

y haciendo $\delta = 2\eta$ obtenemos:

$$\sqrt{1+\delta} = (1+\delta)^{1/2} \simeq 1+\frac{1}{2}\delta$$

- En general, si $|\delta| << 1$ vale la aproximación de primer orden en δ:

$$(1+\delta)^p \simeq 1+p\delta$$

para cualquier p real.

- Usando los resultados anteriores podemos encontrar fácilmente una aproximación para el cuociente $\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2}$ cuando $|\delta_1| << 1$ y $|\delta_2| << 1$:

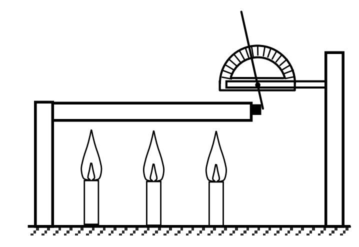
$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} \simeq (1+\delta_1)\cdot(1-\delta_2) = 1+\delta_1-\delta_2-\delta_1\cdot\delta_2$$
$$\simeq 1+(\delta_1-\delta_2)$$

resultado que se obtiene al despreciar en la suma el término $\delta_1\delta_2$ que es de "segundo orden de pequeñez": si $\delta_1 \sim 10^{-3}$ y $\delta_2 \sim 10^{-3}$ resulta $\delta_1\delta_2 \sim 10^{-6}$.

Ejercicios

8-27) Escoja una esfera metálica. Construya un anillo metálico que a la temperatura ambiente tenga un diámetro "igual" al diámetro de la esfera. Caliente o enfríe el anillo o la esfera y observe la factibilidad de que la esfera pase o no por el anillo.

8-28) Arme el aparato mostrado en la figura. Fije la varilla metálica por uno de sus extremos. Sujete el transportador y coloque la aguja indicadora, teniendo su punto de giro coincidente con el centro del transportador. Haga que a la temperatura ambiente la aguja indicadora toque justamente el extremo libre de la varilla.



Caliente la barra; use, por ejemplo, algunos mecheros. Obtenga una relación entre la lectura en el transportador y el aumento del largo de la varilla. Efectúe mediciones y cálculos para determinar el coeficiente de expansión lineal de la varilla.

8-29) Use diferentes pares de valores de δ_1 y δ_2 de la tabla adjunta para calcular valores aproximados de las expresiones:

$$\frac{1+\delta_1}{1+\delta_2} \quad \text{y} \quad \frac{\delta_1}{1+\delta_2}$$

δ_1	δ_2
$7\cdot 10^{-2}$	$5\cdot 10^{-3}$
$3\cdot 10^{-4}$	$9\cdot 10^{-4}$
$8\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-5}$

- Efectuando la división $(1+\delta_1):(1+\delta_2)$ compruebe la correspondiente aproximación lineal dada en el texto.

- Determine aproximaciones de primer y de segundo orden de la expresión:

$$\delta_1 \big/ (1+\delta_2)$$

Ejemplos de dilatación lineal

Los resultados experimentales de los cambios de longitud de una barra son adecuadamente descritos por la relación aproximada:

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \alpha \Delta t$$

siendo ΔL el cambio de longitud respecto a la longitud L_r correspondiente a una temperatura de referencia t_r convenientemente elegida, Δt el cambio de temperatura respecto a t_r y α el valor medio del coeficiente de dilatación lineal del material.

Una expresión para el largo L_d de la barra a una temperatura dada t_d puede obtenerse mediante el siguiente desarrollo algebraico:

$$\Delta t = t_d - t_r$$

$$\Delta L = L_d - L_r$$

$$\frac{\Delta L}{L_r} = \frac{L_d - L_r}{L_r} = \alpha \cdot \Delta t = \alpha \cdot (t_d - t_r)$$

$$L_d - L_r = L_r \cdot \alpha \cdot (t_d - t_r)$$

dando como resultado:

$$L_d = L_r \cdot \{1 + \alpha \cdot (t_d - t_r)\}$$

- El diseño de un aparato físico requiere que una varilla de acero y otra de cobre tengan una diferencia de largo constante a cualquier temperatura. ¿Cuál debe ser el largo de estas varillas a una temperatura t_o para que tal diferencia sea de 11,0[cm]?

Sean:

t_q una temperatura cualquiera.

α_a y α_c los respectivos coeficientes de dilatación del acero y del cobre a la temperatura t_q

ℓ_{oa} y ℓ_a los largos de la varilla de acero a t_o y a t_q respectivamente.

ℓ_{oc} y ℓ_c los largos de la varilla de cobre a t_o y a t_q respectivamente.

Haciendo $\Delta t = t_q - t_o$, establecemos las relaciones:

$$\ell_a = \ell_{oa} \cdot \left(1 + \alpha_a \cdot \Delta t\right) \quad \text{y} \quad \ell_c = \ell_{oc} \cdot \left(1 + \alpha_c \cdot \Delta t\right)$$

La diferencia entre ambas es:

$$\left(\ell_a - \ell_c\right) = \left(\ell_{oa} - \ell_{oc}\right) + \left(\ell_{oa} \cdot \alpha_a - \ell_{oc} \cdot \alpha_c\right) \cdot \Delta t$$

La condición de que las diferencias de longitudes sean constantes a cualquier temperatura:

$$\ell_a - \ell_c = \ell_{oa} - \ell_{oc} = K \text{, constante}$$

implica:

$$\left(\ell_{oa} \cdot \alpha_a - \ell_{oc} \cdot \alpha_c\right) \cdot \Delta t = 0 \quad \rightarrow \quad \ell_{oa} \cdot \alpha_a = \ell_{oc} \cdot \alpha_c$$

Esto es, los largos a la temperatura t_o son inversamente proporcionales a los coeficientes de dilatación:

$$\frac{\ell_{oa}}{\ell_{oc}} = \frac{\alpha_c}{\alpha_a}$$

Entonces:

$$\ell_{oa} - \ell_{oc} = K = \ell_{oa} - \frac{\alpha_a}{\alpha_c} \cdot \ell_{oa} = \left(1 - \frac{\alpha_a}{\alpha_c}\right) \cdot \ell_{oa}$$

$$= \frac{\alpha_c}{\alpha_a} \cdot \ell_{oc} - \ell_{oc} = \left(\frac{\alpha_c}{\alpha_a} - 1\right) \cdot \ell_{oc}$$

con lo cual:

$$\ell_{oa} = \frac{\alpha_c}{\alpha_c - \alpha_a} \cdot K \qquad \text{y} \qquad \ell_{oc} = \frac{\alpha_a}{\alpha_c - \alpha_a} \cdot K$$

Introduciendo el valor K = 11,0[cm] y los valores numéricos de los coeficientes de dilatación lineal a 25[°C]: $\alpha_c = 1{,}66 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$ y $\alpha_a = 1{,}23 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$, resulta que a 25 [°C] el largo de la varilla de acero debe ser 42,5[cm] y el de la de cobre 31,5[cm] .

Le hacemos notar que si bien las expresiones algebraicas obtenidas aparecen como válidas para cualquier temperatura, ellas están limitadas por los fenómenos físicos que pueden producirse y de los cuales no da cuenta la ley aproximada $\Delta L = L_r\, \alpha\, \Delta t$ que usamos como base. Por ejemplo, uno de estos fenómenos es la fusión de los metales.

- Un reloj de péndulo de largo L_e a la temperatura t_e , marca la hora exacta. El coeficiente de expansión lineal del material del péndulo es $1{,}85 \cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$. ¿Cuánto atrasará por día, aproximadamente, si la temperatura del ambiente sube en 10[°C]?

El período de un péndulo, que corresponde al tiempo de una oscilación completa, es proporcional a la raíz cuadrada del largo del péndulo:

$$\tau = \gamma \cdot \sqrt{L}$$

donde el factor γ es tal que al introducir el largo en [cm] , el período resulta en [s] .

A la temperatura t_e el largo es L_e y el período es $\tau_e = \gamma\sqrt{L_e}$.

Cuando la temperatura sube en Δt el largo del péndulo aumenta a:

$$L_s = L_e \cdot \left(1 + \alpha \cdot \Delta t\right) = L_e + \alpha \cdot L_e \cdot \Delta t$$

y el período correspondiente es $\tau_s = \gamma \cdot \sqrt{L_s}$

El número de segundos que el reloj “pierde” por cada oscilación es:

$$\Delta\tau = \tau_s - \tau_e = \gamma \cdot \left\{\sqrt{L_s} - \sqrt{L_e}\right\}$$
$$= \gamma \cdot \left(\sqrt{L_s} - \sqrt{L_e}\right) \cdot \frac{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}}{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}} = \gamma \cdot \frac{\left(L_s - L_e\right)}{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}} = \gamma \cdot \frac{\alpha \cdot L_e \cdot \Delta t}{\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e}}$$

Como el coeficiente de dilatación es pequeño $\left(\alpha << 1\right)$, podemos **aproximar**:

$$\sqrt{L_s} + \sqrt{L_e} \simeq 2\sqrt{L_e}$$

con lo cual:

$$\Delta\tau = \gamma \cdot \frac{\alpha \cdot L_e \cdot \Delta t}{2\sqrt{L_e}} = \frac{\alpha \cdot \gamma \cdot \sqrt{L_e} \cdot \Delta t}{2} = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} \cdot \tau_e$$

Además, el número de oscilaciones que ejecuta el péndulo en un día de temperatura ambiente t_e es $N = 86400[s] / \tau_e$. Suponiendo que el péndulo ejecutara este mismo número de oscilaciones por día, a pesar del cambio de temperatura, resulta entonces que el "atraso del reloj por día" es aproximadamente:

$$\Delta\tau \simeq \frac{\alpha \cdot \Delta t}{2} \tau_e \cdot \frac{86400[s]}{\tau_e} = \alpha \cdot \Delta t \cdot 43200[s] =$$
$$= 1,85 \cdot 10^{-5}[1/°C] \cdot 10[°C] \cdot 4,32 \cdot 10^4[s] \quad \simeq \quad 8[s]$$

- Para asegurar un ajuste "técnicamente perfecto", los remaches de aluminio usados en la construcción de aeroplanos se hacen ligeramente más gruesos que los orificios y se enfrían, por ejemplo con "hielo seco" (CO_2 sólido), antes de ser introducidos en aquellos. Suponga que el diámetro de un orificio sea de 17,50[mm] a una temperatura ambiente de 20 [°C]. Calcule el diámetro del remache a 20 [°C] para que su diámetro sea igual al del orificio cuando el remache se enfríe a –78 [C], la temperatura del hielo seco.

Tomando como temperatura de referencia t_r = –78 [°C] para la cual se desea que el diámetro del remache sea D_r = 17,50[mm] , resulta:

$$D_{20} - D_r = D_r \cdot \alpha_{Al} \cdot \left(20[°C] - t_r\right)$$

$$D_{20} - 17,50[mm] = 17,50[mm] \cdot 2,4 \cdot 10^{-5}[1/°C] \cdot (20 + 78)[°C] =$$
$$\simeq 4,1 \cdot 10^{-2}[mm]$$

Por tanto, el diámetro del remache a 20 [°C] debe ser aproximadamente 17,54[mm] .

Compruebe usted que al resolver el problema tomando como temperatura de referencia 20 [°C] obtendrá este mismo resultado aproximado.

- La medición del largo de una barra se ha efectuado con una regla de acero graduada en milímetros y que ha sido calibrada a 18 [°C] . La longitud medida fue de 68,27[cm] a la temperatura ambiente de 29 [°C] ¿ Qué error se cometió ?

A 18 [°C] la lectura 68,27 es igual al largo L_{18} = 68,27[cm].

A 29 [°C] el largo correspondiente a la lectura 68,27 es:

$$L_{29} = L_{18} \cdot \left\{1 + \alpha_a \cdot \left(29[°C] - 18[°C]\right)\right\}$$

Entonces, la variación de la indicación de la regla es:

$$L_{29} - L_{18} = L_{18} \cdot 11[°C] \cdot \alpha_a$$

y usando el dato $\alpha_a = 1,2 \cdot 10^{-5}[1/°C]$, obtenemos para el error cometido en la lectura el valor:

$$L_{29} - L_{18} = 68,27[cm] \cdot 11[°C] \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}[1/°C] \quad \simeq \quad 0,01[cm]$$

Esto indica que el largo "verdadero" de la barra a la temperatura ambiente de 29[°C] es de (68,27 + 0,01) [cm] .



La regla indicaría el largo verdadero de la barra a 29[°C]

Como las marcas en la regla se "separan" la regla indicaría un valor "menor" que si no se dilatara.

Este ejemplo nos señala que para efectuar mediciones con gran precisión es necesario tomar en cuenta tanto la temperatura a la que se calibra el instrumento como la temperatura a la que se efectúa la medición.

- Dos láminas, A y B , de metales diferentes, tienen igual largo a la temperatura t_r . Están remachadas juntas de modo que cuando aumenta la temperatura se doblan. Suponiendo que se doblen en forma de un arco de circunferencia, se pide calcular el radio de esa circunferencia.

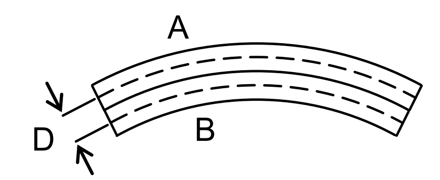
Sean:

L_r	el largo inicial común de ambas láminas.
α_A y α_B	los coeficientes de expansión lineal de A y B, respectivamente.
Δt	el aumento de temperatura.
L_A y L_B	los largos dilatados de las líneas centrales de A y B, respectivamente.
d_A y d_B	los espesores de A y B, respectivamente.

Suponiendo que las líneas centrales de las láminas se dilatan independientemente, tenemos:

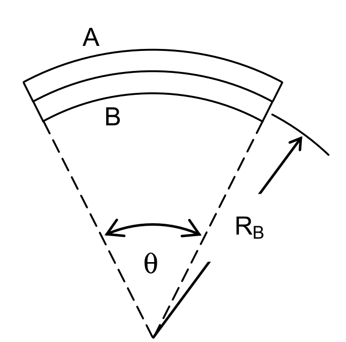
$$L_A = L_r \cdot \left(1 + \alpha_A \cdot \Delta t\right)$$

$$L_B = L_r \cdot \left(1 + \alpha_B \cdot \Delta t\right)$$



Considerando que la separación entre las líneas centrales de A y B es $D = (d_A + d_B)/2$ y suponiendo que la línea central de B forma un arco de circunferencia de radio R_B, tenemos:

$$L_A = (R_B + D)\cdot\theta$$
$$L_B = R_B \cdot \theta$$



Igualando los cuocientes L_A / L_B resulta:

$$\frac{R_B + D}{R_B} = \frac{1 + \alpha_A \cdot \Delta t}{1 + \alpha_B \cdot \Delta t}$$

Reconociendo que los productos $\delta_A = \alpha_A \Delta t$ y $\delta_B = \alpha_B \Delta t$ tienen valores cuyo orden de magnitud típico es de 10^{-3}<<1, podemos usar la aproximación:

$$\frac{1 + \alpha_A \cdot \Delta t}{1 + \alpha_B \cdot \Delta t} \simeq 1 + (\alpha_A - \alpha_B)\cdot\Delta t$$

Entonces: $1 + \dfrac{D}{R_B} \simeq 1 + (\alpha_A - \alpha_B)\cdot \Delta t$

dando como resultado: $R_B \simeq \dfrac{d_A + d_B}{2(\alpha_A - \alpha_B)\cdot \Delta t}$

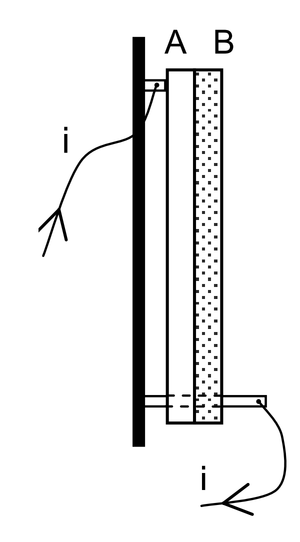
Para obtener el valor del radio R_B hemos supuesto que el par de láminas adquiere al dilatarse la forma de un arco de circunferencia. En la realidad, el radio de curvatura será algo mayor que el calculado debido a que hemos despreciado los efectos de una fuerza compresora sobre A y de una extensora sobre B.

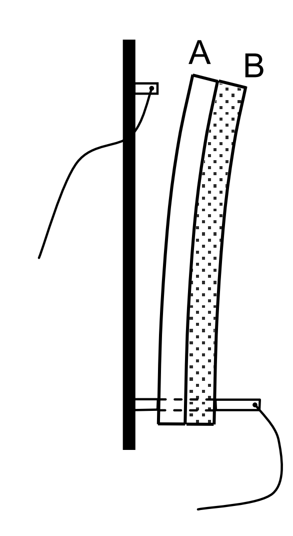
Note, además, que si $\alpha_A = \alpha_B$ las láminas no se curvan $(R_B \to \infty)$

El dispositivo analizado en este problema tiene una aplicación directa: la construcción de “termostatos” usando láminas bimetálicas.

Por ejemplo, tenemos dos varillas metálicas A y B unidas una al lado de la otra. Si $\alpha_A > \alpha_B$ el conjunto se dobla, al calentarse, tal como se indica en la figura.

El doblamiento de un par bimetálico se puede usar para abrir o cerrar circuitos eléctricos cuando un sistema ha llegado a una temperatura prefijada. Pares bimetálicos encuentran aplicación en refrigeradores, calentadores de agua, señalizadores de viraje en automóviles y otros aparatos.





Ejercicios.

8-30) Considere dos barras de aluminio que tienen 1,00[m] de largo cuando una se mide a 0 [°C] y la otra a 25 [°C]. Determine la diferencia entre sus largos a 20 [°C].

8-31) Supongamos que unos rieles de acero midan 18,0[m] de largo al ser colocados en un día de invierno, en que la temperatura es de –2 [°C]. Determine el espacio que debe dejarse entre ellos para que estén justamente en contacto un día de verano en que la temperatura sea 40 [°C].

8-32) La medición del largo de un puente de acero, efectuada a cierta temperatura, dio el resultado 200,0[ft]. Calcule la diferencia entre su largo en un día de invierno cuando la temperatura es de –20 [°F] y en un día de verano cuando la temperatura es de 100 [°F].

8-33) Un tubo fabricado de cierta aleación mide 10,00[ft] a 73 [°F] y se encuentra que incrementa su longitud en 0,75 [in] cuando se calienta a 570 [°F]. Calcule el coeficiente de expansión lineal de la aleación.

8-34) Determine el coeficiente de expansión lineal de una barra que tiene un largo L_a a la temperatura t_a y un largo L_b a t_b. Compruebe que si tomara como referencia L_a y t_a, obtendría $\alpha = \left(L_b - L_a\right) / \left\{L_a \cdot \left(t_b - t_a\right)\right\}$ ¿Qué expresión obtendría si usara como referencia L_b y t_b? Compare ambas expresiones para α. Reemplace los valores del ejercicio anterior en cada una de las expresiones e indique si son o no significativamente diferentes.

Comentarios

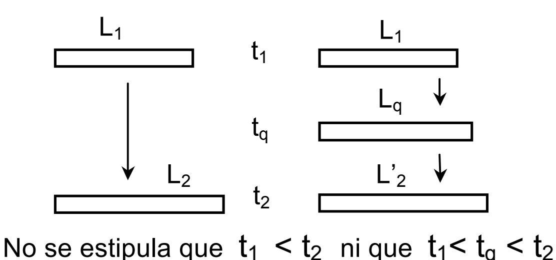
- Dos barras del mismo coeficiente de expansión lineal α se cortan de modo que tengan igual largo a una temperatura t_1. Una de ellas se lleva directamente a un lugar de temperatura ambiente t_2. La otra se coloca primero en un ambiente de temperatura t_q, y luego se traslada al lugar de temperatura t_2. Si

calculamos los largos de las barras a la temperatura t_2 mediante la relación aproximada usual, ¿obtendremos el mismo valor al considerar los diferentes procesos?

Sea L_1 el largo de cada barra a la temperatura t_1.

El largo L_2 a la temperatura t_2 de la barra que cambia directamente del ambiente de temperatura t_1 al de temperatura t_2 está dado por:

$$L_2 = L_1 \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_1 \right) \right\}$$



No se estipula que $t_1 < t_2$ ni que $t_1 < t_q < t_2$

En el caso de la otra barra, obtenemos primero el largo L_q a temperatura t_q:

$$L_q = L_1 \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(t_q - t_1 \right) \right\}$$

y luego, el largo L_2' a temperatura t_2:

$$L_2' = L_q \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_q \right) \right\}$$

Reemplazando el valor previo de L_q resulta:

$$\begin{aligned} L_2' &= L_1 \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(t_q - t_1 \right) \right\} \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_q \right) \right\} \\ &= L_1 \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left[\left(t_2 - t_q \right) + \left(t_q - t_1 \right) \right] + \alpha^2 \left(t_q - t_1 \right) \left(t_2 - t_q \right) \right\} \end{aligned}$$

Manteniendo el criterio de aproximación al primer orden en $\alpha \Delta t$, que estamos usando, aceptamos como válida la expresión:

$$L_2' \simeq L_1 \cdot \left\{ 1 + \alpha \cdot \left(t_2 - t_1 \right) \right\}$$

Observamos que los cálculos para los largos de cada barra a la misma temperatura t_2 dan el mismo resultado en aproximación de primer orden:

$$L_2' \simeq L_2$$

lo que está de acuerdo al consenso de que si dos barras de idéntico material tienen igual largo a una misma temperatura, mantendrán la igualdad de largo cada vez que tengan igual temperatura, independientemente de la historia de las barras. Sin embargo, en algunos casos esto no es efectivo, ya que en ciertos rangos de temperaturas pueden producirse, por ejemplo, cambios en la estructura cristalina de las barras que afecten a su largo y al comportamiento físico subsiguiente.

- Si el largo de una barra es L_r a cierta temperatura de referencia t_r ¿cuál será la diferencia de los largos de la barra a dos temperaturas t_1 y t_2 dadas ?

El largo de la barra en función de la temperatura t está dado por:

$$L(t) = L_r \cdot \{1 + \alpha \cdot (t - t_r)\}$$

entonces:

$$L_1 = L(t_1) = L_r \cdot \{1 + \alpha \cdot (t_1 - t_r)\}$$
$$L_2 = L(t_2) = L_r \cdot \{1 + \alpha \cdot (t_2 - t_r)\}$$

de donde:

$$L_2 - L_1 = L_r \cdot \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

Por no aparecer en esta expresión la temperatura de referencia t_r, la diferencia de largos queda condicionada a la medición L_r, que puede hacerse a cualquier temperatura. Por otra parte, es razonable pensar que para dos temperaturas dadas la diferencia de largos estaría determinada sin ambigüedad por la diferencia de temperatura. Podemos justificar tal discrepancia basándonos en el hecho de que estamos empleando relaciones aproximadas de primer orden en $\alpha \Delta t$. Por ejemplo, al tomar como condiciones de referencia $\{t_1, L_1\}$ o $\{t_2, L_2\}$ se obtienen las expresiones

$$L_2 - L_1 = L_1 \, \alpha \cdot (t_2 - t_1) \quad \text{o} \quad L_2 - L_1 = L_2 \, \alpha \cdot (t_2 - t_1)$$

respectivamente, cuyas evaluaciones dan el mismo resultado aproximado ya que predomina el factor $\alpha \Delta t$, que tiene orden de magnitud 10^{-3} en situaciones físicas reales.

En todo caso, para evitar ambigüedades de este tipo, u otras similares, los resultados de mediciones de longitud se suelen entregar a una temperatura de referencia fijada por acuerdos internacionales, por ejemplo 20 [°C].

- Cuando en el desarrollo de problemas de dilatación lineal se usa la relación

$$L_d = L_r \cdot \{1 + \alpha \cdot (t_d - t_r)\},$$

se suele hacer coincidir la temperatura y el largo de referencia con las condiciones iniciales detectadas de la descripción del proceso que requiere ser analizado. Surge la pregunta ¿qué influencia tiene en los resultados el considerar como condiciones iniciales las condiciones finales del proceso y viceversa?

Para respondernos a esta pregunta, consideremos primero las condiciones iniciales $\{t_i, L_i\}$. Entonces, el largo L_f a temperatura t_f está dado por:

$$L_f = L_i \cdot \{1 + \alpha \cdot (t_f - t_i)\}$$

Por otra parte, si consideramos como referencia $\{t_f, L_f\}$ para el largo inicial L_i a temperatura t_i escribimos:

$$L_i = L_f \cdot \{1 + \alpha \cdot (t_i - t_f)\}$$

y despejando L_f resulta:

$$L_f = \frac{L_i}{1+\alpha\cdot\left(t_i - t_f\right)} \simeq L_i \cdot \left\{1-\alpha\cdot\left(t_i - t_f\right)\right\}$$

por tanto:

$$L_f \simeq L_i \cdot \left\{1-\alpha\cdot\left(t_f - t_i\right)\right\}$$

Esta expresión para L_f, obtenida al hacer la aproximación de primer orden en $\alpha\Delta t$, coincide con la escrita para L_f a partir de las condiciones iniciales $\{ t_i ,\ L_i\}$.

Ejercicios

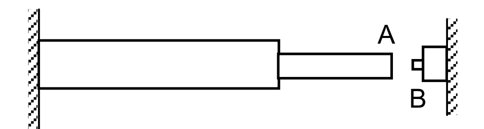
8-35) Transforme los coeficientes de expansión lineal de la tabla en la página 279, que están expresados en la unidad [1/°C], de modo que queden expresados en [1/°F] .

8-36) Se desea que, a cualquier temperatura, dos barras de distintas aleaciones, sea una 16[cm] más larga que la otra. Calcule las longitudes de estas barras a 18 [°C]. Los coeficientes de dilatación de las aleaciones valen $8{,}9\cdot10^{-6}\left[1/°C\right]$ y $34\cdot10^{-6}\left[1/°C\right]$ a tal temperatura.

8-37) Una cinta de acero para medir, de 100,00 [ft], proporciona medidas “correctas” a la temperatura 65 [°F] . La distancia entre dos puntos medida con esta cinta, un día cuando la temperatura era 95 [°F], fue 76,58 [ft]. ¿Cuál es la distancia “real” entre los puntos a 95 [°F]?

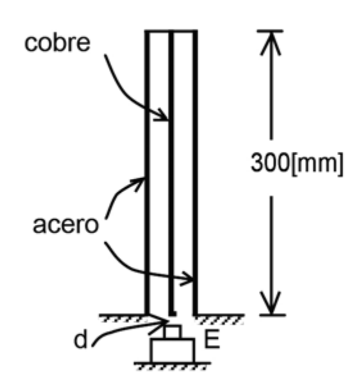
8-38) Un reloj ha sido ajustado para que su péndulo tenga un período de oscilación de 2,0 [s] al encontrarse en un ambiente de 25 [°C]. La varilla que forma parte del péndulo es de bronce. Determine, aproximadamente, el número de segundos que atrasaría o adelantaría el reloj en un día en que la temperatura ambiente fuera de 15 [°C].

8-39) Un dispositivo como el representado en la figura puede usarse para proteger térmicamente un circuito eléctrico. Está formado por dos varillas soldadas, una de acero de 4,0 [mm] de diámetro y una de cobre de 2,0 mm] de diámetro.



Sus largos a la temperatura de 20[°C] son, respectivamente 30,0 [cm] y 15,0[cm]. ¿A qué temperatura se produce la desconexión, si ésta tiene efecto cuando el punto A del dispositivo toca el interruptor B, que se encuentra a 0,12 [mm] de A cuando la temperatura es 20 [°C]?

8-40) Un interruptor de "acción térmica", como el esquematizado en la figura, está construido con tres varillas. Las dos varillas exteriores son de acero y la central es de cobre. ¿A qué distancia *d* debe ponerse el interruptor eléctrico E para que al aumentar la temperatura en 200 [°C] se produzca el contacto?

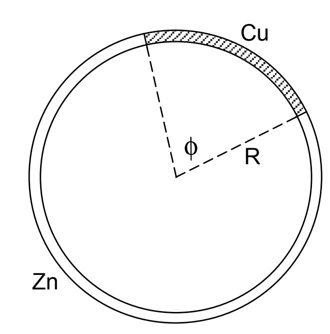


8-41) Una rueda tiene un radio de 30,00 [cm] y una llanta de hierro tiene 29,98 [cm] de radio interior. ¿Cuánto debe aumentarse la temperatura de la llanta para que ajuste "perfectamente" en la rueda?

8-42) Un anillo de acero cuyo diámetro interior es de 3,000 [in] a 20 [°C], se calienta y se coloca en un cilindro de bronce que mide 3,002 [in] de diámetro a 20 [°C]. ¿Cuál es la temperatura mínima a la que debe calentarse el anillo? Si posteriormente el anillo y el cilindro se enfriaran a qué temperatura se deslizaría el anillo del cilindro?

8-43) Un alambre homogéneo se dobla en forma de anillo dejándose una separación de 2,83 [cm] entre los extremos del alambre. Al incrementar uniformemente la temperatura del alambre en 176 [°C] se encuentra que la separación aumenta a 2,85[cm] . Calcule el coeficiente de expansión lineal del alambre.

8-44) Dos trozos de alambre, uno de cobre y otro de zinc, están soldados por sus extremos y forman un anillo como se indica en la figura. Inicialmente, a la temperatura T_1, el radio del anillo es R_1 y el arco de Cu subtiende un ángulo ϕ_1. Determine, haciendo ciertas suposiciones convenientes, el ángulo ϕ_2 que subtendería el arco de Cu a una temperatura T_2.



Dilatación de superficies

Cuando varía la temperatura de una placa, su superficie cambia. Consideremos, por ejemplo, una placa rectangular de lados a_r y b_r a cierta temperatura de referencia t_r. Cuando la temperatura cambia en Δt los lados de la placa cambian a:

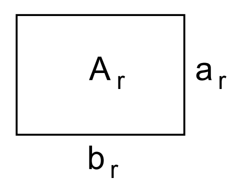
$$a = a_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right)$$

$$b = b_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right)$$

El área original de la placa era:

$$A_r = a_r \cdot b_r$$



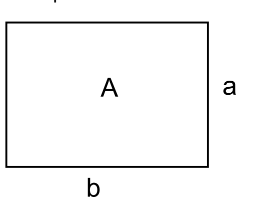


y al variar la temperatura en Δt es:

Temperatura $t_r + \Delta t$

$$A = a \cdot b = a_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right) \cdot b_r \cdot \left(1 + \alpha \Delta t\right)$$

$$= A_r \cdot \left(1 + 2\alpha \Delta t + \alpha^2 \left(\Delta t\right)^2\right)$$



Como el coeficiente de expansión lineal α es "muy pequeño", $\alpha \sim 10^{-5}\left[1/°C\right]$, el término en α^2 puede "despreciarse" con respecto al término en α, aún para $\Delta t \sim 10^3\left[°C\right]$, $\alpha \Delta t \sim 10^{-2}$ y $\left(\alpha \Delta t\right)^2 \sim 10^{-4} \ll 10^{-2}$, podemos en consecuencia considerar como una buena aproximación:

$$A \simeq A_r \cdot \left(1 + \beta \Delta t\right)$$

donde hemos puesto $\beta = 2\alpha$. Llamamos a β, "coeficiente de expansión superficial".

Aunque, por motivos de simplicidad, hemos usado una superficie rectangular para obtener la expresión:

$$A_t \simeq A_r \cdot \left(1 + \beta \Delta t\right) \quad \text{con} \quad \Delta t = t - t_r$$

ella es válida para superficies de cualquier forma, por supuesto dentro de cierto rango de temperaturas y en las condiciones que las aproximaciones efectuadas sigan rigiendo.

Además, podemos escribir esta última expresión en las formas:

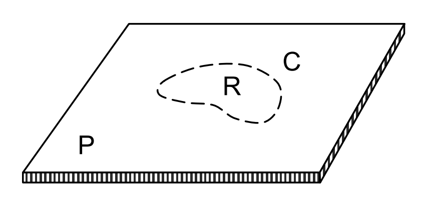
$$\Delta A = A_t - A_r = \beta A_r \cdot \Delta t$$

$$\frac{\Delta A}{A_r} = \beta \Delta t$$

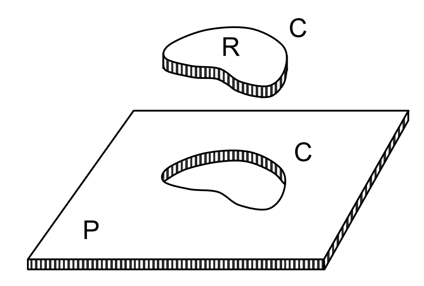
que nos dicen que el cambio de área ΔA, respecto al área A_r a la temperatura de referencia t_r, es proporcional al área de referencia A_r y al cambio de temperatura $\Delta t = t - t_r$. Siendo el factor de proporcionalidad β el "coeficiente de expansión superficial".

Consideremos el siguiente “experimento”:

En una placa homogénea P dibujamos un contorno C que determina la región R en la placa. Cuando la temperatura de la placa aumenta, se encuentra que el área de la placa aumenta y que el área de la región R también aumenta; donde los respectivos cambios de áreas son igualmente proporcionales a las áreas iniciales.



Separamos de la placa P la región R haciendo un “corte ideal” (no se pierde material) a lo largo del contorno C. Al aumentar uniformemente la temperatura de la placa agujereada y de la región R, se encuentra que la región R cabe exactamente en el hueco de la placa, cuando las temperaturas son iguales.



Por tanto, podemos decir que “los huecos en las placas se dilatan como si estuvieran constituidos del mismo material de la placa”.

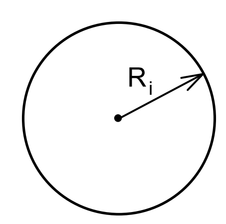
Ejemplos

- El radio de un círculo es R_i a la temperatura t_i y cambia en $\Delta R = \alpha R_i \Delta t$ al cambiar la temperatura en Δt, respecto a t_i. Considerando el área como función del radio, $A(R) = \pi R^2$, calcule el correspondiente cambio de área como función del cambio de temperatura.

Si $A = A(R)$, el cambio de área ΔA correspondiente a un cambio de radio ΔR está dado por:

$$\Delta A = A(R_i + \Delta R) - A(R_i)$$

Temperatura t_i



Entonces:

$$\begin{aligned}\Delta A &= \pi \cdot (R_i + \Delta R)^2 - \pi \cdot R_i^2 \\ &= \pi \cdot \left\{R_i^2 + 2R_i\,\Delta R + (\Delta R)^2\right\} - \pi R_i^2 \\ &= \pi \cdot \left\{2R_i \cdot \alpha R_i\,\Delta t + (\alpha \Delta R_i \Delta t)^2\right\} = \\ &= A_i \cdot \left\{2\alpha\Delta t + (\alpha\Delta t)^2\right\}\end{aligned}$$

Temperatura $t_i + \Delta t$

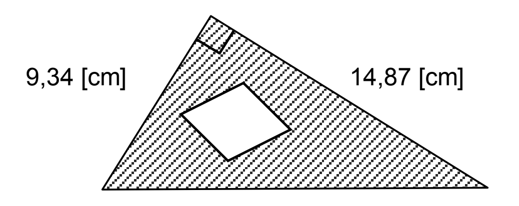
$R_i + \Delta t$

y manteniendo sólo el término de primer orden en $\alpha\Delta t$ resulta:

$$\Delta A \simeq 2\alpha A_i \Delta t$$

La expresión obtenida, $\Delta A = \beta A_i \Delta t$, concuerda con lo afirmado anteriormente de que en la dilatación de superficies el cambio de área es independiente de la forma.

- Una lámina de zinc tiene la forma mostrada en la figura adjunta. Los largos de los catetos corresponden a mediciones hechas a cierta temperatura. A esa misma temperatura el área del hueco es un 48% del área de la superficie del material. Calcule el "área del hueco" cuando la temperatura aumenta en 96 [°C].



A la temperatura inicial sean:

A_t : área del triángulo

A_m : área del material

A_h : área del hueco

Entonces:

$$A_t = A_m + A_h = A_m + \frac{48}{100} A_m = \frac{148}{100} A_m$$

por tanto:

$$A_h = \frac{48}{100} A_m = \frac{48}{100} \cdot \frac{100}{148} A_t =$$

$$= \frac{48}{148} \cdot \frac{9{,}34[\text{cm}] \cdot 14{,}87[\text{cm}]}{2} \simeq 22{,}5[\text{cm}^2]$$

Como el coeficiente de expansión superficial del zinc es $\beta = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-5} \left[1/°\text{C} \right]$, al aumentar la temperatura en $\Delta t = 96[°\text{C}]$ el área del hueco aumenta en:

$$\Delta A_h = \beta A_h \Delta t \simeq 5{,}0 \cdot 10^{-5} \cdot 22{,}5 \left[\text{cm}^2 \right] \cdot 96 \left[°\text{C} \right]$$
$$\simeq 0{,}11[\text{cm}^2]$$

Con lo cual el área del hueco aumenta aproximadamente desde 22,5 [cm^2] a 22,6 [cm^2] cuando la temperatura aumenta en 96 [°C].

Dilatación de volumen

Se ha establecido que una variación de temperatura produce un cambio de volumen en un sólido. Para encontrar una relación entre tal cambio de volumen y la variación de temperatura, podemos considerar el caso de un cubo de arista a_r, y volumen $V_r = a_r^3$, a la temperatura de referencia t_r.

Cuando la temperatura cambia en $\Delta t = t - t_r$ la arista cambia en $\Delta a = \alpha a_r \Delta t$, siendo α el coeficiente de expansión lineal del material de que está confeccionado el cubo. Entonces, el volumen del cubo a la temperatura t será:

$$V = a^3 = \left(a_r + \Delta a\right)^3 = \left\{a_r \cdot \left(1 + \alpha\Delta t\right)\right\}^3$$
$$= a_r^3 \cdot \left\{1 + 3\alpha\Delta t + 3\alpha^2\left(\Delta t\right)^2 + \alpha^3\left(\Delta t\right)^3\right\}$$

Despreciando los términos en α^2 y α^3 por ser muy pequeños en relación al término en α, podemos escribir aproximadamente:

$$V \simeq V_r \cdot \left(1 + \gamma\Delta t\right)$$

donde hemos puesto $\gamma = 3\alpha$, factor llamado "coeficiente de dilatación volumétrica".

Esta relación la consideramos aproximadamente válida para cualquier sólido, no importando cual sea su forma.

El cambio de volumen de **líquidos** también puede expresarse en primera aproximación por:

$$\Delta V = V - V_r = \gamma V_r \Delta t \quad \text{con} \quad \Delta t = t - t_r$$

donde el coeficiente de dilatación volumétrica γ debe ser determinado directamente para cada líquido; en general su valor depende del rango de temperaturas considerado.

Por ejemplo, indicamos como valores característicos:

$$\gamma_{mercurio} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$$
$$\gamma_{glicerina} = 4{,}8 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$$
$$\gamma_{bencina} = 9{,}6 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$$

En particular, para el agua podemos indicar un valor medio $\gamma = 2{,}1 \cdot 10^{-4}\left[1/°C\right]$ válido entre 20 [°C] y 80 [°C] . Para temperaturas entre 0 [°C] y 20 [°C] , recordando su comportamiento anómalo, la expresión $V = V_0 \cdot \left(1 + \gamma t\right)$ no tiene real validez; la variación del volumen con la temperatura quedaría mejor expresada por ecuaciones de las formas:

$$V = V_0 \cdot \left(a + bt + ct^2\right) \qquad \text{ó} \qquad V = V_0 \cdot \left(A + Bt + Ct^2 + Dt^3\right)$$

Variación de la densidad con la temperatura

Ya que el volumen de una muestra de cualquier substancia cambia con la temperatura, resulta que su densidad cambia con la temperatura:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{V_r \cdot \left(1+\gamma\,\Delta t\right)} = \frac{M/V_r}{1+\gamma\,\Delta t} = \frac{\rho_r}{1+\gamma\,\Delta t}$$

donde hemos considerado que la masa de la muestra permanece constante.

Si $\gamma\,\Delta t \ll 1$, puede usar la aproximación $\rho \simeq \rho_r \cdot \left(1-\gamma\,\Delta t\right)$

Ejemplos

- Un tambor cilíndrico de latón, de diámetro basal D_r y altura H_r a la temperatura t_r , está parcialmente lleno con aceite hasta una altura h_r . Designe por α_ℓ al coeficiente de dilatación lineal del latón y por γ_a al coeficiente de expansión cúbica del aceite. Determine la altura h que alcanza el aceite cuando la temperatura aumenta a t .

La altura que alcanza el aceite en el tambor cambia por dos motivos: la expansión del volumen de aceite y la expansión de la superficie basal del tambor.

t_r

H_r

h_r

D_r

A la temperatura t_r:

el área de la superficie basal del tambor es:

$$A_r = \frac{\pi}{4} \cdot D_r^2$$

el volumen de aceite es: $V_r = A_r \cdot h_r$

Cuando la temperatura es t :

la variación de temperatura es: $\Delta t = t - t_r$

el área basal es: $A = A_r \cdot \left(1+2\alpha_\ell \Delta t\right)$

el volumen del aceite es: $V = V_r \cdot \left(1+\gamma_a \Delta t\right)$

Por tanto, la nueva altura que alcanza el aceite es:

$$h = \frac{V}{A} = \frac{V_r \cdot \left(1+\gamma_a \Delta t\right)}{A_r \cdot \left(1+2\alpha_\ell \Delta t\right)}$$

$$h = \frac{1+\gamma_a \cdot (t - t_r)}{1 + 2\alpha_\ell \cdot (t - t_r)} h_r$$

$$h \simeq \left\{1 + \left(\gamma_a - 2\alpha_\ell\right)\Delta t\right\} h_r$$

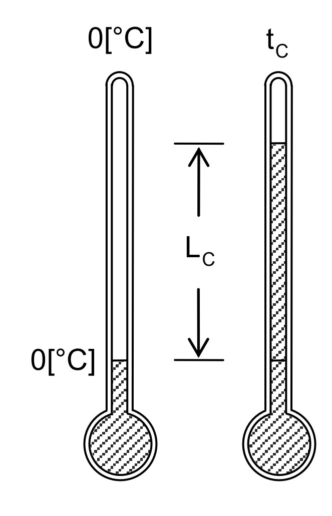
Este resultado es correcto siempre que el aceite no derrame por el borde del tambor, es decir, mientras sea $h < H$.

- Considere un termómetro construido de vidrio en la forma de un bulbo prolongado en un tubo capilar, parcialmente lleno de mercurio. Sean α_v el coeficiente de expansión lineal del vidrio y γ_m el coeficiente de expansión volumétrica del mercurio. ¿Cuál es el largo de la columna de mercurio en el capilar, referido al nivel del mercurio a 0 [°C] , cuando la temperatura es t_C ?

Sean a la temperatura de referencia 0 [°C] :

A_0: el área de la sección transversal del tubo capilar.

V_0 : la capacidad del bulbo y de la parte del capilar ocupado por el mercurio. V_0 es también el volumen del mercurio a 0 [°C].



Cuando la temperatura cambia de 0 [°C] a t_C, la capacidad V_0 cambia a:

$$V_B = V_0 \cdot (1 + 3\alpha_v t_c)$$

El volumen del mercurio a la temperatura t_C es:

$$V_M = V_0 \cdot (1 + \gamma_m t_c)$$

El volumen de mercurio que "avanza" por el tubo capilar es la diferencia de tales volúmenes:

$$V_C = V_M - V_B = V_0 \cdot (1 + \gamma_m t_C) - V_0 \cdot (1 + 3\alpha_v t_C)$$
$$= V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v) \cdot t_C$$

Este volumen debe ser igual al producto del largo L_C de la columna de mercurio en el capilar por el área de la sección transversal a la temperatura t_C, por lo tanto:

$$L_C \cdot A_0 \cdot (1 + 2\alpha_v t_C) = V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v) \cdot t_C$$

$$L_C = \frac{V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v) \cdot t_C}{A_0 \cdot (1 + 2\alpha_v t_C)}$$

Como $\alpha_v = 5{,}0 \cdot 10^{-6} \left[1/°C\right]$, aún si t_C fuera 200 [ºC] tendríamos $2\alpha_v t_C \simeq 0{,}002$ valor que podemos despreciar en la suma con **uno** y quedarnos con la aproximación:

$$L_C = \frac{V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v)}{A_0} \cdot t_C$$

Ya que $\eta = V_0 \cdot (\gamma_m - 3\alpha_v) / A_0$ es una constante para un termómetro dado, podemos escribir:

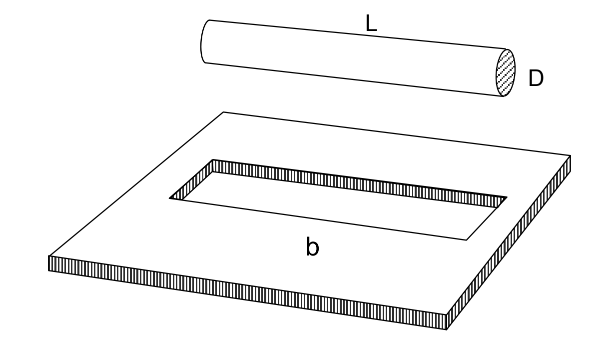
$$L_C \simeq \eta t_C$$

mostrando que el largo de la columna de mercurio es aproximadamente proporcional a la temperatura.

Ejercicios

8-45) En una placa de aluminio hay un agujero circular que tiene 3,27[cm] de diámetro a 0 [°F] . Calcule el diámetro del agujero cuando la temperatura de la placa sea 95 [°C] .

8-46) Considere una superficie con una ranura que a la temperatura de 18 [ºC] tiene largo b = 49,97 [cm] y ancho 3,00 [cm]. Una barra cilíndrica metálica a la temperatura de 18[ºC] mide L=50,00 [cm] de largo y D=2,00[cm] de diámetro. Si el coeficiente de expansión lineal del material de la barra es $\alpha = 2{,}7 \cdot 10^{-5} \left[1/C°\right]$, calcule la temperatura a la cual la barra pasa justamente, sin inclinarla, por la ranura.



8-47) Un cono recto de radio basal R y altura h es sometido a un cambio de temperatura Δt. El coeficiente de dilatación volumétrica del material del cono es γ. Determine, a partir de las variaciones de R y h, una expresión algebraica para la variación del volumen del cono.

8-48) El coeficiente de dilatación lineal de cierta aleación es α = 0,000054 [1/ºC]. Calcule su coeficiente de dilatación cúbica en [1/ºF].

8-49) Cuando la temperatura de una moneda aumenta en 86 [ºC] su diámetro aumenta en 0,17%. Efectuando operaciones con dos cifras significativas, calcule el coeficiente de dilatación lineal de la aleación de la moneda. Calcule el porcentaje de aumento del área de una cara, el porcentaje de aumento del espesor y el porcentaje de aumento del volumen de la moneda.

8-50) Un depósito de latón cuya capacidad es 1,50 [gal] se llena de glicerina a la temperatura de $54\left[°F\right]$. Determine aproximadamente la cantidad de glicerina que se derrama cuando la temperatura sube a $107\left[°F\right]$.

8-51) Un frasco de vidrio cuyo volumen es 1000 [cm^3] a 1,2 [ºC] se llena de mercurio a dicha temperatura. Cuando el frasco y el mercurio se calientan a 92,7 [ºC] se derraman 14,8 [cm^3] de mercurio. Determine el coeficiente de expansión lineal de este vidrio.

8-52) A la temperatura de 25 [ºC] el volumen de cierto matraz de vidrio hasta una señal de referencia que lleva en el cuello, es 100 [cm^3]. El matraz está lleno hasta dicha señal con un líquido, cuyo coeficiente de dilatación cúbica es $1{,}2\cdot 10^{-3}\left[1/°C\right]$, estando tanto el matraz como el líquido a 25 [ºC]. El coeficiente de dilatación lineal de ese vidrio es $5{,}8\cdot 10^{-5}\left[1/°C\right]$. La sección transversal del cuello es 13 [mm^2] y puede considerarse como constante. Calcule cuánto ascenderá o descenderá el líquido en el cuello cuando la temperatura se eleve hasta 48 [ºC].

CAPÍTULO IX

FUERZAS



La idea primera de fuerza está íntimamente ligada a la actividad muscular. Al empujar una carretilla, al arrastrar un mueble, al trepar un cerro, al levantar y sostener una piedra, al lanzar una pelota, al doblar un tubo, al estirar un elástico, nuestros músculos nos hacen saber que estamos ejerciendo una fuerza.

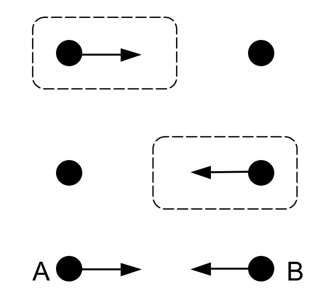
Las situaciones presentadas ilustran cambios del estado de movimiento y deformaciones de objetos. Podemos definir fuerza como la causa o agente físico que produce cambios del estado de movimiento (aceleraciones), deformaciones y equilibrios de objetos. Observe que estamos definiendo fuerza por los efectos que ella produce.

Hablamos de:

la fuerza que "**actúa** sobre un objeto" (la que produce efectos en él).

a fuerza "**ejercida** por un objeto sobre otro",

pero carece de sentido hablar de la fuerza que "**tiene** un objeto".



Las fuerzas son **interacciones** entre objetos y no son propiedades de los objetos en sí. En otras palabras, la fuerza no es una propiedad de los cuerpos como la masa o el volumen, sino más bien una "información" que recibe cada uno de los cuerpos de la presencia de los otros. Una interacción entre los objetos, significa que hay una fuerza actuando sobre cada uno de ellos, esto es, las fuerzas se presentan siempre en "parejas". Debido a esto, usaremos la siguiente notación para nominar las fuerzas de interacción entre dos cuerpos A y B.



en donde:

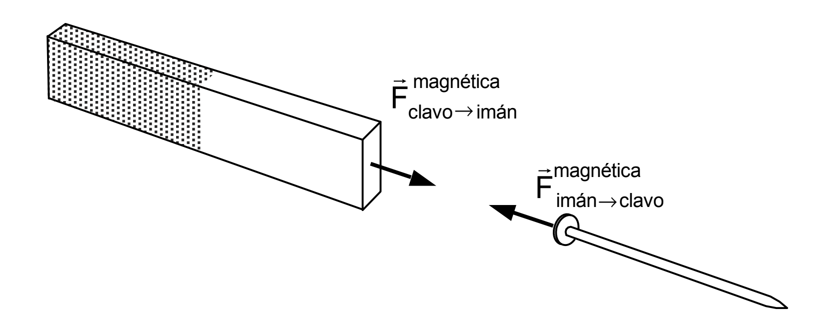
$\vec{F}_{B \to A}$: es la fuerza ejercida **por** el cuerpo B **sobre** el cuerpo A

$\vec{F}_{A \to B}$: es la fuerza ejercida **por** el cuerpo A **sobre** el cuerpo B.

En ocasiones, cuando sea conveniente, indicaremos además el **tipo de fuerza.**

Consideremos algunos ejemplos para ilustrar este punto.

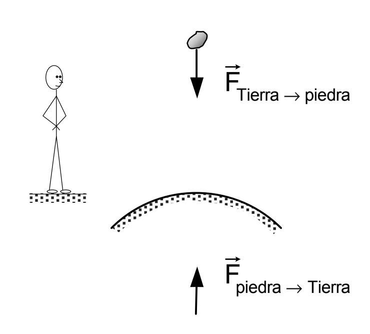
- Al acercar un imán a un clavo observamos que el clavo es atraído por el imán. Si mantenemos el imán en la vecindad de un riel, sentimos que el imán es atraído por el riel. En el primer caso podríamos decir que el imán ejerce una fuerza sobre el clavo y en el otro, que es el riel el que ejerce una fuerza sobre el imán. Lo que sucede en realidad es que cada objeto actúa sobre el otro en cada caso. Si mantenemos el imán en una mano y el clavo en la otra y los acercamos "sentimos" ambas fuerzas. En el caso imán-riel también existen las dos fuerzas, pero tenemos que buscar otros métodos para detectarlas.

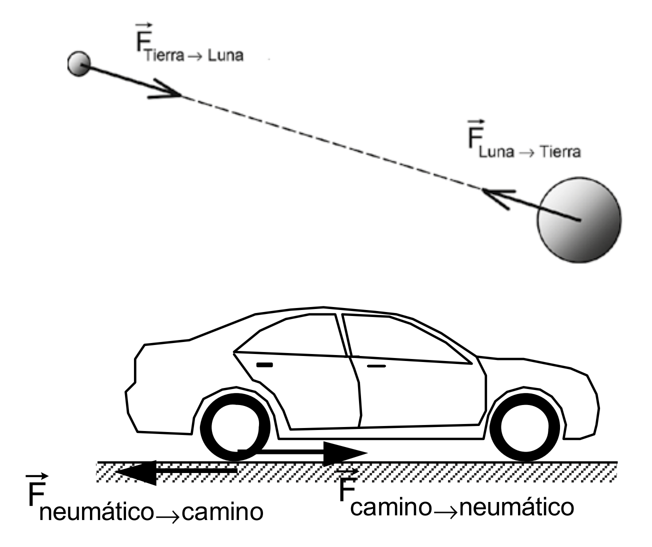


$\vec{F}^{\,mag}_{clavo \to imán}$: Es la fuerza magnética ejercida por el clavo sobre el imán

$\vec{F}^{\,mag}_{imán \to clavo}$: Es la fuerza magnética ejercida por el iman sobre el clavo

- Al soltar una piedra desde una altura cualquiera observamos que la piedra cae a la Tierra y decimos que la Tierra atrae a la piedra con cierta fuerza. Pero también la piedra atrae a la Tierra, lo que está de acuerdo con nuestro concepto de interacción. Aunque realmente la piedra y la Tierra se acercan una a otra, decimos que "la piedra cae sobre la Tierra" porque la aceleración que adquiere la Tierra es prácticamente cero.





- La Tierra atrae a la Luna y la mantiene girando en órbita alrededor suyo. A su vez, la Luna ejerce una fuerza sobre la Tierra; esta fuerza se hace notoria, por ejemplo, en el movimiento de las mareas.

- Aunque un automóvil tuviera un motor "muy poderoso" su desplazamiento no sería posible si no estuviera presente la fuerza de roce que el camino ejerce sobre los neumáticos del automóvil. También los neumáticos ejercen una fuerza sobre el camino.

Notemos que en algunos de estos ejemplos la interacción tiene lugar aún cuando los objetos estén separados, es decir, no tienen superficies en contacto directo. En tales casos, se suele hablar de *acción a distancia*.

La caída de una piedra, el movimiento de satélites y planetas y la agrupación de estrellas en galaxias son algunos casos de un mismo tipo de interacción, la **interacción gravitacional**.

Las fuerzas musculares, las ejercidas por resortes y elásticos, el roce y las interacciones intermoleculares e interatómicas son diversas formas en que se manifiesta la **interacción electromagnética**.

En las actividades de la vida diaria y en la práctica corriente de la ingeniería las interacciones gravitacionales y electromagnéticas son las que se presentan más frecuentemente. En Física todas las interacciones que permiten la descripción de los fenómenos pueden clasificarse en:

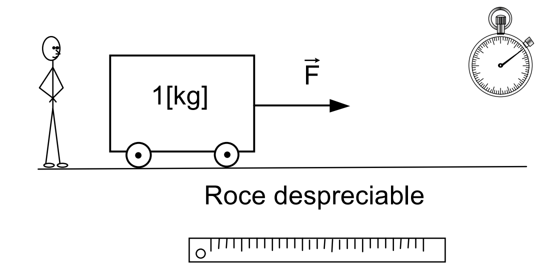
- Interacción gravitacional
- Interacción electromagnética
- Interacción fuerte (nuclear)
- Interacción débil (leptónica)

Los protones y neutrones permanecen juntos formando un núcleo atómico debido a la interacción nuclear. La interacción leptónica es responsable, en particular, de la desintegración radiactiva de un neutrón ($n \to p + e \ + \bar{\nu}$). Estos tipos de interacciones se presentan, también, entre otras partículas fundamentales.

Medición de una fuerza

Hemos definido fuerza por los efectos que ella produce; en particular, al aplicar una fuerza a un cuerpo, éste puede adquirir una aceleración. Esto nos da la posibilidad de elaborar un método para medir fuerzas y definir unidades de fuerza.

Apliquemos una fuerza a un cuerpo de 1[kg] de masa, de modo que éste adquiera una aceleración de 1[m/s^2]. A la magnitud de esta fuerza le asignamos el valor "un newton"; siendo "1" el número de medición y "newton" el nombre de la unidad correspondiente.

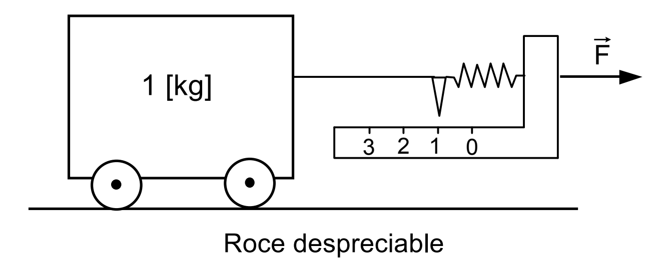


Unidad de fuerza: Un newton . . . . 1[N]

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{masa} & 1[\text{kg}] \\ \text{aceleración} & 1[\text{m/s}^2] \end{array} \right\} \quad \text{fuerza} \;\; 1[\text{N}]$$

El método anteriormente indicado implica medir aceleraciones para comparar fuerzas. Basado en él, explicaremos la graduación de un instrumento que nos permita medir directamente una fuerza. Recurriremos a otro efecto que puede producir una fuerza, una deformación. Como objeto deformable elegiremos un resorte, que tiene la propiedad de recuperar su forma inicial cuando la fuerza deje de actuar.

Cuando el cuerpo de masa 1[kg] adquiere la aceleración de 1[m/s^2] colocaremos una marca frente al indicador con la anotación 1[N], cuando la aceleración tenga el valor 2[m/s^2] colocaremos frente al indicador 2[N] y así sucesivamente. Cuando la rapidez del carrito sea constante colocaremos la marca 0[N] .

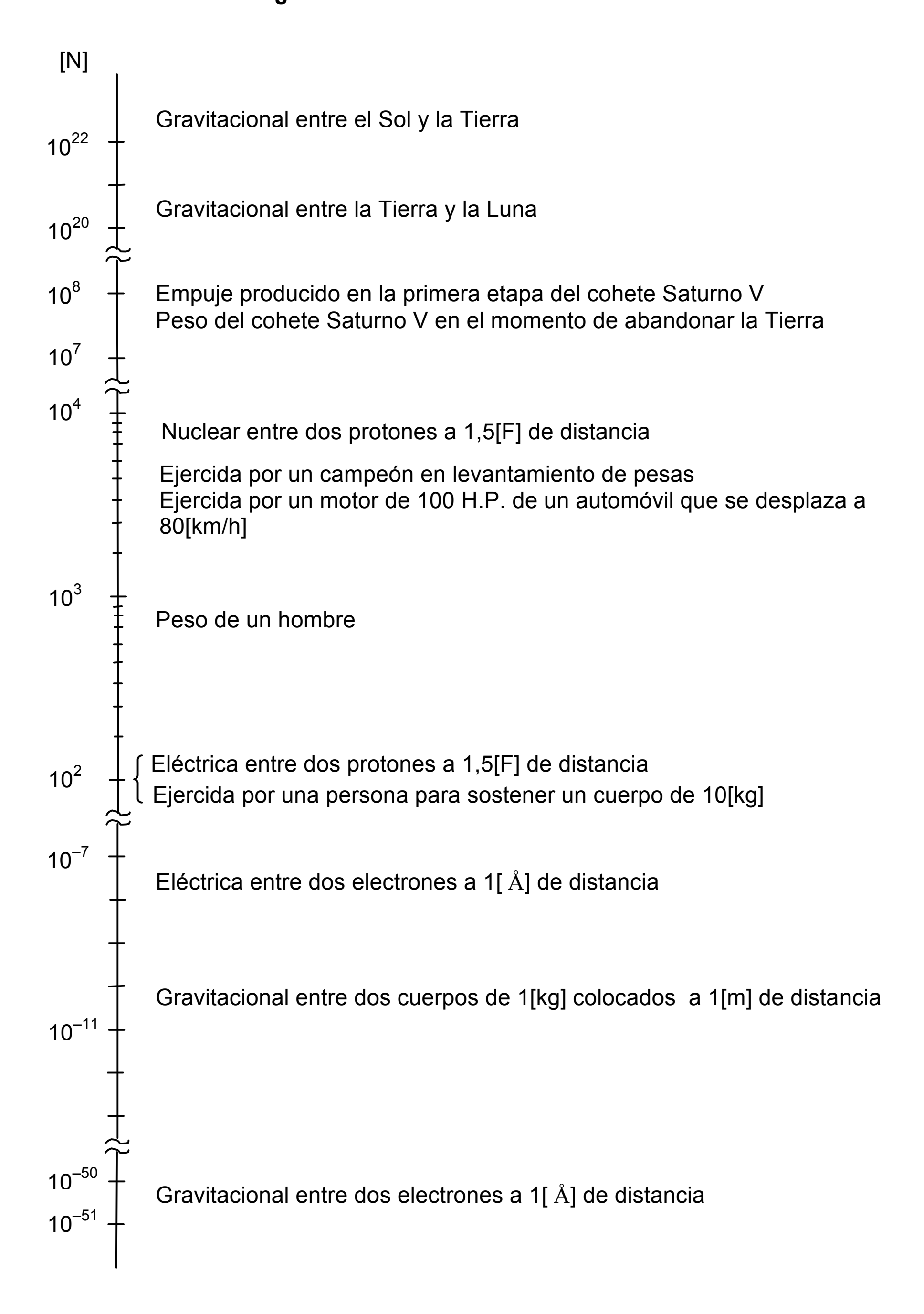


Un resorte calibrado de esta manera se llama *dinamómetro* o *balanza de Newton*.

Debemos aclarar que no todas las fuerzas pueden ser medidas por este procedimiento. Para lograr medir algunas interacciones se requiere de técnicas especiales muy refinadas.

Fuerza: órdenes de magnitud

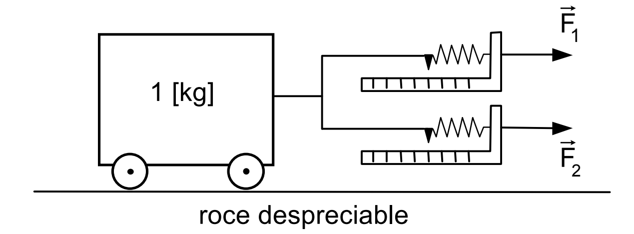
La determinación de los valores de las fuerzas, ya sea por mediciones o por cálculo, es en general un asunto de no fácil solución. Le presentamos a continuación una escala en que se indican valores estimados de magnitudes de fuerzas que intervienen en algunas circunstancias específicas.



Superposición de fuerzas

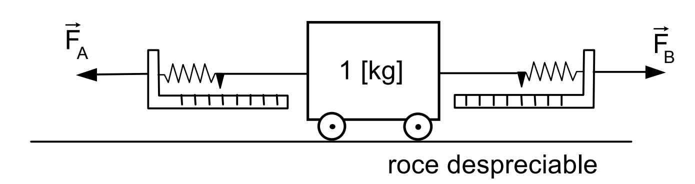
Hemos considerado el efecto de una fuerza sobre un carrito cuya masa es 1[kg]. Consideraremos ahora el efecto producido por más de una fuerza actuando sobre el mismo carrito.

- Aplicamos dos fuerzas sobre el carrito en la forma que se indica en la figura. Medimos las magnitudes de las fuerzas en las correspondientes "balanzas de Newton" y determinamos la aceleración del carrito usando regla y cronómetro.



- Cuando las *balanzas de Newton* indican cada una 1[N], la aceleración es 2[m/s^2]. Resultado igual al que se obtiene aplicando una sola fuerza de 2[N] de magnitud.
- Cuando las lecturas son 2[N] y 2[N] respectivamente, se obtiene la aceleración de 4[m/s^2] . Aceleración que corresponde a una "fuerza neta" de magnitud igual a 4[N] .

- Al hacer un experimento similar, pero aplicando las fuerzas como se muestra en la figura adjunta, observamos que:



- Si la lectura de A es 1[N] y la de B es 3[N] el carrito se mueve hacia la derecha con aceleración 2[m/s^2] , como si hubiera una sola fuerza de 2[N] aplicada hacia la derecha.
- Si la lectura de A es 5[N] y la de B es 2[N] , el carrito se mueve hacia la izquierda con aceleración 3[m/s^2] . La ``fuerza resultante'' es de 3[N] dirigida hacia la izquierda.
- Si las lecturas de A y B son **iguales**, la aceleración es **cero**. La fuerza neta es **cero**.

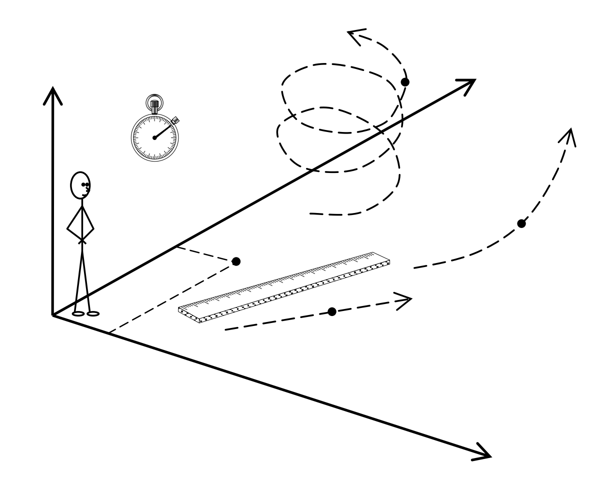
En los casos particulares estudiados vemos que las dos fuerzas consideradas actuaban sobre el carrito produciendo un efecto equivalente al de una sola fuerza, a la que llamamos fuerza neta o fuerza resultante.

Más adelante, estudiando casos generales del movimiento de traslación de un cuerpo, veremos que el efecto de varias fuerzas actuando sobre el cuerpo será equivalente al efecto de una única fuerza neta o resultante.

Leyes del movimiento

Al estar usted situado en cierto lugar, podrá determinar si un objeto está en reposo o en movimiento respecto a su ubicación. En un caso como éste, usted cumple con las condiciones mínimas para ser un "observador en un sistema de referencia".

Si este observador tiene una regla y un cronómetro puede medir cambios de posición de un objeto en el transcurso del tiempo y determinar velocidades y aceleraciones, y verificar si el movimiento es rectilíneo con rapidez constante o rectilíneo acelerado o si el objeto describe una trayectoria curvilínea con rapidez constante o variable.



Pero un observador premunido sólo de regla y cronómetro no podrá indicar a qué se deben los diferentes tipos de movimiento que pueda tener un objeto y, por tanto, no puede predecir ni reproducir movimientos.

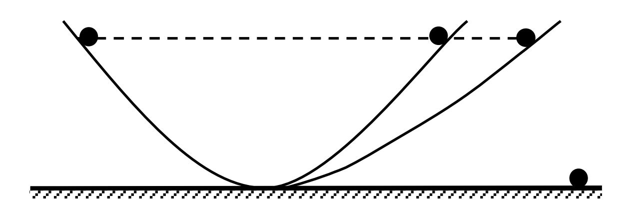
El enunciado de las leyes que nos permiten describir y predecir el movimiento de los objetos macroscópicos aparecen en el Libro I de la obra fundamental de Newton ***Philosophiae Naturalis Principia Mathematica***, publicado en 1687. Esta obra, considerada el primer tratado sistemático de Física Teórica, marca un momento dramático en la historia de las ciencias naturales. Antes de Newton, el movimiento de los planetas era un misterio, su obra contribuyó a resolverlo. A partir de Newton, la Física ha avanzado segura y rápidamente.

Primer principio de Newton. Principio de Inercia

Todo cuerpo sigue en estado de reposo o de movimiento uniforme en línea recta a menos que sea obligado a cambiar ese estado por obra de fuerzas a él aplicadas.

Aunque Newton fue el primero en expresar esta ley en términos generales, ella fue anticipada por Galileo. Basándose en sus observaciones del movimiento de la lentejuela de un péndulo, Galileo razonó de la siguiente forma:

Si un cuerpo cae libremente por un plano inclinado, subirá por el plano inclinado adyacente alcanzando la misma altura de partida, suponiendo ambos planos sin fricción. La altura alcanzada será independiente del camino recorrido al ir cambiando el plano de subida.



Cuando este plano coincida con la horizontal el cuerpo nunca podrá alcanzar su altura primitiva, y por tanto, concluyó Galileo, se moverá indefinidamente con rapidez constante.

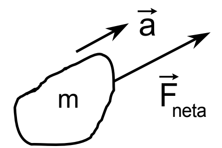
Segundo principio de Newton

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz aplicada y tiene la dirección de la recta según la cual esa fuerza se aplica.

Este enunciado es la traducción literal del original, escrito por Newton en latín. Una manera de expresar matemáticamente este principio es:

$$\vec{F}_{neta} = m\,\vec{a}$$

Implicando que $F_{neta} = m\,a$, donde:



F_{neta} la magnitud de la fuerza neta actuando sobre un cuerpo.

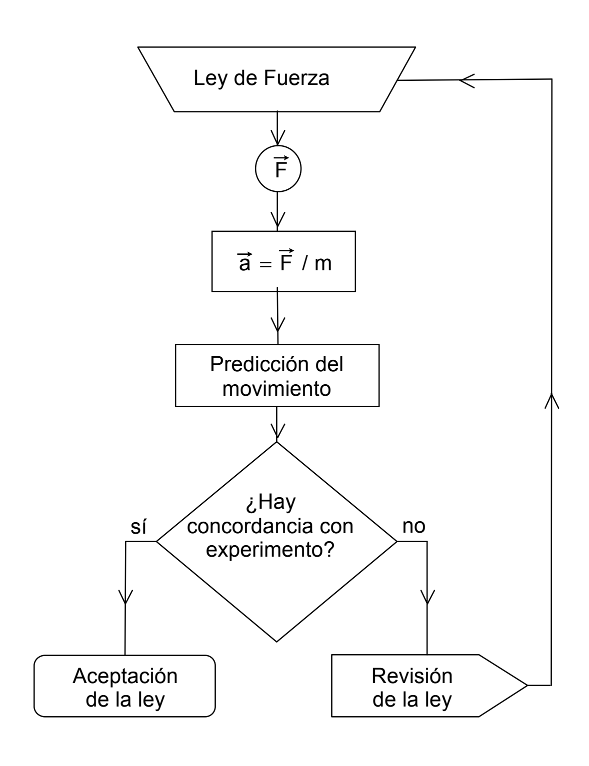
m la masa del cuerpo.

a la magnitud de la aceleración adquirida por el cuerpo en la dirección de la fuerza neta.

Las expresiones para la fuerza $\vec{F}$ deben ser "inventadas" para cada clase de agente que produce interacciones. Las expresiones obtenidas se suelen llamar *leyes de fuerza*, de las cuales estudiaremos algunas más adelante cuando tratemos de interacción gravitacional, eléctrica u otras.

Para verificar la validez de una determinada "ley de fuerza", debemos comparar las predicciones sobre el movimiento de un cuerpo al usar esa ley en conjunto con $\vec{F}_{neta} = m\,\vec{a}$, con los valores obtenidos experimentalmente.

La concordancia de las predicciones con la experimentación producirá la aceptación de la ley de fuerza propuesta, dentro de los límites condicionados por la experimentación.



La *dimensión de fuerza* en términos de las dimensiones de masa, longitud y tiempo queda determinada por:

$$\dim(\text{fuerza}) = \dim(\text{masa} \cdot \text{aceleración})$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{MLT}^{-2}$$

Hemos definido que el valor de una fuerza es 1[N] cuando imprime la aceleración de 1[m/s^2] a un cuerpo de 1[kg] de masa, entonces:

$$F = 1[N] = m \cdot a = 1[kg] \cdot 1[m/s^2] \ \hat{=}\ 1[kg \cdot m/s^2]$$

por tanto: 1[N] $\hat{=}$ 1[kg · m/s^2]

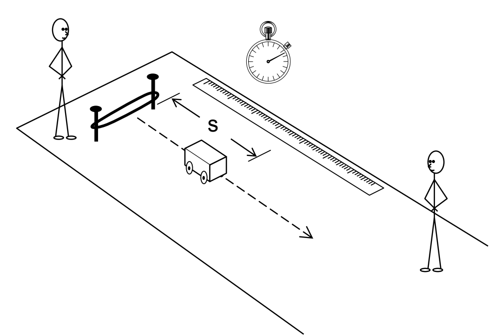
Si un cuerpo tiene la masa de 1[g] y adquiere la aceleración de 1[cm/s^2] tendremos:

$$F = m \cdot a = 1[g] \cdot 1[cm/s^2] \;\hat{=}\; 10^{-3}[kg] \cdot 10^{-2}[m/s^2] = 10^{-5}[N]$$

e introduciendo la unidad: $1[dina] \;\hat{=}\; 1[g \cdot cm/s^2]$ resultа:

$$1[dina] \;\hat{=}\; 10^{-5}[N]$$

Dado que la segunda ley de Newton es una de las más importantes y útiles en Física, nos parece conveniente describirle un experimento fácilmente realizable y que le permita captar el comportamiento interrelacionado entre fuerza, masa y aceleración.



Fijemos en el suelo dos clavos a distancia conveniente para mantener tenso un elástico.

Con un carrito presionamos el elástico. Cuando soltamos el carrito, el elástico ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre el carrito durante un "pequeño" intervalo de tiempo Δt.

Considerando que la fuerza neta aplicada al carrito tiene dirección constante y magnitud variable en el tiempo, la aceleración media $\bar{a}$ del carrito durante el pequeño intervalo de tiempo Δt queda determinada por el "valor medio" de la magnitud de la fuerza durante ese intervalo Δt.

Además, como el carrito parte del reposo $\left(v_i = 0 \right)$, al final del intervalo Δt, en el instante en que pierde contacto con el elástico, ha adquirido una rapidez v dada por:

$$v = \bar{a} \cdot \Delta t$$

Si suponemos que el movimiento continúa con tal rapidez v durante cierto tiempo t_f, en el cual la influencia del roce no sea significativa, el camino s recorrido por el carrito en el tiempo t_f es:

$$s \simeq v \cdot t_f$$

Entonces:

$$\bar{a} = \frac{v}{\Delta t} \simeq \frac{s}{\Delta t \cdot t_f}$$

Esta expresión aproximada nos permite **comparar** aceleraciones al efectuar mediciones de la distancia s recorrida por el carrito en un tiempo t_f fijo, por ejemplo de 1[s].

La primera parte del experimento consiste en ir variando la masa del carrito, cuidando que las deformaciones del elástico sean las mismas, con lo que se logra que el valor medio de la fuerza aplicada al carrito sea constante para diferentes valores de masa.

La experiencia nos dice que al aumentar la masa, el intervalo de tiempo Δt que el elástico permanece en contacto con el carrito aumenta. Este efecto lo podemos representar aproximadamente haciendo Δt proporcional a la raíz de la masa: $\Delta t \propto \sqrt{m}$. Con lo cual, la relación entre la distancia s recorrida por el carrito en un tiempo fijo t_f y la aceleración media $\bar{a}$ puede ser escrita:

$$a \simeq \gamma \frac{s}{\sqrt{m}} \quad , \quad \text{siendo } \gamma \text{ la constante de proporcionalidad.}$$

Si m_1 , s_1 y a_1 son los valores de la primera medición, comparamos masas y aceleraciones de las otras mediciones mediante los cuocientes:

$$\frac{m}{m_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{a}{a_1} = \frac{s}{s_1} \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m}}$$

Obtuvimos los siguientes resultados:

m [kg]	s [m]	$\frac{m}{m_1}$	$\frac{a}{a_1}$	$\frac{m}{m_1} \cdot \frac{a}{a_1}$
0,97	2,01	1,00	1,00	1,00
2,01	1,42	2,07	0,49	1,01
3,16	1,13	3,26	0,31	1,03
5,20	0,91	5,36	0,19	1,02

Ellos nos muestran que para una fuerza constante la aceleración es inversamente proporcional a la masa, cumpliéndose para las magnitudes que:

$$F = \text{constante} \quad \rightarrow \quad a \propto 1/m$$

En la segunda parte del experimento variamos el número de elásticos colocando uno, dos o más elásticos iguales, y dejamos la masa del carrito constante. Cada vez que impulsemos el carrito con cada grupo de elásticos, cuidaremos que éstos tengan igual deformación. Efectuando las mediciones en forma análoga a lo hecho en la primera parte, y considerando que en esta situación el intervalo de tiempo Δt que los elásticos están en contacto con el carrito depende del número n de elásticos según la expresión aproximada $\Delta t \propto 1/\sqrt{n}$, establecemos la relación:

$$\frac{a}{a_1} \simeq \frac{s}{s_1}\sqrt{n}$$

Obtuvimos los siguientes resultados:

n	s [m]	a/a_1	a
1	1,28	1,00	$1 \cdot 1{,}00 \cdot a_1$
2	1,72	1,90	$2 \cdot 0{,}95 \cdot a_1$
3	2,18	2,94	$3 \cdot 0{,}98 \cdot a_1$
4	2,44	3,82	$4 \cdot 0{,}96 \cdot a_1$

lo que nos permite concluir que la aceleración es proporcional a la fuerza cuando la masa es constante:

$$m = \text{constante} \quad \rightarrow \quad a \propto F$$

Así, con un experimento simple podemos apreciar los valores de la aceleración que adquiere un cuerpo de acuerdo a la relación $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Naturalmente, en un experimento de esta clase se introducen errores causados especialmente por el roce y el comportamiento de los elásticos.

¡Le recomendamos "fuertemente" que usted haga este experimento!

Tercer principio de Newton. Principio de Acción Reacción

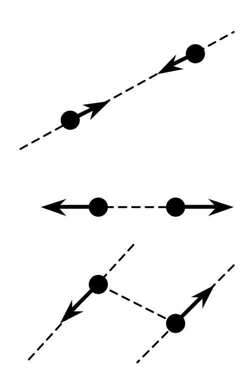
Para cada acción existe siempre opuesta una reacción contraria o las acciones mutuas de dos cuerpos de uno sobre el otro son siempre iguales y dirigidas a partes contrarias.

Esta es una traducción literal de lo escrito por Newton. En el enunciado de Newton *acción* y *reacción* son las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos debido a la interacción entre ellos. La acción no es una causa de la reacción, sino que ambas coexisten y, por eso, cualquiera de estas fuerzas puede ser designada por acción o por reacción.

Aunque acción y reacción son fuerzas de igual magnitud y dirección contraria, no se anulan porque actúan en distintos cuerpos.

El hecho que acción y reacción tengan direcciones contrarias no implica que necesariamente estén sobre una misma recta.

En la figura se ilustra el caso más común en que acción y reacción están en una misma recta y el caso menos frecuente en que acción y reacción no lo están.

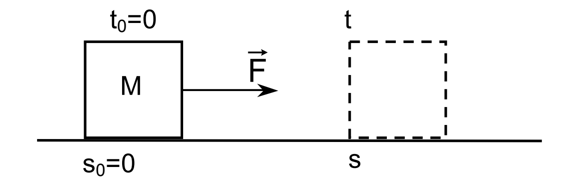


Al hablar del "movimiento de un cuerpo" nos referimos a su cambio de posición respecto a un "observador en cierto sistema de referencia". El movimiento de un mismo cuerpo es en general descrito en forma diferente por diferentes observadores; por ejemplo, para un determinado observador cierto cuerpo describe una trayectoria rectilínea con rapidez constante y para otro observador el movimiento resulta curvilíneo. Las leyes del movimiento establecidas por Newton requieren de un sistema de referencia "fijo", ideal, o de uno que se mueva con velocidad constante respecto a él; tales sistemas de referencia se denominan *sistemas inerciales*.

A partir de los primeros años del siglo XX se hizo sentir la necesidad de una revisión de los conceptos fundamentales de espacio y tiempo desde el punto de vista de sus mediciones. Ello condujo al establecimiento de la "teoría restringida de la relatividad"; teoría que contiene a la física newtoniana como una buena aproximación válida para los casos en que los cuerpos tienen rapideces muy pequeñas respecto a la rapidez de propagación de la luz en el vacío. Posteriormente se desarrolló la "teoría general de la relatividad". También desde el nacimiento de este siglo se fue encontrando que la física basada en los principios de Newton resultaba inadecuada en el ámbito de los fenómenos moleculares, atómicos, nucleares y subnucleares; esto ha originado el establecimiento de la Física Cuántica.

Ejemplos

- A un cuerpo de $5{,}80[kg]$ de masa que está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal lisa, se aplica una fuerza neta constante, de $12{,}7[N]$ de magnitud, durante $10{,}2[s]$. Calcule la distancia recorrida por el cuerpo hasta el instante en que deja de actuar la fuerza y hasta $2{,}2[s]$ después.



Llamando $t = 0$ al instante en que aplicamos la fuerza, tenemos las condiciones iniciales:

$s_0 = 0$, por elección del punto de referencia.

$v_0 = 0$, por estar el cuerpo inicialmente en reposo.

Como la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo es constante, y la masa del cuerpo es también constante, la aceleración del cuerpo será constante, siendo su valor:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{12{,}7[N]}{5{,}80[kg]} \simeq 2{,}19\,[m/s^2]$$

Entonces, para un instante t en el intervalo que actúa la fuerza; esto es

$$0 \le t \le t_F = 10{,}2[s],$$

tenemos:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v}{t}$$

esto da para la rapidez en el instante t:

$$v = a \cdot t \quad , \quad 0 \le t \le t_F$$

La distancia recorrida por el cuerpo hasta ese instante t, la obtenemos según:

$$\Delta s = s - s_0 = v_{promedio}\ \Delta t = \frac{v + v_0}{2} \cdot \left(t - t_0\right)$$
$$= s - 0 = \frac{v}{2} \cdot t = \frac{a \cdot t}{2} \cdot t = \frac{a}{2} \cdot t^2$$

por tanto:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2 \qquad , \qquad 0 \leq t \leq t_F$$

Para el instante $t = t_F = 10{,}2\,[s]$, en que deja de actuar la fuerza, obtenemos:

$$v_F = a \cdot t_F = 2{,}19[m/s^2] \cdot 10{,}2[s] \simeq 22{,}3\,[m/s]$$

$$s_F = \frac{a}{2} \cdot t_F^2 = \frac{2{,}19[m/s^2]}{2}\left(10{,}2[s]\right)^2 \simeq 114\,[m]$$

Si a partir del instante t_F consideramos que el roce es despreciable, fuerza neta igual **cero**, el cuerpo continuará moviéndose con rapidez constante:

$$v = v_F \qquad , \qquad t > t_F$$

y se encontrará a una distancia s, desde el punto de partida, dada por:

$$\Delta s = s - s_F = v \cdot \Delta t = v_F \cdot \left(t - t_F\right)$$
$$s = s_F + v_F \cdot \left(t - t_F\right) \ , \ t > t_F$$

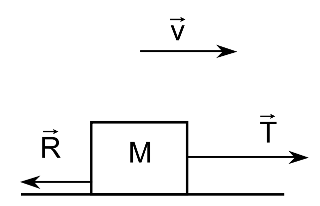
En particular, para el instante $t = 12{,}4$ [s] tendremos:

$$v = v_F = 22{,}3\,[m/s]$$
$$s = 114\,[m] + 22{,}3\,[m] \cdot \left(12{,}4 - 10{,}2\right)[s] \simeq 163\,[m]$$

Las relaciones encontradas $v = v_F$ y $s = s_F + v_F \cdot \left(t - t_F\right)$ para $t > t_F$, seguirán siendo válidas mientras no se modifiquen las condiciones en que se realiza el movimiento del cuerpo; por ejemplo, mientras no cambien las características de la superficie sobre la cual se apoya el cuerpo (deje de ser lisa y horizontal) o bien, se encuentren obstáculos o se termine la superficie.

- Un bloque cuya masa es 12,0[kg] reposa sobre una mesa horizontal. En cierto instante se le aplica una fuerza $\vec{T}$ horizontal y constante, debido a la cual adquiere una rapidez de 6,5[m/s] en 2,8[s]. Suponiendo que la fuerza de roce $\vec{R}$ entre el bloque en movimiento y la mesa es constante y de magnitud igual a 8,3[N] ¿cuál es la valor de la fuerza $\vec{T}$?

El enunciado previo nos permite dibujar la siguiente figura de análisis:



La aceleración del bloque es:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{(6{,}5 - 0)[m/s]}{(2{,}8 - 0)[s]} \simeq 2{,}3[m/s^2]$$

La magnitud de la fuerza neta actuando sobre el bloque tiene el valor:

$$F_{neta} = m \cdot a = 12{,}0[kg] \cdot 2{,}3[m/s^2] = 27{,}6[N]$$

Como la fuerza de roce se opone al movimiento del cuerpo, resulta que para las magnitudes de las fuerzas se cumple:

$$F_{neta} = T - R$$

y por lo tanto:

$$T = F_{neta} + R = 27{,}6[N] + 8{,}3[N] \simeq 36[N]$$

- La rapidez w de propagación de cierto tipo de ondas en un lago en determinadas condiciones, se expresa por la fórmula:

$$w^2 = \frac{g}{k} + \frac{T \cdot k}{\rho}$$

donde g es la aceleración de gravedad, ρ es la densidad del agua y k y T son ciertas cantidades físicas. Determine las dimensiones de k y de T en término de las dimensiones de tiempo, longitud y masa.

Para que la fórmula dada sea válida en Física, debe ser dimensionalmente consistente; esto es, cada uno de sus términos debe tener la misma dimensión, por lo tanto:

$$\dim(w^2) = \dim\left(\frac{g}{k}\right) = \dim\left(\frac{T\,k}{\rho}\right)$$

Como $\dim\left(\frac{g}{k}\right) = \frac{\dim(g)}{\dim(k)} = \dim(w^2)$ resulta:

$$\dim(k) = \frac{\dim(g)}{\dim(w^2)} = \frac{\mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-2}}{(\mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-1})^2} = \mathcal{L}^{-1}$$

En forma análoga, $\dim\left(\dfrac{T\,k}{\rho}\right) = \dfrac{\dim(T)\ \dim(k)}{\dim(\rho)} = \dim(w^2)$, por lo cual:

$$\dim(T) = \frac{\dim(w^2)\cdot\dim(\rho)}{\dim(k)} = \frac{(\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1})^2\cdot\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}}{\mathcal{L}^{-1}} = \mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$$

Esto es, $\dim(k) = \mathcal{L}^{-1}$ y $\dim(T) = \mathcal{M}\mathcal{T}^{-2}$.

- Una barra metálica tiene una densidad $\rho = 8{,}1\,[\text{kg/dm}^3]$ y una propiedad física caracterizada por $Y = 1{,}9\cdot 10^{12}\,[\text{dina/cm}^2]$. Para la descripción de cierto fenómeno que se produce en tal barra se necesita la expresión $U = \sqrt{Y/\rho}$. Determine la dimensión y el valor de U.

Observando las unidades de medición en que está expresada la cantidad Y , debe cumplirse:

$$\dim(Y) = \dim(\text{fuerza}/\text{área}) = \mathcal{F}/\mathcal{L}^2 = \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}/\mathcal{L}^2 = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}$$

Como la dimensión de densidad es $\dim(\rho) = \mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}$, resulta:

$$\dim(U) = \dim\left(\sqrt{Y/\rho}\right) = \left(\frac{\dim(Y)}{\dim(\rho)}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{-2}}{\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}}\right)^{1/2} = \mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$$

Esto es, U tiene la dimensión de rapidez.

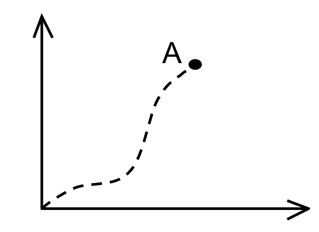
El valor de U se obtiene por:

$$U = \sqrt{Y/\rho} = \sqrt{\frac{1{,}9\cdot 10^{12}\left[\text{dina / cm}^2\right]}{8{,}1\left[\text{kg / dm}^3\right]}} \triangleq \sqrt{\frac{1{,}9\cdot 10^{12}\cdot 10^{-5}/10^{-4}\left[\text{N / m}^2\right]}{8{,}1/10^{-3}\left[\text{kg / m}^3\right]}}$$

$$\triangleq \sqrt{\frac{1{,}9\cdot 10^{11}\left[\text{kg}\cdot\text{m / s}^2\cdot\text{m}^2\right]}{8{,}1\cdot 10^{3}\left[\text{kg / m}^3\right]}} \triangleq \sqrt{\frac{1{,}9\cdot 10^{8}}{8{,}1}}\left[\text{m / s}\right] \simeq 4{,}8\cdot 10^{3}\left[\text{m / s}\right]$$

Ejercicios

9-1) Suponga que un cuerpo está describiendo una trayectoria y que en el punto A dejan de actuar todas las fuerzas sobre él. Describa cuál sería el movimiento subsiguiente del cuerpo. Justifique su respuesta.



9-2) Determine la masa, en [kg], de un objeto que adquiere una aceleración de magnitud $a = 30,0\left[\text{km/h}\cdot\text{s}\right]$ cuando actúa sobre él una fuerza neta de magnitud $F = 1,8\cdot 10^2\left[\text{N}\right]$.

9-3) ¿Qué fuerza, en [N], se requiere para dar a una masa de 2,6[kg] una aceleración de 250[cm/s^2]?

9-4) ¿Qué cambio de rapidez producirá una fuerza neta constante de 5,7[N] cuando se aplica a un objeto de 4,8[kg] durante 8,1[s]?

9-5) ¿Durante cuánto tiempo deberá actuar una fuerza neta de 96[N] sobre un cuerpo de 50,2[kg] para producir en él un cambio de rapidez de 108[cm/s] a 550[cm/s] si el cuerpo se mueve rectilíneamente?

9-6) Una partícula de masa 7,2[kg] avanza en línea recta y recorre una distancia de 4,9[m]. Parte con rapidez inicial cero y termina con una rapidez de 81[cm/s]. Calcule la fuerza neta sobre la partícula si la aceleración se supone constante.

9-7) Determine el tiempo que debe actuar una fuerza constante de 450,0[N] sobre un cuerpo de 907,0[kg] para que alcance una rapidez de 26,5[m/s], si éste parte del reposo.

9-8) Un cuerpo de masa desconocida es acelerado de 21,2[m/s] a 31,5[m/s] en 13[s] por una fuerza resultante de 5,4[N]. Calcule la masa.

9-9) Una fuerza de 15,0[N] produce al actuar sobre un objeto de masa M_1 una aceleración de 12,0[m/s^2] y sobre otro de masa M_2 una aceleración de 25,2[m/s^2]. Determine la aceleración que produciría esa misma fuerza si los dos objetos estuvieran unidos.

9-10) En un experimento se acelera un objeto con una fuerza constante de tal modo que la variación de rapidez durante un intervalo de tiempo de 1,5[s] es de 3,6[m/s]. En una segunda medición, aplicando una fuerza de igual magnitud sobre otro objeto, resulta la variación de rapidez de 3,3[m/s] en 0,50[s]. Calcule el cuociente entre las masas de esos objetos.

9-11) La masa en reposo de un electrón es $m_e \simeq 9,1 \cdot 10^{-31}$[kg]. Calcule la fuerza necesaria para acelerar un electrón en $2,0 \cdot 10^{14}$[m/s^2], suponiendo que su masa no varía.

9-12) Un objeto cuya masa es 50[g] está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal muy lisa. Se le aplica una fuerza constante y se mide que el objeto tiene una rapidez de 40[cm/s] cuando se encuentra a 25[cm] de su posición en reposo. Determine la magnitud de dicha fuerza, en [N].

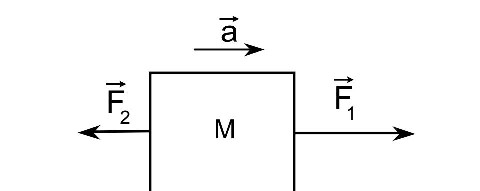
9-13) Un disco de hielo seco tiene una masa de 200[g] y se mueve sobre una lámina de metal con una rapidez constante de 50[cm/s]. Al salir de la superficie metálica entra en una superficie de concreto. La fuerza de fricción ejercida sobre el disco por esta superficie de concreto es de 15[dina]. ¿En cuántos segundos se detendrá el disco?

9-14) Cuando un tren de 150[ton] se desplazaba con una rapidez de 72,0[km/h] se aplicaron los frenos y el tren empleó 70[s] en detenerse. Calcule la fuerza, en [N], que ejercen los rieles sobre las ruedas del tren suponiendo que dicha fuerza hubiese sido constante. Determine la distancia recorrida por el tren desde que se aplicaron los frenos hasta que se detuvo.

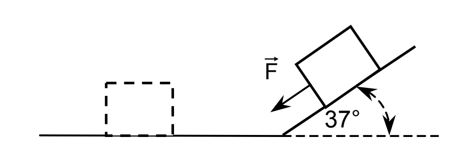
9-15) Un cuerpo de masa 0,60[kg] se encuentra en reposo en una esquina de una mesa cuadrada de 1,2[m] de lado. Aplicando una fuerza de dirección apropiada se hace mover al cuerpo a lo largo de la diagonal de la mesa. Si la magnitud de la fuerza es constante e igual a $4{,}0 \cdot 10^4$[dina] y se desprecia el roce ¿cuánto tarda el cuerpo en caer de la mesa?

9-16) Sobre un cuerpo de masa 0,43[kg] actúan las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de modo que adquiere una aceleración de 2,21[m/s^2].

¿Cuál es la magnitud de $\vec{F}_1$ si la magnitud de $\vec{F}_2$ es 0,82[N]?



9-17) Un cuerpo, de masa 1,3[kg], que se desliza con rapidez constante de 5,3[m/s] sobre un plano horizontal, sube por un plano inclinado. Desde el momento en que el cuerpo entra al plano inclinado actúa sobre él una fuerza neta $\vec{F}$ constante, de magnitud F = 4,2[N] y dirección según la figura. Calcule la altura máxima a la cual llega el cuerpo.



9-18) Una cápsula Géminis fue acoplada a la etapa final de un cohete Agena que orbitaba alrededor de la Tierra. Los impulsores de la Géminis aplicaron al conjunto una fuerza media de 890[N] de magnitud durante 7,0[s] . El cambio de rapidez producido fue de 0,93[m/s] . La masa del Géminis era de 3360[kg]. Calcule la masa de esta etapa del Agena.

9-19) Una fuerza constante de magnitud F = 19,6[N], hace que un cuerpo se mueva rectilíneamente de modo que la distancia recorrida por él está expresada por $s = A - Bt + Ct^2$, en función del tiempo. Hallar la masa del cuerpo si la constante C vale 3,1[m/s^2].

9-20) Un cuerpo cuya masa es 0,50[kg] se mueve rectilíneamente de manera que la relación entre la posición s y el tiempo empleado t viene dado por la ecuación: $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, siendo A =18,0[m]; B =2,1[m/s]; C= 4,5[m/s^2] y D=0,49[m/s^3] . Calcule la posición, la rapidez, la aceleración y la magnitud de la fuerza que actúa sobre el cuerpo en el instante *t* = 1,3[s].

9-21) La rapidez v con que avanza el agua en cierto tipo de ríos puede ser calculada por la fórmula $v = \left(\dfrac{U \cdot J}{\alpha + \beta / U} \right)^{1/2}$, en que U tiene dimensión de longitud y J es un número puro. Determine $\dim(\alpha)$ y $\dim(\beta)$. Al usar el sistema métrico se ha encontrado que los "números de medición" de α y β son

$\alpha_m = 2{,}8 \cdot 10^{-4}$ y $\beta_m = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$ respectivamente, y resulta $v = v_m [m/s]$. Calcule los valores de α y β en el "sistema inglés" para que resulte la rapidez en $[ft/s]$.

9-22) Por un tubo de diámetro D fluye con rapidez v un líquido de densidad ρ. El líquido tiene la propiedad llamada "coeficiente de viscosidad" η que se expresa en las unidades $\left[N \cdot s/m^2\right]$. Se ha encontrado conveniente definir la cantidad $R = \rho D v/\eta$. Determine la dimensión de η y de R.

9-23) Sobre una gota de agua de radio R que cae con rapidez v, el aire opone una fuerza de magnitud B que puede expresarse por $B = k\,\upsilon^a v^b R^c$. Si $\dim(k) = 1$ y $\dim(\upsilon) = \mathcal{T}^{-1}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{M}$, determine los valores de los números a , b y c tales que la expresión para B sea dimensionalmente correcta.

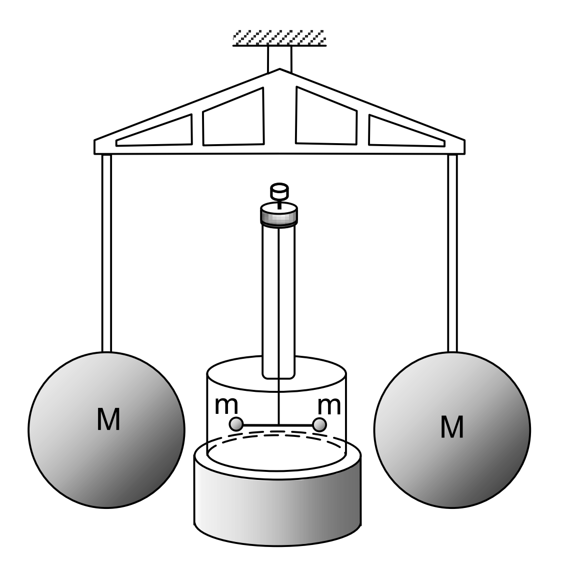
9-24) Una constante física h tiene el valor $6{,}63 \cdot 10^{-34}\left[N \cdot m \cdot s\right]$. Resulta conveniente en ciertas situaciones asociar a una partícula de masa m la cantidad física $\lambda = h/(mc)$, donde c es la rapidez de propagación de la luz en el vacío. Determine la dimensión de λ. Calcule el valor de "λ para un protón", exprese el resultado en notación científica, eligiendo la unidad del sistema métrico decimal con el prefijo más adecuado.

9-25) Una constante física tiene el valor $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\left[N \cdot m/K\right]$. Calcule el valor de la cantidad física $U = kT$ cuando la temperatura es –20ºC; exprese el resultado en [dina·cm] .

Interacción gravitacional

La descripción del movimiento de los astros y su posible explicación es una de las inquietudes que aparece desde épocas muy antiguas.

Las observaciones "a ojo desnudo" de los movimientos de los planetas llevaron a formular modelos del sistema planetario, como el geocéntrico de Tolomeo, el heliocéntrico de Copérnico y un modelo de Ticho Brahe, en que los planetas giraban alrededor del Sol y éste lo hacía alrededor de la Tierra, considerada fija. Observaciones con empleo de instrumentos, como el telescopio y el sextante, permitieron a Kepler enunciar leyes sobre el movimiento de los planetas alrededor del Sol.



Esos diversos modelos y leyes trataban sólo de los aspectos cinemáticos del movimiento de los planetas. Newton construye su teoría sobre la atracción de los cuerpos, dándole un carácter universal; la que permite, en particular, explicar dinámicamente el movimiento de los planetas, pudiéndose deducir las leyes cinemáticas correspondientes.

Las manifestaciones de la atracción gravitacional más directas para nosotros se presentan en la caída y en el peso de los objetos. Al tratar el tema sobre caída libre y lanzamiento vertical de cuerpos, le sugerimos que realizara un experimento que le permitiera familiarizarse con el concepto de aceleración de gravedad y sus posibles valores.

Se encuentra experimentalmente que la aceleración de gravedad tiene valores levemente distintos en diferentes lugares de la Tierra, debido a su forma no esférica y a su rotación. También influye la altura respecto al nivel del mar del lugar en que se efectúan las mediciones. Algunos valores se presentan en la siguiente tabla:

nivel de mar		**latitud de 45°**	
latitud	**g [m/s²]**	**altitud [km]**	**g [m/s²]**
0°	9,78031	0	9,807
10°	9,78195	1	9,803
20°	9,78641	4	9,794
30°	9,79329	8	9,782
40°	9,80171	16	9,757
50°	9,81071	32	9,71
60°	9,81918	100	9,60
70°	9,82608	500	8,53
80°	9,83059	1000	7,41
90°	9,83217		

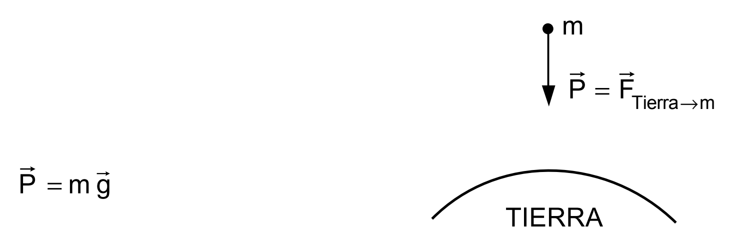
Por acuerdo internacional se adopta como *aceleración de gravedad normal* el valor $g_n = 9{,}80665\,[m/s^2]$.

Peso

Un cuerpo cae a la Tierra debido a la fuerza que la Tierra ejerce sobre el cuerpo. Por el mismo motivo, usted debe ejercer una fuerza para levantar y para sostener un cuerpo.

El **peso** de un cuerpo en la Tierra es la fuerza con la cual es atraído hacia el centro de la Tierra.

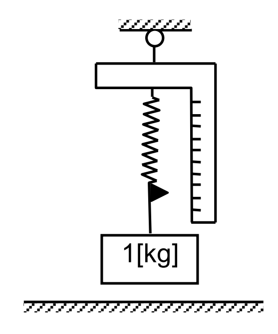
Como la aceleración que experimenta un cuerpo al caer a la Tierra tiene un valor $\vec{g}$ que es **independiente de la masa** del cuerpo, la fuerza "peso de un cuerpo" debe ser, de acuerdo con el segundo principio de Newton, $\vec{F} = m\,\vec{a}$, proporcional a la masa del cuerpo. Resulta para el peso de un cuerpo:



Aunque la masa de un cuerpo no varíe, su peso cambia según el lugar en que se encuentre.

Podemos medir el peso de un cuerpo mediante una "balanza de Newton" previamente calibrada. Esta balanza la usamos en la forma indicada en la figura.

Si de la balanza pende un cuerpo cuya masa es 1[kg], ésta indicará un peso de:

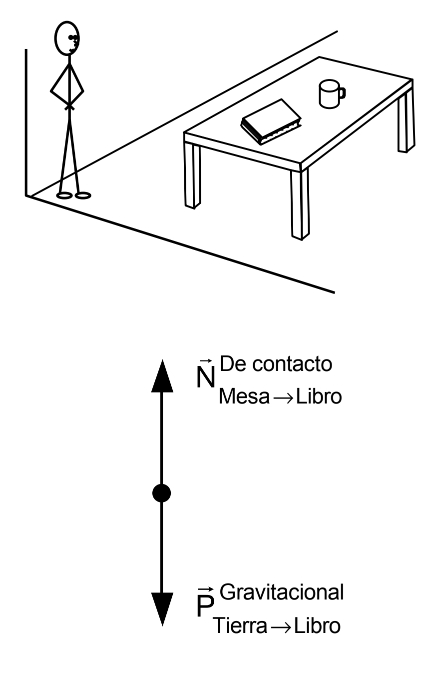


$$\left.\begin{matrix} 9,8\ [N] \\ \\ 8,5\ [N] \end{matrix}\right\} \text{ en un lugar en que } g = \left\{\begin{matrix} 9,8\ [m/s^2] \\ \\ 8,5\ [m/s^2] \end{matrix}\right.$$

Para que usted tenga un valor de comparación directo de la magnitud de una fuerza, piense que cuando sostiene un cuerpo de 1[kg] de masa usted ejerce una fuerza aproximada de 10[N] sobre él.

El peso de un objeto en la Tierra es un caso particular de la **interacción gravitacional** entre dos cuerpos.

Equilibrio de fuerzas



Consideremos una situación tan común como la de un libro y otros objetos *en reposo* sobre una mesa horizontal. Decimos que esos cuerpos están en equilibrio. La fuerza neta que actúa sobre cada uno de ellos es cero.

En la figura se representan las fuerzas que se ejercen **sobre** el libro. Una es el peso: $\vec{P}_{\text{Tierra}\rightarrow\text{Libro}}$, y la otra es la fuerza de contacto ejercida por la superficie de la mesa sobre el libro $\vec{N}_{\text{Mesa}\rightarrow\text{Libro}}$. La superposición (suma vectorial) de estas dos fuerzas:

$$\vec{P}_{\text{Tierra}\rightarrow\text{Libro}} + \vec{N}_{\text{Mesa}\rightarrow\text{Libro}}$$

da una fuerza neta cero, condición que debe cumplirse para que el libro esté en equilibrio.

$$\vec{P}_{\text{Tierra}\rightarrow\text{Libro}} + \vec{N}_{\text{Mesa}\rightarrow\text{Libro}} = 0 \;; \qquad \text{condición de equilibrio.}$$

Observe que al dibujar las fuerzas hemos representado al libro como un simple punto, es decir, hemos usado un modelo simplificado de él. Llamaremos “diagrama de cuerpo libre” a esta representación esquemática del cuerpo y las fuerzas que actúan sobre él.

En situaciones más generales es posible que la superposición de las fuerzas que actúan sobre un cuerpo sea cero y que el cuerpo esté rotando y no esté en equilibrio. Por ahora, nos ocuparemos solamente de algunos casos en que el equilibrio de un cuerpo está asegurado por la condición que la fuerza neta sobre él sea cero.

Experimento

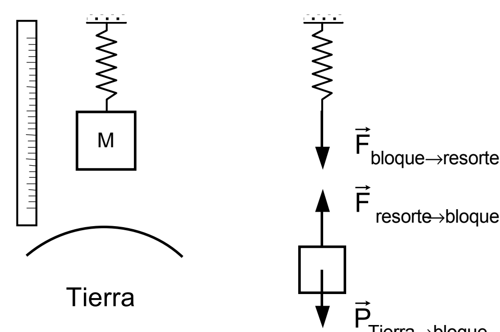
Sobre un cuerpo que está colgado de un resorte actúan dos fuerzas: el peso del cuerpo debido a la gravitación, y la fuerza ejercida por el resorte. Cuando el cuerpo está en equilibrio la suma de ambas fuerzas es cero y por tanto son iguales en magnitud.

$\vec{P}_{\text{Tierra}\rightarrow\text{cuerpo}}$: peso del cuerpo

$\vec{F}_{\text{Resorte}\rightarrow\text{cuerpo}}$: fuerza del resorte sobre el cuerpo

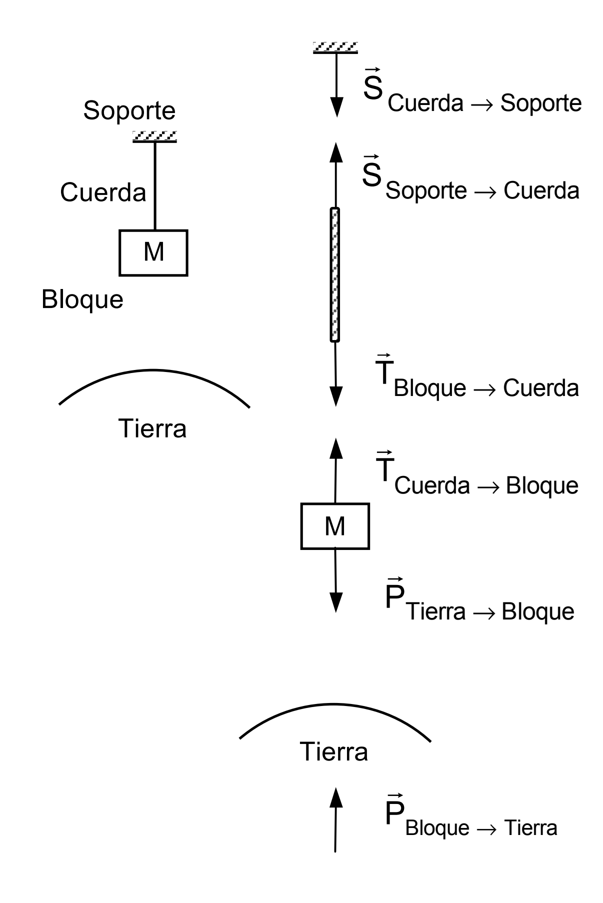
Condición de equilibrio: $\vec{P}_{T\rightarrow c} + \vec{F}_{R\rightarrow c} = 0$

Magnitudes de las fuerzas: $P = F$



Tensión en una cuerda

Consideremos un bloque suspendido de un soporte mediante una cuerda. Examinemos las fuerzas ejercidas sobre el bloque, la cuerda y el soporte.



En forma abreviada, escribamos:

$\vec{P}_{T \to B}$ el peso del cuerpo.

$\vec{T}_{C \to B}$ la fuerza que la cuerda ejerce sobre el bloque.

$\vec{S}_{S \to C}$ la fuerza que el soporte ejerce sobre la cuerda y así sucesivamente.

Por equilibrio del cuerpo:

$$\vec{P}_{T \to B} + \vec{T}_{C \to B} = 0$$

Suponiendo que la masa de la cuerda es despreciable en comparación con la masa del bloque, por equilibrio de la cuerda:

$$\vec{S}_{S \to C} + \vec{T}_{B \to C} = 0$$

Como $\vec{T}_{C \to B}$ y $\vec{T}_{B \to C}$ forman un par acción-reacción:

$$\vec{T}_{C \to B} = -\vec{T}_{B \to C}$$

Entonces:

$$\vec{P}_{T \to B} = \vec{T}_{B \to C} = \vec{S}_{C \to S}$$

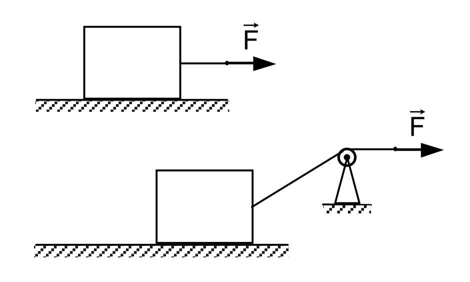
por lo cual, para sus magnitudes se cumple:

$$S = T = P$$

En esta situación la cuerda se pone tensa o tirante. Si cortáramos la cuerda y colocáramos un dinamómetro entre los extremos producidos por el corte, éste mediría la **tensión** en la cuerda. El valor de la tensión es igual a la magnitud de la fuerza transmitida por la cuerda.

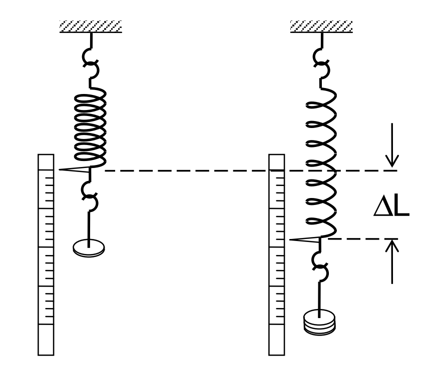
Examine que ocurriría si la masa de la cuerda fuera comparable a la del bloque.

Aplicando una fuerza a uno de los extremos de una cuerda, podemos ejercer una fuerza sobre un objeto unido al otro extremo de la cuerda. Si la cuerda pasa sobre una polea, ambas de masa despreciable, la dirección de la cuerda sobre el cuerpo puede ser diferente a la dirección de la fuerza aplicada en extremo libre de la cuerda. La dirección de la fuerza aplicada por una cuerda en un punto de un cuerpo coincide con la del trozo de cuerda próximo al cuerpo.

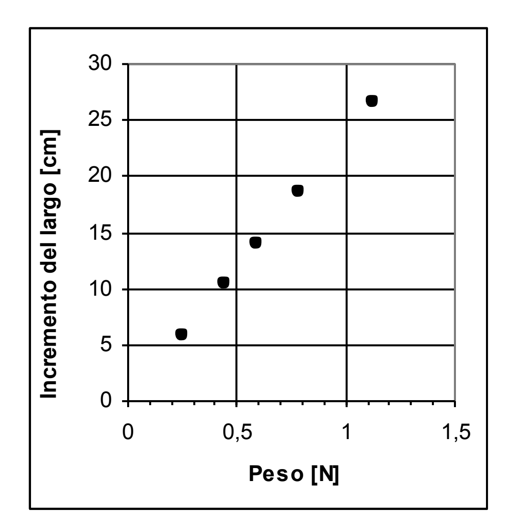


Si el roce es despreciable, entonces la magnitud de la fuerza transmitida por la cuerda es igual a la magnitud de la fuerza aplicada en el extremo libre de la cuerda.

Al colgar cuerpos de diferente masa en un resorte dado observamos que el largo del resorte varía. Elegimos cuerpos de determinados valores de masa. Medimos el largo que adquiere el resorte cuando cada uno de estos cuerpos pende de él en equilibrio. Las mediciones hechas las agrupamos en la siguiente tabla de valores:



M_i [g]	L_i [cm]	P_i [N]	ΔL_i [cm]	$P_i/\Delta L_i$ [N/m]
0	23,3			
25	29,1	0,245	5,8	4,22
45	33,8	0,441	10,5	4,20
60	37,3	0,588	14,0	4,20
80	42,0	0,784	18,7	4,19
115	50,0	1,127	26,7	4,22



donde:

$P_i = M_i g$ es el peso del cuerpo de masa M_i

L_i es el largo del resorte con el cuerpo de masa M_i

L_0 es el largo del resorte sin un cuerpo colgado de él

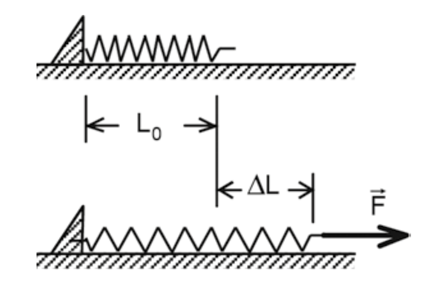
$\Delta L_i = L_i - L_0$ es el incremento del largo del resorte respecto al largo L_0

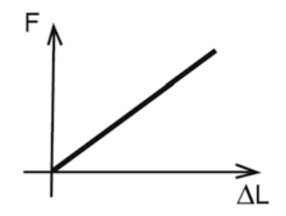
Observamos que, dentro de los errores experimentales, el incremento ΔL del largo del resorte es proporcional al peso del cuerpo que pende de él, ya que el cuociente $P_i / \Delta L_i$ resultó aproximadamente constante.

Experimentos de este tipo permiten establecer que el alargamiento de un resorte es proporcional a la magnitud de la fuerza que actúa sobre él. Esto lo escribimos como:

$F = k \cdot \Delta L$ (Ley de Hooke)

y nos referimos a k como "el coeficiente de elasticidad " o "la constante de rigidez" del resorte.

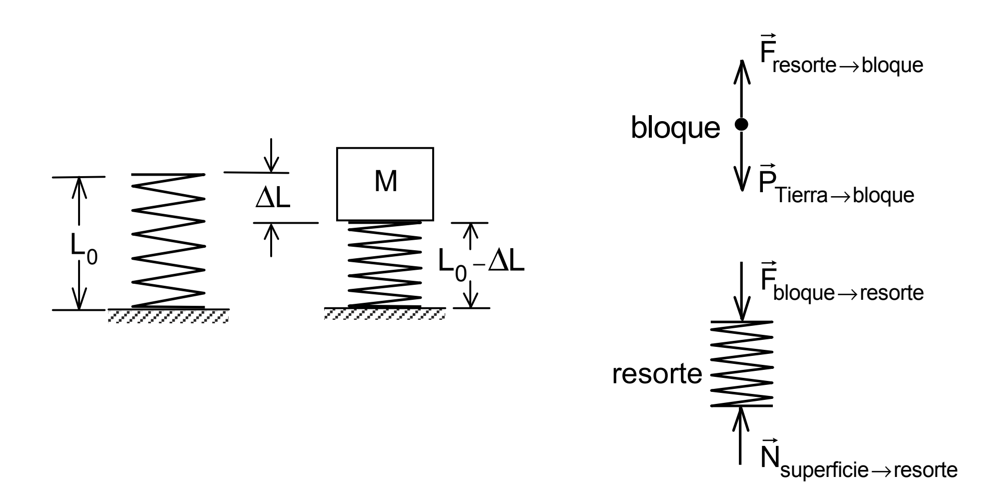




Tenemos que recalcar que la proporcionalidad entre la elongación y la fuerza aplicada a un resorte tiene validez dentro de cierto rango de su alargamiento, rango que es característico de cada resorte.

La propiedad de que el alargamiento de un resorte depende de la fuerza que se ejerce sobre él, permite construir un instrumento para medir magnitudes de fuerzas, llamado dinamómetro o balanza de Newton.

Si colocamos un cuerpo sobre un resorte, éste quedará comprimido. El cuerpo permanece en equilibrio cuando la fuerza $\vec{F}$ que el resorte ejerce sobre el cuerpo sea de igual magnitud que la magnitud del peso $\vec{P}$ del cuerpo.



Si llamamos ΔL al acortamiento del resorte, ocurrirá que:

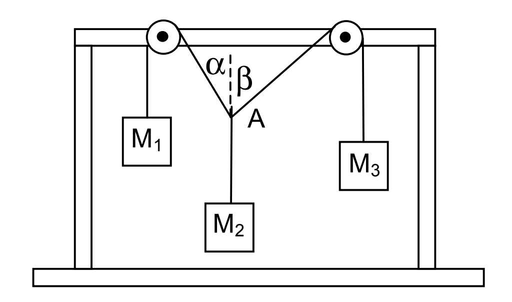
$$F = k \cdot \Delta L$$

siendo k el coeficiente de elasticidad del resorte. Observe que al construir el diagrama de cuerpo libre hemos omitido la plataforma o "plato" de la balanza, cuyo peso consideramos despreciable, al igual que al peso del resorte. Bajo estas condiciones las magnitudes F y P son iguales.

$$P = F = k\Delta L$$

Experimento

Sobre una base arme un marco de madera. En el travesaño superior ubique dos poleas. Elija tres cuerpos y mida sus masas. Mediante hilos cuelgue los tres cuerpos en la forma que indica la figura. Cuando vea que el sistema formado por los tres cuerpos está en equilibrio mida, mediante un transportador, los ángulos α y β. Usted puede comprobar que la suma vectorial de las fuerzas que actúan sobre el nudo A es cero. Insistimos que usted realice esta experiencia.



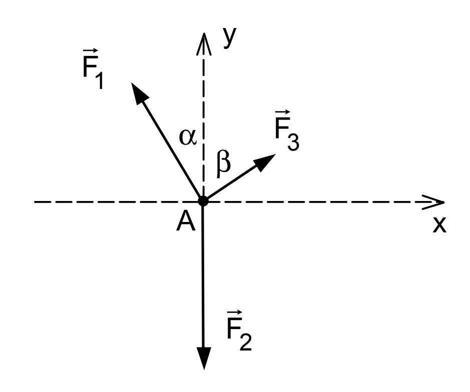
A continuación le entregamos un cuadro de valores obtenidos al realizar el experimento con varios tríos de cuerpos.

$M_1\,[kg]$	$M_2\,[kg]$	$M_3\,[kg]$	α	β
0,10	0,15	0,12	53°	42°
0,10	0,10	0,12	72°	55°
0,14	0,15	0,14	60°	60°
0,10	0,20	0,14	40°	30°

Analicemos la situación de equilibrio del sistema:

Sean $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$ las fuerzas que actúan sobre el nudo A debido a los pesos $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ y $\vec{P}_3$ de los cuerpos. Suponiendo roce despreciable en las poleas, las magnitudes de las fuerzas transmitidas hasta A por los hilos son iguales a las respectivas magnitudes de los pesos:

$$F_1 = P_1 = M_1 \cdot g$$
$$F_2 = P_2 = M_2 \cdot g$$
$$F_3 = P_3 = M_3 \cdot g$$



El equilibrio del sistema queda expresado por la ecuación vectorial:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Dado que estas tres fuerzas son coplanares, para realizar esta suma vectorial nos conviene eligir un sistema de referencia con su origen en el punto A y cuyos ejes coincidan con las líneas vertical y horizontal.

La ecuación vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ implica dos ecuaciones para las componentes de las fuerzas en los ejes escogidos:

Componentes horizontales: $-F_1 \cdot \text{sen}\alpha + 0 + F_3 \cdot \text{sen}\beta = 0$

Componentes verticales: $F_1 \cdot \cos\alpha - F_2 + F_3 \cdot \cos\beta = 0$

Dividiendo por la aceleración de gravedad g, resulta para la condición de equilibrio del sistema estudiado:

$$-M_1 \cdot \text{sen}\alpha + M_3 \cdot \text{sen}\beta = 0$$

$$M_1 \cdot \cos\alpha - M_2 + M_3 \cdot \cos\beta = 0$$

Comprobemos si el primer conjunto de datos obtenidos en nuestras mediciones satisface estas igualdades

$$-0{,}10 \cdot \text{sen}53° + 0{,}12 \cdot \text{sen}42° \simeq -0{,}0799 + 0{,}0803 = 0{,}0004$$

$$0{,}10 \cdot \cos 53° - 0{,}15 + 0{,}12 \cdot \cos 42° \simeq -0{,}0602 - 0{,}15 + 0{,}0892 = 0{,}0006$$

Observemos que dentro de los errores de medición, efectivamente se cumplen las ecuaciones para el equilibrio.

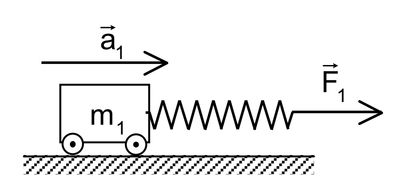
Dejamos a usted la tarea de trabajar con los otros conjuntos de datos.

Ejemplos

- Se aplica una fuerza mediante un resorte a un cuerpo de masa $m_1 = 3{,}2\,[\text{kg}]$ produciéndole una aceleración $a_1 = 1{,}4\left[m/s^2\right]$. Al aplicar otra fuerza mediante el mismo resorte a otro cuerpo de masa $m_2 = 5{,}1\left[\text{kg}\right]$ el resorte se estira 3,6[cm] más que la primera vez y se obtiene una aceleración $a_2 = 2{,}9\left[m/s^2\right]$. Calculemos la constante elástica K del resorte, suponiendo que los cuerpos se mueven sobre una superficie horizontal lisa.

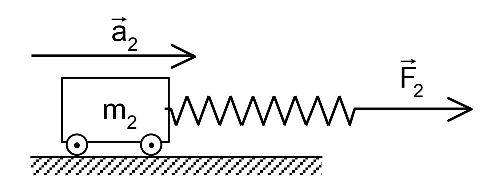
Usando el segundo principio de Newton resulta para las magnitudes de la fuerzas netas en cada caso.

$$F_1 = m_1 \cdot a_1$$
$$F_2 = m_2 \cdot a_2$$



Como los cuerpos se mueven sobre una superficie horizontal lisa, la fuerza neta es igual a la ejercida por el resorte. Entonces, según la ley de Hooke:

$$F_1 = K \cdot x_1$$
$$F_2 = K \cdot x_2$$



siendo x_1 y $x_2 = x_1 + 3,6[cm]$ los respectvos alargamientos del resorte. Dividiendo cada par de ecuaciones se obtiene:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 \cdot a_1}{m_2 \cdot a_2} \qquad y \qquad \frac{F_1}{F_2} = \frac{x_1}{x_2}$$

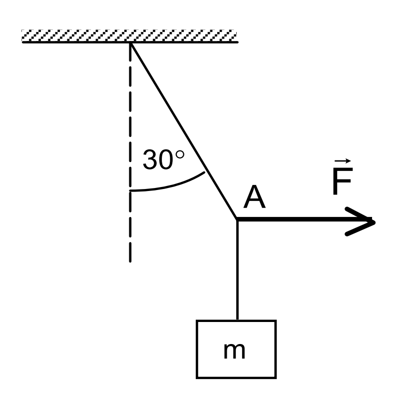
luego:

$$\frac{m_1 \cdot a_1}{m_2 \cdot a_2} = \frac{x_1}{x_1 + 3,6} \text{ , con } x_1 \text{ en [cm]}$$

de donde $x_1 \simeq 1,6\left[cm\right]$.

De $F_1 = K\, x_1$ resulta $K = \dfrac{m_1 \cdot a_1}{x_1} = \dfrac{3,2 \cdot 1,4}{0,016}\left[N/m\right] \simeq 280\left[N/m\right]$

- Calculemos la fuerza que hay que aplicar horizontalmente en el punto A para que la cuerda que suspende a un cuerpo de masa 3,1[kg] forme un ángulo de 30° con la vertical.



Las fuerzas que actúan en el punto A son:

$\vec{F}$: la fuerza que calcularemos

$\vec{P}$: el peso del cuerpo de masa m

$\vec{T}$: la tensión de la cuerda

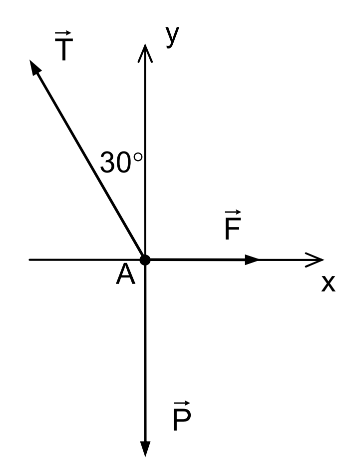
Elegimos un sistema de referencia con “eje x” horizontal y “eje y” vertical.

La ecuación de equilibrio

$$\vec{F} + \vec{P} + \vec{T} = 0$$

da lugar a las dos ecuaciones escalares:

$$F = T \cdot \text{sen}30^\circ$$
$$T \cdot \cos 30^\circ = mg$$



De la segunda ecuación se tiene:

$$T = \frac{mg}{\cos 30^\circ}$$

que reemplazada en la primera resulta:

$$F = mg \cdot \tan 30^\circ$$
$$\simeq 3{,}1 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}58 \simeq 18[\text{N}]$$

Podemos calcular además la tensión en la cuerda:

$$T = \frac{mg}{\cos 30^\circ} = \frac{3{,}1 \cdot 9{,}8}{\cos 30^\circ} \simeq 35\left[\text{N}\right]$$

Ejercicios

9-26) Una fuerza de 12[N] se aplica sobre un resorte de coeficiente elástico $K = 200$ [N/m]. ¿Qué alargamiento del resorte se produce?

9-27) Se ha medido que un resorte experimenta un alargamiento igual a ΔL =12,3 [cm] cuando se aplica sobre él una fuerza de magnitud $F = 85{,}4$ [N]. Determine el coeficiente de rigidez del resorte, exprese el resultado en [N/m] y en [pdl/ft].

9-28) Los coeficientes de elasticidad de dos resortes tienen los valores $K_1 = 17{,}6$ [N/cm] y $K_2 = a$ [pdl/in], respectivamente. Al aplicar cierta fuerza sobre el primer resorte se produce un alargamiento de 27[mm] ; la misma fuerza produce en el segundo resorte un alargamiento de 32[mm]. Determine el "número de medición" a.

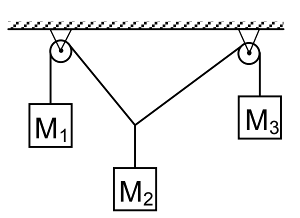
9-29) En un lugar en que la aceleración de gravedad vale 9,87[m/s^2], un cuerpo cuyo peso es 48,0[kp] produce un alargamiento de 12[mm] en cierto resorte. Calcule la constante de rigidez del resorte en [N/m].

9-30) Usando una "caja de masas" se ha calibrado un dinamómetro en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 9,78[m/s^2]. En otro lugar, con aceleración de gravedad de 9,84[m/s^2], se ha medido con este dinamómetro que el peso de un objeto es 50,0[lbf]. Exprese la masa de este objeto en [kg].

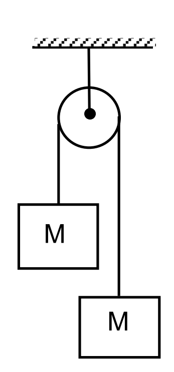
9-31) Con un resorte cuyo coeficiente de rigidez vale $K = 3{,}7 \cdot 10^3$ [N/m] se tira un objeto haciendo que se mueva sobre una superficie *horizontal* lisa. Cuando la aceleración del objeto tuvo un valor $a = 1{,}6$ [m/s^2], el alargamiento del resorte fue $\Delta L = 6{,}5$ [cm]. Calcule la masa del objeto.

9-32) Sobre un cuerpo situado en una superficie horizontal lisa actúa una fuerza por medio de un resorte extendido hasta una largo tal que, la aceleración del cuerpo es de 15[cm/s^2]. ¿Cuál sería la aceleración del cuerpo sometido a la acción de dos resortes, cada uno idéntico al primero, colocados paralelamente y extendidos ambos hasta un largo igual al doble del largo en el primer caso?

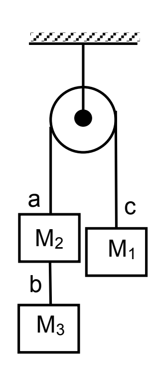
9-33) Tres cuerpos de masas $M_1 = 80$ [g] , $M_2 = 110$ [g] y $M_3 = 60$ [g] que penden de sendos hilos como se muestra en la figura, están en equilibrio. Calcule el ángulo entre cada par de hilos y los ángulos que los hilos forman con la vertical.



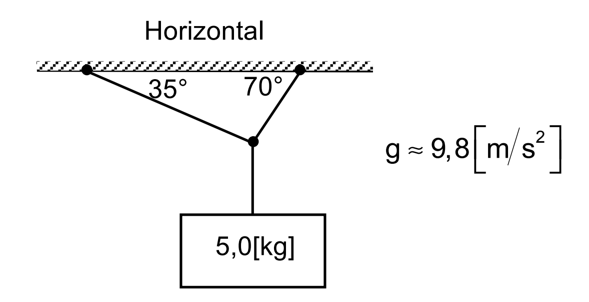
9-34) Dos cuerpos de igual masa $M = 0{,}80$ [kg] están suspendidos en los extremos de un hilo que pasa por una polea. La polea se considera de masa despreciable y también se desprecia el roce entre la polea y el hilo y el roce entre la polea y su eje. Calcule la tensión en el hilo y la tensión en la cuerda de la que cuelga la polea.



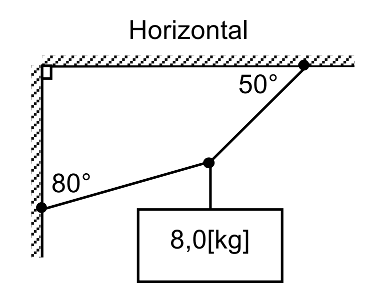
9-35) Tres cuerpos, de masas M_1, M_2 y M_3, amarrados a dos hilos como se indica en la figura, están en equilibrio. Si $M_1 = 2{,}1$ [kg] y $M_3 = 1{,}3$ [kg]. ¿Cuál es el valor de M_2? Calcule la tensión en los extremos a , b y c de los hilos.



9-36) Calcule las tensiones en las cuedas para cada una de las situaciones de equilibrio mostradas en las figuras siguientes:

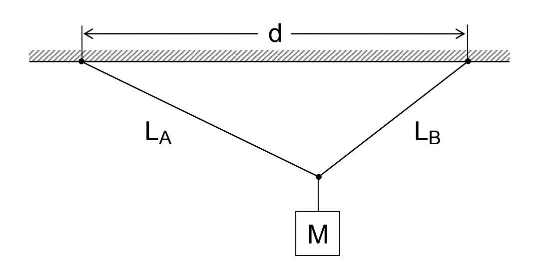


$g \approx 9{,}8\left[m/s^2\right]$

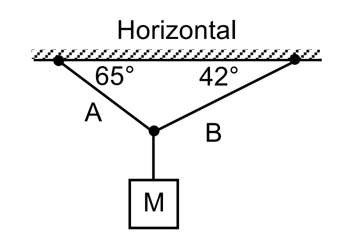


9-37) Para este sistema en equilibrio se tiene: $L_A = 60$ [cm], $L_B = 43$ [cm], y $d = 87$ [cm].

Calcule las tensiones en las cuerdas si el cuerpo tiene una masa de 6,0[kg].



9-38) Calcular la tensión T_B en la cuerda B y la masa M del cuerpo que pende, si la tensión en la cuerda A es $T_A = 9{,}2$ [kp] cuando el sistema está en equilibrio.

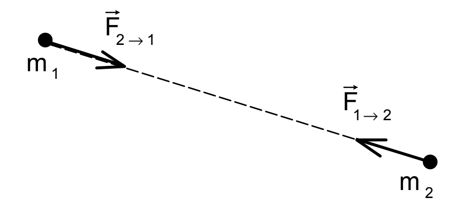


Ley de gravitación universal de Newton

La interacción gravitacional que se ejerce entre cuerpos materiales es un fenómeno que se presenta en todo el universo, produciendo siempre **atracción** entre los cuerpos.

La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre *dos partículas* de masas m_1 y m_2, situadas a una distancia d una de la otra está dada por:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2}$$



$$\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$$

$$F_{1\to2} = F_{2\to1} = F$$

Esta expresión supone que los cuerpos son idealmente puntuales, es decir, que sus dimensiones geométricas son muy pequeñas en comparación con la distancia que los separa. Podemos aplicar esta expresión a cuerpos esféricos considerando como distancia la separación entre los centros de las esferas, obteniendo en general valores con buena aproximación.

El valor de la "constante de gravitación universal" G, determinado experimentalmente, es de:

$$G \simeq \left(6{,}67428 \pm 0{,}00067 \right) \cdot 10^{-11} \left[N \cdot m^2 / kg^2 \right]$$

Este valor de G indica lo "débil" que es la interacción gravitacional.

La Tierra atrae gravitacionalmente a un cuerpo de 1[kg] de masa con una fuerza del orden de 10[N]. En comparación, la fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos con masas de 1[kg] a 1[m] de distancia tiene el orden de magnitud de 10^{-10}[N], esto es, del orden del diezbillonésimo de la fuerza necesaria para levantar a una persona.

Que la fuerza gravitacional es "débil" se aprecia en la vida diaria: se pasa cerca de edificios o de personas y no se siente la atracción gravitacional. Sin embargo, la atracción producida por la Tierra, debido a su "enorme" masa, hace que nosotros vivamos pegados a ella y que la atmósfera no escape de la Tierra.

Por otra parte, la existencia de los sistemas Tierra-Luna y Sol-Planetas y de las diferentes agrupaciones de estrellas, son manifestaciones de la atracción gravitacional haciendo sentir sus efectos a "enormes" distancias.

La ley de gravitación universal de Newton, representada por la fórmula

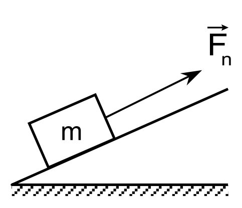
$$F = G\, m_1\, m_2 / d^2 \,,$$

no es una ley de movimiento, sino una expresión particular de un tipo de fuerza. Notemos que el hecho de tener las masas el mismo exponente hace que la expresión tenga una simetría que permite intercambiar los índices de las masas; esto significa que no hay una masa que atrae y otra que es atraída, sino que ambas se atraen con fuerzas de igual magnitud de acuerdo con el **principio de acción y reacción.**

Las teorías sobre la interacción gravitacional enunciadas en el presente siglo tienen estructuras conceptualmente muy diferentes a la de Newton, pero contienen a su ley de gravitación universal como una primera aproximación.

Ejemplos

- Un cuerpo pesa 520[N] en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 9,78[m/s^2]. Calcule la aceleración que adquiere este cuerpo al estar sometido a una fuerza neta $\vec{F}_n$ de magnitud igual a 146[N].



La magnitud de la aceleración del cuerpo la obtenemos de:

$$F_n = m \cdot a$$

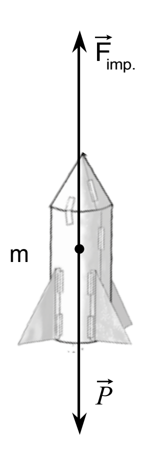
La masa está determinada por $P = m\,g$, por tanto:

$$m = \frac{P}{g} \qquad y \qquad a = \frac{F_n}{m} = \frac{F_n}{P}\cdot g = \frac{146[N]}{520[N]}\cdot 9{,}78[m/s^2] \simeq 2{,}75[m/s^2]$$

- Un cohete de 50 toneladas de masa se alcanzó a elevar 20[m] en 5,0[s] antes de explotar. Si suponemos que la aceleración, la masa y la fuerza impulsora fueron constantes, ¿qué magnitud tenía la fuerza impulsora?

Considerando que el cohete parte del reposo, su aceleración queda determinada por:

$$h = a \cdot t^2/2$$



dando:

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 20[m]}{\left(5{,}0\ [s]\right)^2} = 1{,}6\ [m/s^2]$$

Esta aceleración es producida por la fuerza neta, cuya magnitud es igual a la magnitud de la fuerza impulsora menos la magnitud del peso:

$$F_{neta} = F_{imp.} - P = m \cdot a$$

por tanto:

$$F_{imp.} = m\,a + P = m\,a + m\,g = m \cdot \left(a + g\right)$$

$$= 50\ [t] \cdot 10^3\ [kg/t] \cdot \left(1{,}6 + 9{,}8\right)\ [m/s^2]$$

$$\triangleq 50 \cdot 10^3 \cdot 11{,}4\ [N] \simeq 5{,}7 \cdot 10^5 [N]$$

- Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional con que el Sol atrae a Saturno. Use los datos: masa del Sol $1{,}99\cdot 10^{30}[kg]$, masa de Saturno $5{,}6\cdot 10^{26}[kg]$ y distancia media de Saturno al Sol de 9,5[UA].

La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional queda determinada por:

$$F_{St\to S} = G\,\frac{M_S \cdot M_{St}}{\left(d_{S,St}\right)^2}\ , \text{ con } \quad G \simeq 6{,}67\cdot 10^{-11}\,[N \cdot m^2/kg^2]$$

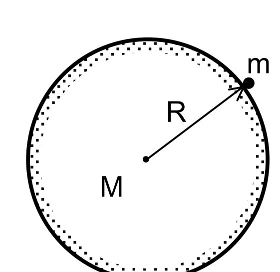
Recordando la equivalencia $1\,[UA] \triangleq 1{,}496 \cdot 10^{11}\,[m]$, obtenemos:

$$F_{St\to S} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{1{,}99 \cdot 10^{30} \cdot 5{,}6 \cdot 10^{26}}{\left(9{,}5 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^2}\ [N] \simeq 3{,}7 \cdot 10^{22}\ [N]$$

* Calcule aproximadamente el valor de la constante de gravitación universal G usando como datos: el valor de la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra $g \simeq 9{,}8\ [m/s^2]$,

el radio de la Tierra $R \simeq 6{,}4 \cdot 10^6 [m]$ y

la masa de la Tierra $M \simeq 6{,}0 \cdot 10^{24} [kg]$.



Consideremos un cuerpo de masa m en la superficie de la Tierra. Su peso es la atracción gravitacional que la Tierra ejerce sobre él:

$$P = mg = G\,\frac{M \cdot m}{R^2}$$

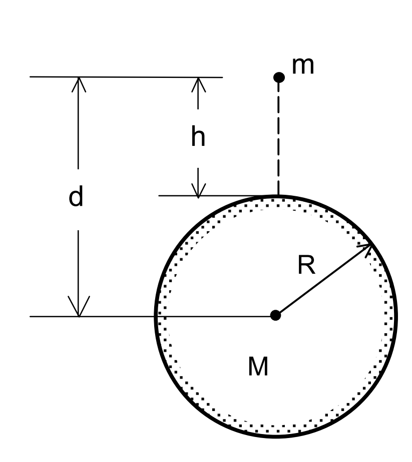
por tanto:

$$G = \frac{g \cdot R^2}{M} \simeq \frac{9{,}8\ [m/s^2] \cdot \left(6{,}4 \cdot 10^6\ [m]\right)^2}{6{,}0 \cdot 10^{24}\ [kg]} = \frac{9{,}8 \cdot (6{,}4)^2 \cdot 10^{12}}{6{,}0 \cdot 10^{24}} \left[\frac{m \cdot m^2}{s^2 \cdot kg}\right]$$

$$\simeq 6{,}7 \cdot 10^{-11}\,[N \cdot m^2 / kg^2]$$

• Determine una expresión aproximada que nos indique las variaciones de la aceleración de gravedad en función de la altitud (altura sobre la superficie de la Tierra).

De la ley de gravitación universal de Newton obtenemos:



$$g = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

$$= \frac{G \cdot M}{(R+h)^2} = \frac{G \cdot M}{R^2 \cdot \left(1 + h/R\right)^2}$$

Hagamos $\varepsilon = h/R$. Como el radio de la Tierra R es del orden de magnitud de $10^7 [m]$, aún para altitudes del orden de $10^5 [m]$ resulta $\varepsilon \sim 10^{-2}$, por tanto en:

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2} = \frac{1}{1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2} = 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 - 4\varepsilon^3 + - \cdots$$

podemos “despreciar” los términos que contienen ε^2, ε^3 y potencias superiores de ε, dando como resultado aproximado:

$$g(h) \simeq g_0 \cdot (1 - 2h/R)$$

donde hemos puesto $g_0 = G\ M/R^2$, para indicar la aceleración de gravedad en la superficie de la Tierra.

Para apreciar el cambio de los valores de la aceleración de gravedad con la altitud, calculamos el valor de g para un satélite artificial a 300[km] de altitud:

$$g \simeq 9{,}8 \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot 300}{6400}\right) [m/s^2] \simeq 9{,}8 \cdot \frac{58}{64} [m/s^2]$$

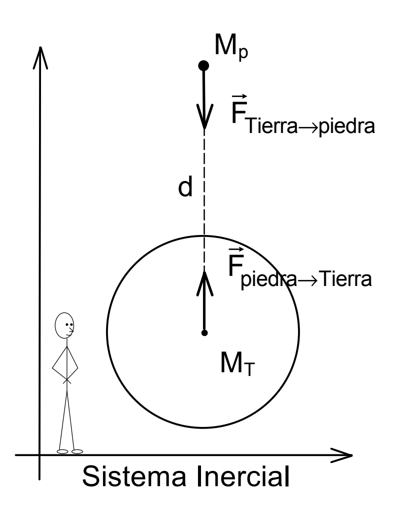
$$\simeq 8{,}9\ [m/s^2]$$

lo que representa una disminución de sólo un 9%.

- Calculemos la aceleración con que un observador en un *sistema inercial* vería moverse la Tierra hacia una piedra. La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre la Tierra y la piedra está dada por:

$$F_{p\to T} = F_{T\to p} = G\ \frac{M_p \cdot M_T}{d^2}$$

$$F_{p\to T} = F_{T\to p}$$



La aceleración de la piedra resulta:

$$a_p = \frac{F_{T\to p}}{M_p} = \frac{G \cdot M_T}{d^2}$$

La aceleración de la Tierra es:

$$a_T = \frac{F_{p\to T}}{M_T} = \frac{G \cdot M_p}{d^2}$$

El cuociente entre las respectivas aceleraciones es:

$$\frac{a_T}{a_p} = \frac{M_p}{M_T}$$

La masa de la Tierra es $5,97 \cdot 10^{24}$ [kg] y si la masa de la piedra fuera $3,24[kg]$, resultaría:

$$\frac{a_T}{a_p} = \frac{3,24}{5,97 \cdot 10^{24}} \simeq 5,43 \cdot 10^{-25}$$

Si el observador determinara que a_p es del orden de $10[m/s^2]$, entonces, para él sería:

$$a_T \simeq 5,43 \cdot 10^{-24} \ [m/s^2]$$

Por tanto, el observador inercial prácticamente no ve moverse a la Tierra. Esto justifica que un observador que se encuentre situado en la Tierra, al medir la aceleración de caída de una piedra coincida aproximadamente con lo medido por el observador inercial.

- Suponga que en cierto lugar del Universo hay dos cuerpos celestes esféricos y homogéneos. Sus densidades están en razón de $4:7$ y las aceleraciones de gravedad en sus superficies están en la razón de $8:3$. Calculemos la razón entre los radios de estos cuerpos.

Las aceleraciones de gravedad en las superficies de los planetas serían:

$$g_1 = G\frac{m_1}{(R_1)^2}, \qquad \text{siendo} \qquad m_1 = \frac{4}{3}\pi (R_1)^3 \cdot \rho_1$$

$$g_2 = G\frac{m_2}{(R_2)^2}, \qquad \text{siendo} \qquad m_2 = \frac{4}{3}\pi (R_2)^3 \cdot \rho_2$$

Reemplazando m_1 y m_2 por sus valores y haciendo el cuociente, obtenemos la siguiente relación:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

De los datos obtenemos que:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{8}{3} \qquad y \qquad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{4}{7}$$

y por tanto:

$$\frac{8}{3} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{4}{7}$$

Entonces, los radios de los planetas están en la razón $R_1 : R_2 = 14 : 3$.

Ejercicios

9-39) Infórmese de la latitud de los siguientes lugares: Arica, Copiapó, Valparaíso, Valdivia, Punta Arenas y Puerto Williams e indique valores aproximados de la aceleración de gravedad en cada uno de ellos. Use la tabla de aceleración de gravedad para diferentes latitudes (pág. 321) Estime el efecto de la altitud en cada caso.

9-40) Un estudiante del planeta Tral, en otro sistema solar, deja caer un objeto con el fin de determinar la aceleración debida a la gravedad. En un experimento obtiene los siguientes valores:

tiempo [ces] :	0,0	1,0	1,5	2,0	2,6	3,0
distancia [hic] :	0,00	2,15	4,84	8,60	14,54	19,33

Determine el valor de la aceleración de gravedad en [hic/ces^2].

Un visitante terrestre encuentra que $1[\text{hic}] \triangleq 6{,}3[\text{cm}]$ y que $1[\text{ces}] \triangleq 0{,}17[\text{s}]$. Exprese tal aceleración de gravedad en [cm/s^2].

¿Pesa un objeto más en la Tierra que en Tral?

9-41) Un cuerpo pesa $8{,}32 \cdot 10^3[\text{dina}]$ en un lugar en que la aceleración de gravedad vale $978[\text{cm/s}^2]$. Calcule la aceleración que adquiere tal cuerpo al estar sometido a una fuerza neta de $6{,}49 \cdot 10^3[\text{dina}]$.

9-42) Compare las atracciones gravitacionales Sol-Tierra y Luna-Tierra. Las masas de la Luna, del Sol y de la Tierra son: $7{,}18 \cdot 10^{22}[\text{kg}]$, $1{,}99 \cdot 10^{30}[\text{kg}]$ y $5{,}96 \cdot 10^{24}[\text{kg}]$ respectivamente. La distancia media Sol-Tierra es $1{,}495 \cdot 10^8[\text{km}]$ y la de Luna-Tierra es $3{,}84 \cdot 10^5[\text{km}]$.

9-43) Determine, aproximadamente, un punto entre la Tierra y la Luna para que un cuerpo colocado en ese punto no experimente aceleraciones debido a las fuerzas gravitacionales conjuntas de la Tierra y de la Luna.

9-44) Calcule aproximadamente la constante de gravitación universal usando como datos el radio y la densidad media de la Tierra y la aceleración de gravedad en la superficie terrestre.

9-45) Exprese el valor de la "constante de gravitación universal" G en $[\text{dina} \cdot \text{cm}^2 / \text{g}^2]$.

9-46) Considere dos esferas idénticas cuyos centros están a 1,0[m] de distancia. Determine la masa que debería tener cada una de ellas para que la fuerza gravitacional entre ellas tuviera una magnitud de 1,0[N]. Comente.

9-47) Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos núcleos de carbono 12 separados $1{,}2 \cdot 10^{-13}[\text{cm}]$.

9-48) En un cristal de NaCl la distancia entre átomos Na y Cl es aproximadamente $3,\cdot 10^{-10}[\text{m}]$. La masa de un átomo de Na es $4,\cdot 10^{-26}[\text{kg}]$ y la masa del átomo de Cl es $6,\cdot 10^{-26}[\text{kg}]$. Calcule la magnitud de la fuerza gravitacional entre dos átomos vecinos de Na y Cl.

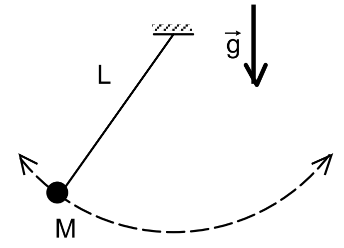
9-49) Aproximadamente los radios de la Tierra y de la Luna están en la razón de 26:7,1 y sus masas en la razón 89:1,1. Calcule la aceleración de gravedad en la superficie de la Luna.

9-50) Antes de partir de la Tierra un astronauta mide que la masa de un instrumento es 0,20[kg]. Cuando camina sobre la superficie de la Luna con tal instrumento en la mano, ¿qué fuerza debe ejercer el astronauta para sostenerlo?

9-51) ¿Cuánto pesaría en la Luna un objeto que pesa 35,4[N] en la Tierra en un lugar con aceleración de gravedad normal?

9-52) Remítase a la tabla de valores de la aceleración de gravedad *g* para diferentes altitudes h y a 45° de latitud. Controle si tales valores están de acuerdo con la aproximación $g(h) \simeq g_s \cdot \left(1 - 2h/R_T\right)$, donde g_s es el valor en la superficie de la Tierra y R_T es el radio de la Tierra. Si encuentra discrepancias ¿a qué las atribuiría?

9-53) Considere que el período de oscilación T de un péndulo formado por un cuerpo de masa M colgado en el extremo de un hilo de largo L dependiera de L , M y g; siendo *g* la aceleración de gravedad del lugar. Escriba entonces $T = k\, M^{\alpha} L^{\beta} g^{\gamma}$, siendo *k* una constante numérica adimensional. Verifique, por análisis de las dimensiones de las cantidades físicas involucradas, que $T = k\sqrt{L/g}$.



9-54) El período de oscilación del péndulo de un *reloj de pedestal* se puede escribir como $T = \beta/\sqrt{g}$, donde g es la aceleración de gravedad y β es una constante. El reloj marca la hora “exacta” en la superficie de la Tierra. Calcule aproximadamente cuánto se atrasa o se adelanta por día al llevar el péndulo a 300[km] sobre la superficie de la Tierra (considere que la temperatura se mantiene constante).

9-55) Si la Tierra mantuviera su radio actual, pero su masa se redujera en 1/18, ¿en qué tanto por ciento variaría la aceleración de gravedad en un punto de su superficie?

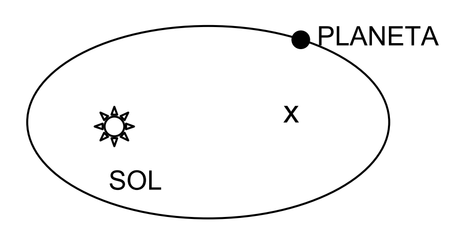
9-56) Sea g_s el valor de la aceleración de gravedad en la superficie de cierta estrella. Si el volumen de tal estrella se duplicara y su masa se mantuviera, ¿cuál sería entonces la aceleración de gravedad sobre su superficie?

9-57) Suponga que existe un planeta de forma aproximadamente esférica cuya densidad media fuese igual a la de la Tierra y cuyo radio fuese la mitad del de la Tierra. Calcule cuál sería la aceleración de gravedad en la superficie de ese planeta.

Movimiento de Planetas y Satélites

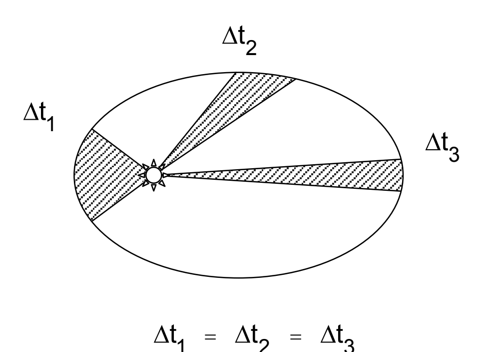
Analizando las cuidadosas observaciones de la posición de los planetas hechas por Ticho Brahe, Johannes Kepler enunció en la segunda década del siglo XVII, tres leyes empíricas sobre el movimiento de los planetas en torno al Sol:

La órbita de cada planeta es una elipse, uno de cuyos focos está ocupado por el Sol.



Una recta trazada desde un planeta hasta el Sol barre áreas iguales en iguales intervalos de tiempo.

Los cuadrados de los períodos de revolución de dos planetas cualesquiera alrededor del Sol son proporcionales a los cubos de sus distancias medias al Sol.

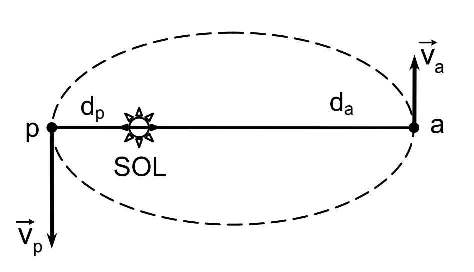


$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$$

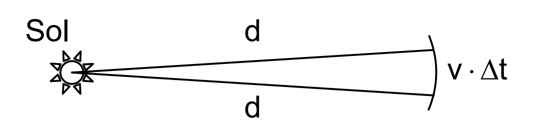
Estudiemos algunas ilustraciones de estas leyes:

- Cuando un planeta describe su órbita elíptica alrededor del Sol pasa por el punto más cercano al Sol, el perihelio, y por el más lejano, el afelio, con distinta velocidad.

Las rapideces v_a y v_p en afelio y perihelio, están relacionadas a las distancias d_a y d_p del planeta al Sol en tales puntos.



Consideremos un "pequeño" intervalo de tiempo Δt que incluya el instante en que pasa por uno de esos puntos. Aproximadamente el arco recorrido con rapidez v es $v\Delta t$ y el área del sector correspondiente es:



$$\frac{1}{2} \cdot d \cdot v \Delta t$$

De acuerdo a la segunda ley de Kepler, cuando los intervalos de tiempo son iguales, la recta del Sol al planeta *barre áreas* iguales y por tanto para afelio y perihelio resulta:

$$\frac{1}{2}\, d_a \cdot v_a \cdot \Delta t = \frac{1}{2}\, d_p \cdot v_p \cdot \Delta t$$

esto es:

$$d_a \cdot v_a = d_p \cdot v_p \qquad \text{o bien} \qquad v_a / v_p = d_p / d_a$$

lo que muestra que las rapideces en el afelio y el perihelio son inversamente proporcionales a las distancias de esos puntos al Sol.

- Para Mercurio, las distancias al Sol en afelio y en perihelio son $6{,}986 \cdot 10^7$ [km] y $4{,}604 \cdot 10^7$ [km] respectivamente. Su rapidez al pasar el perihelio es 58,92[km/s] , y al pasar por el afelio lo hace con una rapidez de:

$$v_a = \frac{d_p}{d_a} v_p \simeq \frac{4{,}604 \cdot 10^7 \text{ [km]}}{6{,}986 \cdot 10^7 \text{ [km]}} \cdot 58{,}92 \text{ [km / s]}$$

$$\simeq 38{,}83 \text{ [km / s]}$$

Al describir su órbita un planeta lo hace con rapidez variable, siendo la mínima en afelio y la máxima en perihelio.

- La ley de Kepler para los períodos de los planetas la podemos expresar algebraicamente en la forma:

$$T^2 = k \cdot d^3$$

siendo T el período de revolución, d la distancia media del planeta al Sol y k una constante.

Podemos controlar esta ley usando los siguientes datos, aproximados a 4 cifras significativas, para la Tierra y Plutón:

	Período	**Afelio**	**Perihelio**
Tierra	$3{,}156 \cdot 10^7$ [s]	$1{,}521 \cdot 10^{11}$ [m]	$1{,}471 \cdot 10^{11}$ [m]
Plutón	$7{,}837 \cdot 10^9$ [s]	$7{,}375 \cdot 10^{12}$ [m]	$4{,}443 \cdot 10^{12}$ [m]

La distancia media al Sol es el *promedio* de las distancias en afelio y perihelio, esto corresponde al *semieje mayor* de la órbita elíptica, por tanto:

$$\text{Tierra:} \quad d = 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ [m]}$$

$$\text{Plutón:} \quad d = 5{,}909 \cdot 10^{12} \text{ [m]}$$

Entonces:

$$\text{Tierra:} \quad \frac{T^2}{d^3} = \frac{\left(3{,}156 \cdot 10^7\right)^2}{\left(1{,}496 \cdot 10^{11}\right)^3} [s^2/m^3] \simeq 2{,}975 \cdot 10^{-19} [s^2/m^3]$$

$$\text{Plutón:} \quad \frac{T^2}{d^3} = \frac{\left(7{,}837 \cdot 10^9\right)^2}{\left(5{,}909 \cdot 10^{12}\right)^3} [s^2 / m^3] \simeq 2{,}977 \cdot 10^{-19} [s^2 / m^3]$$

lo que muestra efectivamente que T^2/d^3 es una constante.

Algunos datos, aproximados a 3 cifras, sobre el Sistema Solar se presentan en la siguiente tabla

Planeta	d_s [m]	T [s]	M [kg]	R_e [m]	g_0 [m / s^2]
Mercurio	$5{,}80 \cdot 10^{10}$	$7{,}60 \cdot 10^6$	$3{,}30 \cdot 10^{23}$	$2{,}44 \cdot 10^6$	3,58
Venus	$1{,}09 \cdot 10^{11}$	$1{,}94 \cdot 10^7$	$4{,}87 \cdot 10^{24}$	$6{,}05 \cdot 10^6$	8,87
Tierra	$1{,}50 \cdot 10^{11}$	$3{,}16 \cdot 10^7$	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	$6{,}38 \cdot 10^6$	9,80
Marte	$2{,}28 \cdot 10^{11}$	$5{,}94 \cdot 10^7$	$6{,}42 \cdot 10^{23}$	$3{,}40 \cdot 10^6$	3,74
Júpiter	$7{,}78 \cdot 10^{11}$	$3{,}74 \cdot 10^8$	$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$7{,}15 \cdot 10^7$	26,50
Saturno	$1{,}43 \cdot 10^{12}$	$9{,}30 \cdot 10^8$	$5{,}69 \cdot 10^{26}$	$6{,}05 \cdot 10^7$	11,17
Urano	$2{,}87 \cdot 10^{12}$	$2{,}65 \cdot 10^9$	$8{,}68 \cdot 10^{25}$	$2{,}56 \cdot 10^7$	10,49
Neptuno	$4{,}50 \cdot 10^{12}$	$5{,}20 \cdot 10^9$	$1{,}02 \cdot 10^{26}$	$2{,}49 \cdot 10^7$	13,25

d_s : distancia media al Sol

T : período de revolución

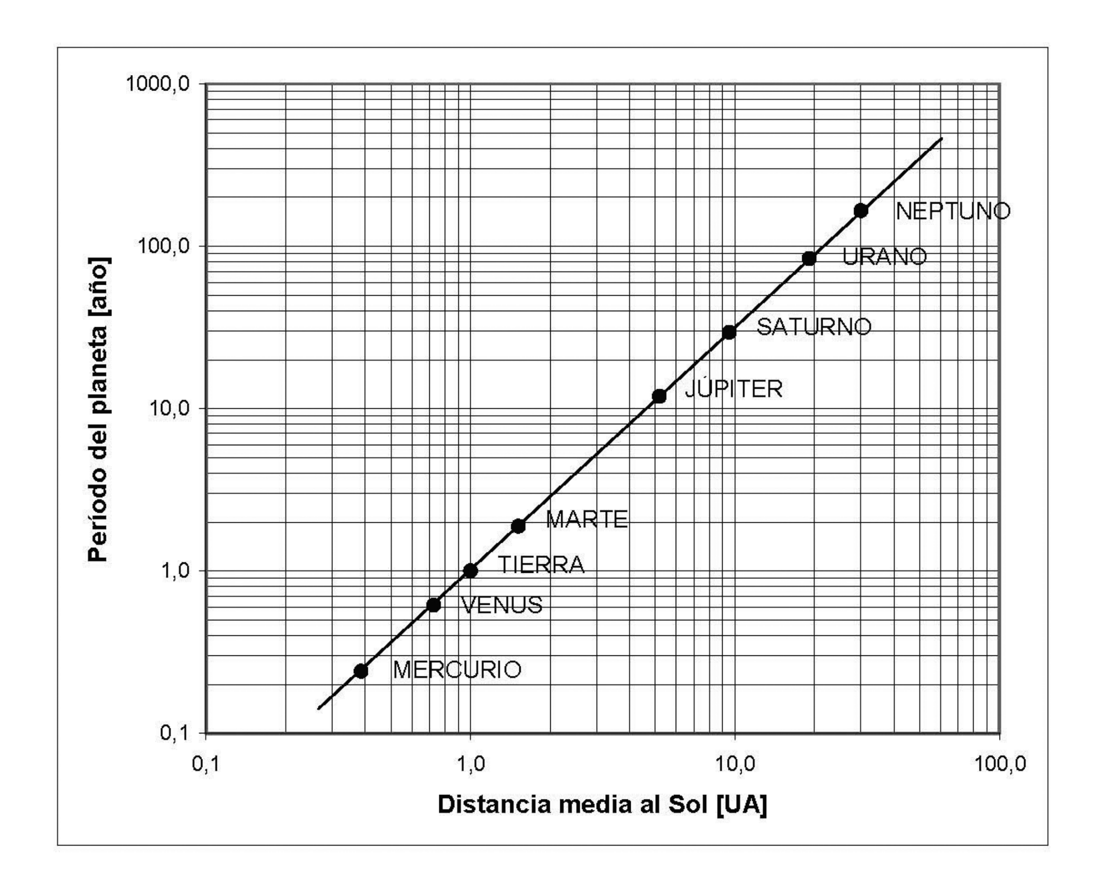
M : masa del planeta

R_e : radio ecuatorial del planeta.

g_0 : valor medio de la aceleración de gravedad en la superficie del planeta

M_S : $1{,}99 \cdot 10^{30}$ [kg] masa del Sol.

En el gráfico siguiente se representa el período de revolución en función de la distancia media al Sol usando “escalas de potencia de 10” (escala log-log). Observe que en tal representación los valores correspondientes a los diferentes planetas están sobre una misma recta:



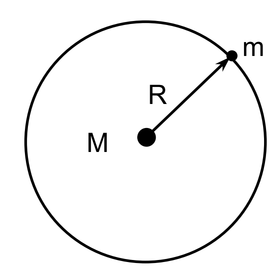
Ley de Kepler de los períodos

Kepler obtuvo sus tres leyes empíricamente. Newton mediante las leyes generales del movimiento más la ley de gravitación fue capaz de deducirlas teóricamente, confirmando así la validez de su ley de gravitación.

Apliquemos la ley gravitacional de Newton a un movimiento circunferencial y deduzcamos, en este caso particular, la ley de Kepler de los períodos:

Consideremos un cuerpo de masa m que describe una trayectoria circunferencial de radio *R* debido a la atracción gravitacional de otro cuerpo de masa M, mucho mayor que m, que se encuentra en el centro de la circunferencia.

Si pensamos que en cierto instante dejara de actuar la atracción gravitacional sobre el cuerpo m, durante un pequeño intervalo de tiempo Δt el cuerpo se desplazaría una distancia:



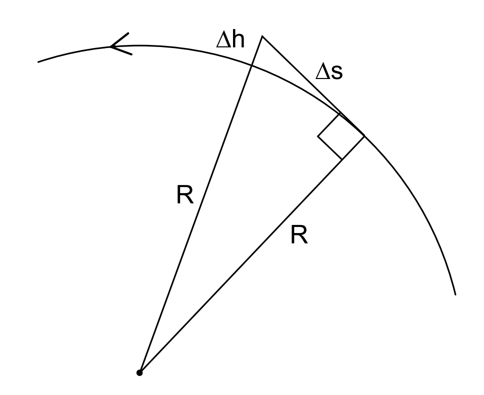
$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

en línea recta tangencial a la circunferencia, siendo v la rapidez de m.

Pero, para mantener la trayectoria circunferencial la atracción debida a M haría "caer" el cuerpo m con una aceleración de magnitud a_c en:

$$\Delta h = \frac{1}{2} a_c \cdot (\Delta t)^2$$

durante ese mismo intervalo Δt



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la figura anterior obtenemos:

$$R^2 + (\Delta s)^2 = (R + \Delta h)^2 = R^2 + 2R \cdot \Delta h + (\Delta h)^2$$

$$(\Delta s)^2 = 2R \cdot \Delta h + (\Delta h)^2$$

y usando en esta expresión $\Delta s = v \cdot \Delta t$ y $\Delta h = \frac{1}{2} a_c (\Delta t)^2$ resulta:

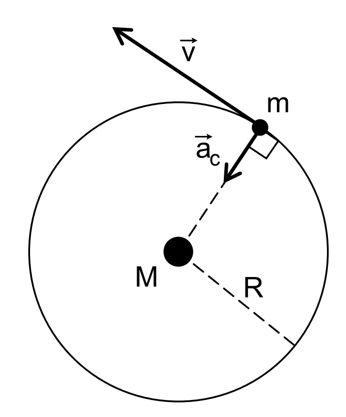
$$(v \cdot \Delta t)^2 = 2R \cdot \frac{1}{2} a_c \cdot (\Delta t)^2 + \frac{1}{4} \cdot a_c^2 \cdot (\Delta t)^4$$

$$v^2 = a_c R + \frac{a_c^2}{4} \cdot (\Delta t)^2$$

Si el intervalo de tiempo Δt es muy pequeño, al hacerlo "tender a cero" obtenemos que:

la magnitud de la aceleración producida por la fuerza de gravedad para mantener un cuerpo de masa m describiendo una órbita circunferencial de radio R con rapidez constante v es:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$



El valor de esta aceleración está determinado por:

$$F_{grav} = G \frac{m \cdot M}{R^2} = m\, a_c$$

dando:

$$a_c = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Al combinar ambas expresiones para a_c obtenemos:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

esto es, para el radio y la rapidez con que el cuerpo describe una órbita circunferencial se cumple la relación:

$$R \cdot v^2 = G \cdot M$$

El período de revolución T para un cuerpo en una órbita circunferencial está determinado por:

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

por lo cual:

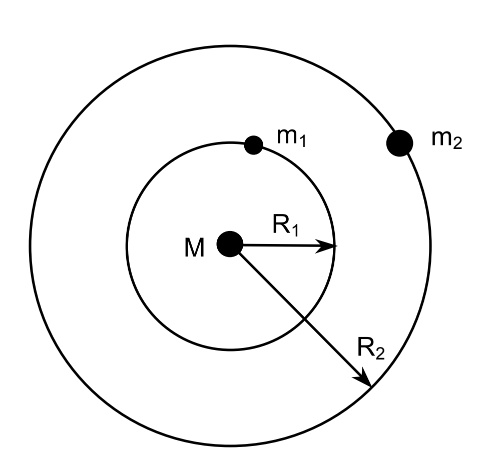
$$T^2 = \frac{(2\pi \cdot R)^2}{v^2} = \frac{4\pi^2 \cdot R^2}{v^2} \cdot \frac{R}{R} = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot R^3$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3$$

Si consideramos dos objetos describiendo distintas órbitas circunferenciales alrededor de un mismo cuerpo, las relaciones para los respectivos períodos y radios de las órbitas son:

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_1^3$$

$$T_2^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_2^3$$



De lo cual se deduce la ley de Kepler de los períodos:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3},$$

relación que es independiente de la masa de los cuerpos.

Ejemplos

- Sabiendo que el período de revolución de la Luna alrededor de la Tierra es $2{,}36 \cdot 10^6 \left[s \right]$ y que el radio orbital de la Luna es de $3{,}84 \cdot 10^5 \left[km \right]$, calcule la masa de la Tierra.

Se ha deducido que:

$$T_L^2 = \frac{4\pi^2 R_L^3}{G \cdot M_T}$$

por tanto:

$$M_T = \frac{4\pi^2 R_L^3}{G \cdot T_L^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(3{,}84 \cdot 10^8\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(2{,}36 \cdot 10^6\right)^2} \simeq 6 \cdot 10^{24} \left[kg \right]$$

valor aceptable si se toma en cuenta las aproximaciones efectuadas. Se da como masa de la Tierra el valor $5{,}97 \cdot 10^{24} \left[kg \right]$.

- Calcule la altura sobre la línea ecuatorial a que debe ser colocado un satélite de comunicaciones para que permanezca fijo en su posición respecto a la Tierra.

La condición del problema implica que el período del satélite debe ser de “un día”:

$$T_S = 1 \left[d \right]$$

La ley de Kepler de los períodos nos permite relacionar los valores del período y del radio de revolución del satélite artificial con los valores correspondientes al satélite natural de la Tierra, la Luna.

Usemos como datos aproximados: período lunar $T_L \simeq 27 \left[\text{día} \right]$ y radio de la órbita lunar $R_L \simeq 60 R_T$, siendo $R_T \simeq 6{,}4 \cdot 10^3 \left[km \right]$ el radio de la Tierra.

Entonces el radio de la órbita del satélite R_S queda determinado por:

$$\left(\frac{T_S}{T_L} \right)^2 = \left(\frac{R_S}{R_L} \right)^3$$

$$R_S = \left(\frac{T_S}{T_L} \right)^{2/3} \cdot R_L \; ; \; \left(\frac{1\left[\text{día} \right]}{27\left[\text{día} \right]} \right)^{2/3} \cdot 60 R_T = \frac{60}{9} R_T$$

y la altura h_S del satélite sobre la línea ecuatorial es:

$$h_S = R_S - R_T \simeq \left(\frac{60}{9} - 1\right) \cdot R_T \simeq \frac{51}{9} \cdot 6400\left[km\right]$$
$$\approx 3{,}6 \cdot 10^4 \left[km\right]$$

El primer satélite de este tipo, el Syncom 2, fue colocado con éxito en 1963 y tuvo como altura media 35.710 [km], en una órbita prácticamente circular.

Ejercicios

9-58) Los valores mínimo y máximo de la rapidez de la Tierra en su órbita son $2{,}94 \cdot 10^6$ [cm/s] y $3{,}06 \cdot 10^6$ [cm/s], respectivamente. Calcule la razón entre la distancia máxima y mínima de la Tierra al Sol.

9-59) Un satélite artificial terrestre describe una órbita cuyo perigeo y apogeo están, respectivamente, a 100[km] y a 500[km] sobre la superficie de la Tierra. Calcule la razón entre las rapideces del satélite en tales puntos.

9-60) Las distancias extremas de Marte al Sol son $2{,}49 \cdot 10^8$ [km] y $2{,}07 \cdot 10^8$ [km]. Calcular su rapidez máxima, sabiendo que su rapidez mínima es 21,96[km/s].

9-61) Considere dos satélites artificiales en órbita a la Tierra. El satélite S_1 describe una órbita perfectamente circular a 500[km] de altura sobre la Tierra y el S_2 describe una órbita elíptica tal que, su altura mínima sobre la Tierra es 400[km], mientras que su altura máxima sobre la Tierra es 600[km]. ¿En qué razón están los períodos de revolución de estos satélites?

9-62) Los períodos de los satélites Mimas y Titán de Saturno son $8{,}18 \cdot 10^4$ [s] y $1{,}38 \cdot 10^6$ [s], respectivamente. Si sus distancias medias a Saturno son respectivamente $1{,}82 \cdot 10^5$ km] y $1{,}23 \cdot 10^6$ [km] compruebe la ley de Kepler de los períodos.

9-63) Europa, satélite de Júpiter, tiene una distancia media a ese planeta de $6{,}71 \cdot 10^5$ [km] y un período de revolución de $3{,}07 \cdot 10^5$ [s]. Poseidón, también satélite de Júpiter, tiene un período de $6{,}38 \cdot 10^7$ [s]. Calcular la distancia media de Poseidón a Júpiter.

9-64) El semieje mayor de la órbita del primer satélite artificial de la Tierra, el Sputnik **I**, era 400[km] menor que el semieje mayor de la del Sputnik **II**. El período de rotación del Sputnik **I** alrededor de la Tierra, recién puesto en órbita era de 96,2[min]. Hallar la magnitud del eje mayor de la órbita del Sputnik **II** y su período de revolución alrededor de la Tierra.

9-65) Comparar la aceleración del Sol hacia la Tierra debido a la atracción terrestre, con la aceleración de la Tierra hacia el Sol debido a la atracción gravitacional solar.

9-66) Calcule la rapidez que debe tener un satélite terrestre para que describa una órbita circular en torno a la Tierra a 400[km] de altitud. Calcule el período de rotación y la rapidez angular de ese satélite.

9-67) ¿Puede un satélite cuya rapidez es 100[km/h] estar en órbita circunferencial en torno a la Tierra?

9-68) Si la Luna tuviera dos veces su masa actual, pero se moviera en la misma órbita que lo hace ahora, ¿cuál sería su período de revolución?

9-69) Si la rapidez orbital de la Luna fuera duplicada, manteniéndose ella en una órbita circular, ¿cuál debería ser el radio de esta nueva órbita? ¿Cuál sería el nuevo período de revolución?

9-70) Calixto, satélite de Júpiter, tiene un período de revolución de $1{,}442 \cdot 10^{6}$ [s] y su distancia media al planeta es $1{,}87 \cdot 10^{6}$ [km]. Usando sólo estos datos y la constante gravitacional, calcule la masa de Júpiter.

9-71) Dos satélites giran alrededor de diferentes planetas a la misma distancia media R. Uno de los satélites tiene un período igual a tres veces el del otro. Calcular la razón entre las masas de los planetas.

9-72) Si el radio de la órbita de un planeta A fuera el doble que el de un planeta B, calcule las razones de sus períodos, de sus rapideces orbitales y de sus aceleraciones hacia el Sol.

9-73) Se ha encontrado que nuestra galaxia está rodeada por varias galaxias enanas. Por variadas razones se supone que están ligadas gravitacionalmente a nuestra galaxia. Consideremos una de ellas llamada Sculptor. Su distancia al centro de nuestra galaxia es de $2, \cdot 10^{23} \left[\text{cm}\right]$. La masa de dicha galaxia es de $3, \cdot 10^{6}$ veces la del Sol. La masa de nuestra galaxia es aproximadamente $4, \cdot 10^{6}$ veces la del Sol. Suponga que la galaxia Sculptor orbita circularmente en torno a la nuestra. Calcule el período de revolución y la velocidad orbital de Sculptor.

9-74) Considere los siguientes datos de algunos de los primeros satélites artificiales de la Tierra:

Satélite	Año	Masa [kg]	Periodo [min]	Altitud [km]	
				Perigeo	Apogeo
Sputnik 1	1957	83	96,2	229	946
Explorer 7	1958	14	114,8	360	2531
Vostok 1	1961	4725	89,3	175	303
Midas 3	1961	1588	161,5	3426	3465
Aloutte 1	1962	145	105,4	998	1030
Luna 4	1963	1422	42000,0	90123	700064
Syncom 2	1963	39	1430,4	35707	35715

Use estos datos para controlar si en el movimiento de los satélites artificiales se cumple la ley de Kepler de los períodos. Construya un gráfico del período de revolución en función de la distancia media al centro de la Tierra, análogo al construido para los planetas.

Interacción electrostática

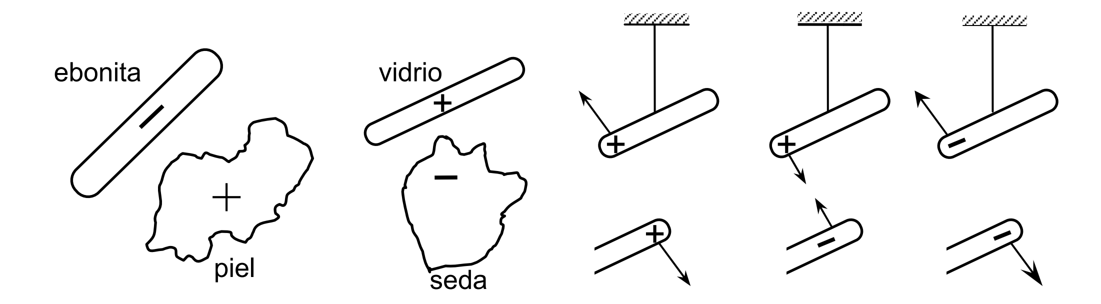
Hemos mencionado que las fuerzas entre átomos y moléculas son esencialmente manifestaciones de la interacción electromagnética. Numerosos fenómenos, como los luminosos, la transmisión de radio, televisión y radar, el análisis por rayos X y otros, dependen de la interacción electromagnética. Trataremos a continuación sólo de interacciones entre partículas eléctricamente cargadas que están en reposo respecto a un observador que mide estas interacciones.



Seguramente usted ha realizado en múltiples ocasiones el siguiente experimento: ha frotado un lápiz de plástico y al acercarlo a pequeños pedacitos de papel observó que fueron atraídos por el lápiz. También usted debe haber observado chispas que saltan al sacarse prendas de vestir de fibras sintéticas. En ambos casos se ha encontrado con efectos de la interacción eléctrica. Ya en el siglo VII A.C., en Grecia, se había detectado que el ámbar frotado atraía trozos de paja colocados en su vecindad.

Para describir la interacción eléctrica se introdujo en Física el concepto de **carga eléctrica**.

Diversas experiencias con cuerpos que han sido frotados, realizadas ya en el siglo XVII muestran que, dependiendo de los materiales empleados, los cuerpos se atraen o se repelen. Este doble efecto entre los cuerpos así electrizados se explica diciendo que al frotar un cuerpo éste adquiere una u otra de dos clases de cargas eléctricas, llamadas positiva y negativa. Las mismas experiencias permiten concluir que cuerpos electrizados con cargas del mismo signo se repelen y de distinto signo se atraen.



La carga eléctrica es una de las propiedades características de las partículas fundamentales. Se ha determinado experimentalmente que las partículas detectadas a la fecha tienen carga eléctrica, positiva o negativa, de igual valor absoluto que la del electrón o que son eléctricamente neutras (carga cero).

carga del electrón = $-e$
carga del protón = e
carga del neutrón = 0

donde e representa la **carga elemental** cuyo valor es

$$e = \left(1{,}602176487 \pm 0{,}000000040\right) \cdot 10^{-19}\left[C\right] \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\left[C\right]$$

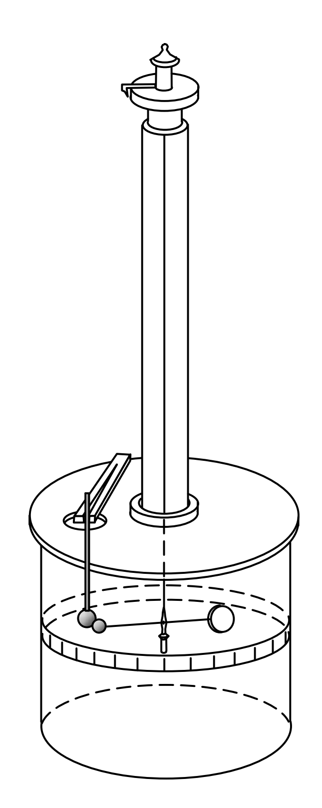
Hemos usado la unidad de carga eléctrica:

Un Coulomb . . . . . 1 [C] ,

que es la unidad incorporada en el Sistema Internacional de Unidades de Medición.

El hecho de cargar un cuerpo se explica como una transferencia de partículas con carga eléctrica. Por ejemplo, si una barra de ebonita se frota con un trozo de piel, se transfieren electrones desde la piel a la ebonita, quedando ésta con un exceso de carga negativa y la piel con un defecto de carga negativa, es decir, la carga neta en la ebonita es negativa y en la piel es positiva. Cargar un cuerpo no es crear cargas eléctricas. Es un principio en Física que la carga eléctrica se conserva; la suposición que la carga del Universo es constante e igual a cero está de acuerdo con las observaciones y teorías cosmológicas actuales.

Ley de Coulomb



Mediante cuidadosos experimentos, Coulomb logró obtener una *ley de fuerzas* para la interacción entre dos pequeñas esferas metálicas cargadas. En sus experimentos controló la magnitud de las cargas de las esferas poniéndolas en sucesivos contactos con otras esferas iguales y descargadas, suponiendo que así obtenía reducciones de las cargas iniciales a la mitad, cuarta parte, etc. Para medir la magnitud de la fuerza de interacción electrostática usó una balanza de torsión. La ley de interacción electrostática formulada por Coulomb es:

$$F = k_c \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

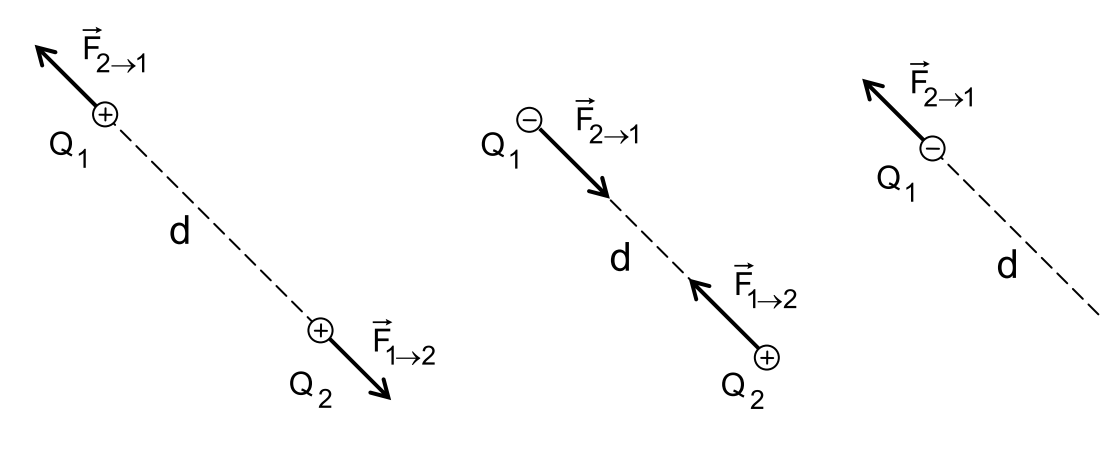
siendo:

F : la magnitud de la fuerza de interacción

$|Q_1|$ y $|Q_2|$: los valores absolutos de las cargas de las pequeñas esferas.

d: la distancia entre los centros de las esferas.

k_c: una constante; su valor depende del sistema de unidades usado.



En cada una de las situaciones ilustradas se cumple:

$$\vec{F}_{2\to1} = -\vec{F}_{1\to2} \quad \Rightarrow \quad \left\|\vec{F}_{2\to1}\right\| = \left\|\vec{F}_{1\to2}\right\|$$

Note que la ley de Coulomb, presentada por él a la Academia de Ciencias de Francia en 1785, tiene similar estructura matemática que la ley de gravitación universal de Newton. Estrictamente, la ley de Coulomb rige para *cargas puntuales* o *partículas cargadas* en reposo relativo. Su validez se mantiene aún en situaciones atómicas y subatómicas.

Usando las unidades del Sistema Internacional de Medidas, 1[m] para distancia, 1[N] para fuerza y 1[C] para carga eléctrica, la constante k_c en la ley de Coulomb queda definida en función de la velocidad de propagación de la luz en el vacío como:

$$k_c = 10^{-7}\left[\frac{N\,s^2}{C^2}\right]\cdot c^2 = 8.987.551.787,4...\left[\frac{Nm^2}{C^2}\right]$$

Para cálculos es suficiente usar el valor aproximado:

$$k_c \simeq 9,0\cdot 10^9\left[N\cdot m^2/C^2\right]$$

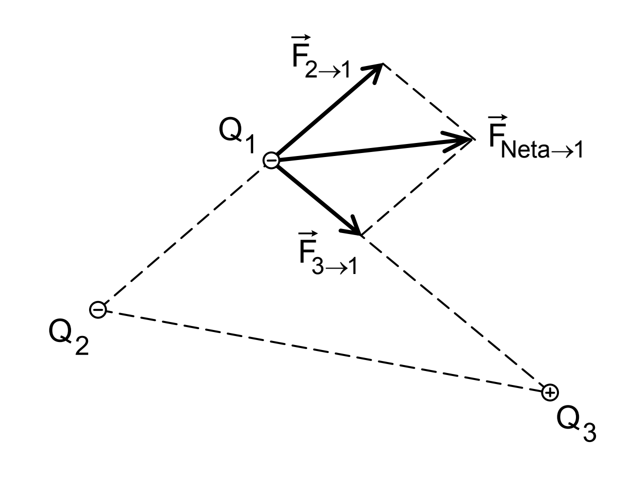
Considerando que, $\dim(\text{tiempo}) = \mathcal{T}$, $\dim(\text{longitud}) = \mathcal{L}$, $\dim(\text{masa}) = \mathcal{M}$ y $\dim(\text{carga}) = \mathcal{C}$;

de la ley $F = k_c \cdot \left|Q_1 \cdot Q_2\right| / d^2$

obtenemos que $\dim(k_C) = \mathcal{T}^{-2}\mathcal{L}^3\mathcal{M}\mathcal{C}^{-2}$

Hacemos notar que se ha comprobado experimentalmente que al interactuar más de dos cargas en reposo, la fuerza coulombiana neta sobre una de ellas es la **superposición** de las fuerzas ejercidas separadamente por cada una de las otras cargas sobre esa carga considerada.

Por ejemplo, si tenemos tres objetos cargados en reposo que interactúan entre sí, la fuerza eléctrica neta que actúa sobre Q_1 es la superposición o suma vectorial:



$$\vec{F}_{neta\to 1} = \vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_{3\to 1}$$

donde:

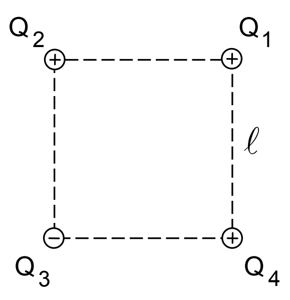
$\vec{F}_{2\to 1}$ es la fuerza coulombiana que la carga Q_2 ejerce sobre Q_1

$\vec{F}_{3\to 1}$ es la fuerza coulombiana que la carga Q_3 ejerce sobre Q_1

La solución para casos de más de tres cargas es análoga.

Ejemplos

- En cada vértice de un cuadrado de 2,0[cm] de lado están colocados pequeños cuerpos con cargas:

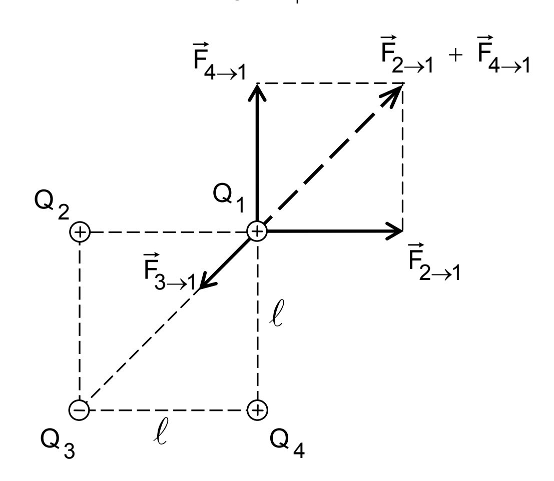


$$Q_1 = 3,6 \cdot 10^{-7}\left[C\right] \quad , \quad Q_2 = Q_4 = 4,1 \cdot 10^{-7}\left[C\right] \text{ y}$$

$$Q_3 = -3,2 \cdot 10^{-7}\left[C\right].$$

Calcule la magnitud y dirección de la fuerza eléctrica resultante sobre la carga Q_1.

Sean $\vec{F}_{2\to1}$, $\vec{F}_{3\to1}$ y $\vec{F}_{4\to1}$ las fuerzas que actúan sobre Q_1 debido a Q_2, Q_3 y Q_4 respectivamente.



Aplicando la ley de Coulomb:

$$F = k_c \frac{\left|Q_a\right| \cdot \left|Q_b\right|}{\left(d_{a,b}\right)^2}$$

para las magnitudes de cada una de esas interacciones resulta:

$$F_{2\to1} = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(3,6 \cdot 10^{-7}\right)\cdot\left(4,1 \cdot 10^{-7}\right)}{\left(2,0 \cdot 10^{-2}\right)^2} \simeq 3,3\left[N\right]$$

$$F_{3\to1} = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(3,6 \cdot 10^{-7}\right)\cdot\left(3,2 \cdot 10^{-7}\right)}{\left(\sqrt{2} \cdot 2,0 \cdot 10^{-2}\right)^2} \simeq 1,3\left[N\right]$$

$$F_{4\to1} = 9,0 \cdot 10^9 \cdot \frac{\left(3,6 \cdot 10^{-7}\right)\cdot\left(4,1 \cdot 10^{-7}\right)}{\left(2,0 \cdot 10^{-2}\right)^2} \simeq 3,3\left[N\right]$$

La fuerza electrostática neta que actúa sobre Q_1 es igual a:

$$\vec{F}_{neta\to1} = \vec{F}_{2\to1} + \vec{F}_{3\to1} + \vec{F}_{4\to1}$$

Dado que $\vec{F}_{2\to1}$ y $\vec{F}_{4\to1}$ tienen igual magnitud y son perpendiculares, resulta que $\vec{F}_{2\to1}+\vec{F}_{4\to1}$ tiene dirección opuesta que $\vec{F}_{3\to1}$ y por tanto:

$$F_{neta\to1}=\left\|\vec{F}_{neta\to1}\right\| = \left|\ \left\|\vec{F}_{2\to1}+\vec{F}_{4\to1}\right\|-\left\|\vec{F}_{3\to1}\right\|\ \right|$$

$$=\left|\sqrt{\left(F_{2\to1}\right)^2+\left(F_{4\to1}\right)^2}-F_{3\to1}\right| = \left|\sqrt{2F^2{}_{2\to1}}-F_{3\to1}\right|$$

$$=\left(\sqrt{2\cdot3{,}3^2}-1{,}3\right)\left[N\right]\simeq 3{,}4\left[N\right]$$

La dirección de $\vec{F}_{neta\to1}$ forma un ángulo de 135° con el trazo determinado por las partículas con cargas Q_1 y Q_4.

- Dos pequeños cuerpos fijos y separados 16[cm], tienen cargas $Q_1=9{,}0\cdot10^{-6}\left[C\right]$ y $Q_2=-4{,}0\cdot10^{-6}\left[C\right]$. Calcule a qué distancia de Q_2 hay que colocar un tercer cuerpo con carga Q_3, de modo que quede en equilibrio.

Sobre la carga Q_3 actúan dos fuerzas $\vec{F}_{1\to3}$ y $\vec{F}_{2\to3}$, debido a sus interacciones con las cargas Q_1 y Q_2 respectivamente. Para que la carga Q_3 quede en reposo, la suma de estas fuerzas debe ser nula; esto es:

$$\vec{F}_{neta\to3}=\vec{F}_{1\to3}+\vec{F}_{2\to3}=0$$

Las direcciones de tales fuerzas dependen del signo de las cargas; sus magnitudes, según la ley de Coulomb, dependen de los valores absolutos de las cargas y de las distancias que las separan:

$$F_{1\to3}=k_c\,\frac{\left|Q_3\right|\cdot\left|Q_1\right|}{\left(d_{3,1}\right)^2} \qquad \text{y} \qquad F_{2\to3}=k_c\,\frac{\left|Q_3\right|\cdot\left|Q_2\right|}{\left(d_{3,2}\right)^2}$$

Debemos por tanto hacer un estudio previo para determinar la posibilidad física de que Q_3 pueda estar en equilibrio en el trazo que une las cargas Q_1 y Q_2, o en la prolongación de ese trazo.

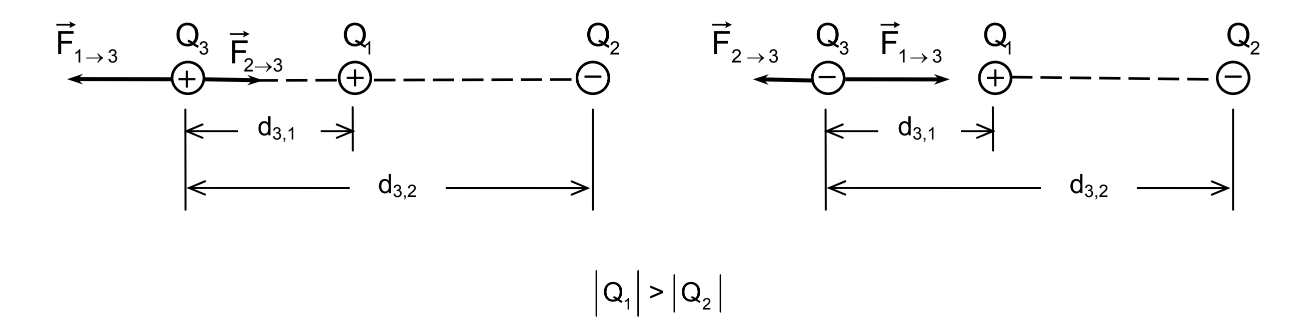
Veamos qué ocurre si intentamos colocar Q_3 entre las dos cargas:

Q_1 Q_3 $\vec{F}_{1\to3}$ Q_2
$\vec{F}_{2\to1}$
$d_{3,1}$ $d_{3,2}$

Q_1 $\vec{F}_{1\to3}$ Q_3 Q_2
$\vec{F}_{2\to3}$
$d_{3,1}$ $d_{3,2}$

Si Q_3 es positiva, resulta repelida por Q_1 y atraída por Q_2. Si Q_3 es negativa, ella es atraída por Q_1 y repelida por Q_2. Luego, como para cada caso las respectivas fuerzas tienen igual dirección, no es posible encontrar un punto entre las cargas Q_1 y Q_2 de modo que ellas mantengan en equilibrio a Q_3.

Si intentamos colocar Q_3 a la izquierda de Q_1:



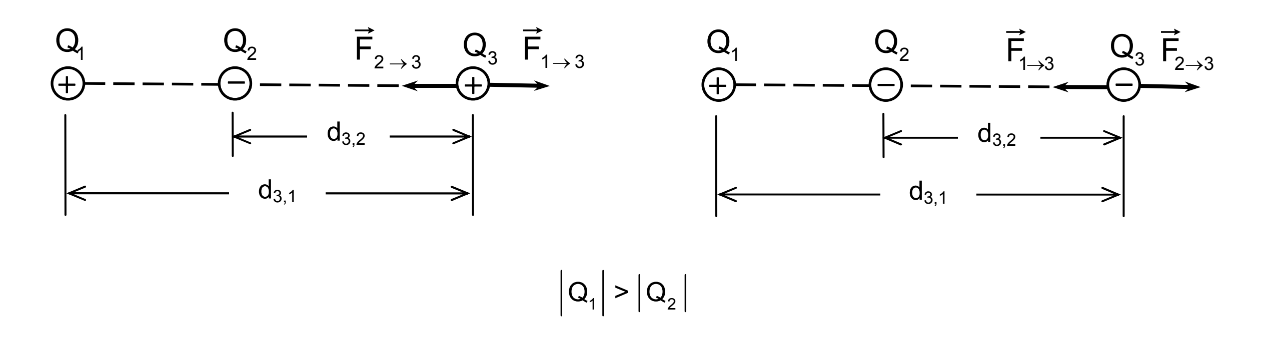
$$|Q_1| > |Q_2|$$

resulta que la magnitud de la fuerza de repulsión o atracción producida por Q_1 es siempre mayor que la magnitud de la fuerza de atracción o repulsión producida por Q_2 ya que:

$$|Q_1| > |Q_2| \quad \text{y} \quad d_{3,1} < d_{3,2} \;\rightarrow\; F_{1\rightarrow 3} > F_{2\rightarrow 3} \quad \text{según la ley de Coulomb.}$$

Por tanto no se logra el equilibrio al colocarla en dicha posición.

Finalmente, estudiemos la situación en que Q_3 esté a la derecha de Q_2:



$$|Q_1| > |Q_2|$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones para las magnitudes de las fuerzas

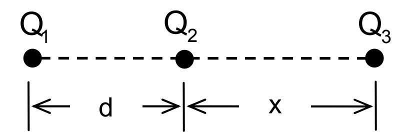
$$F_{1\rightarrow 3} = k_c \frac{|Q_3|\cdot|Q_1|}{(d_{3,1})^2} \qquad \text{y} \qquad F_{2\rightarrow 3} = k_c \frac{|Q_3|\cdot|Q_2|}{(d_{3,2})^2}$$

obtenemos:

$$\frac{F_{1\to 3}}{F_{2\to 3}} = \frac{|Q_1|}{|Q_2|} \cdot \left(\frac{d_{3,2}}{d_{3,1}}\right)^2$$

En este caso, para que sea $\vec{F}_{1\to 3} + \vec{F}_{2\to 3} = 0$ es necesario que se cumpla que $F_{1\to 3} = F_{2\to 3}$, implicando:

$$\left|\frac{Q_1}{Q_2}\right| \cdot \left(\frac{d_{3,2}}{d_{3,1}}\right)^2 = 1$$



Hagamos:

$$d_{3,2} = x \quad y \quad d_{3,1} = d + x \,, \qquad \text{con } x > 0$$

y llamemos γ^2 al valor absoluto de la razón entre las cargas:

$$\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right| = \gamma^2 \,, \qquad \text{con } 0 < \gamma < 1 \quad \text{si } |Q_1| > |Q_2|$$

entonces:

$$\frac{1}{\gamma^2} \cdot \left(\frac{x}{d+x}\right)^2 = 1$$

$$x = \frac{\gamma}{1-\gamma} d$$

lo que nos indica que es posible encontrar una posición de equilibrio al colocar Q_3 a la derecha de Q_2 y que tal posición es independiente del signo de la carga Q_3.

Usando los datos numéricos $Q_1 = 9{,}0 \cdot 10^{-6}\left[C\right]$, $Q_2 = -4{,}0 \cdot 10^{-6}\left[C\right]$ y $d = 16\left[cm\right] \triangleq 0{,}16\left[m\right]$:

$$\gamma = \sqrt{\left|\frac{Q_2}{Q_1}\right|} = \sqrt{\left|\frac{-4{,}0 \cdot 10^{-6}[c]}{9{,}0 \cdot 10^{-6}[c]}\right|} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

de donde se puede obtener la distancia x:

$$x = \frac{2/3}{1/3} d = 2d = 0{,}32[m]$$

esto es, la carga Q_3 permanece en equilibrio al ser colocada a 32[cm] a la derecha de Q_2 en la prolongación del trazo que une a Q_1 y Q_2.

- En ciertos núcleos masivos (número másico A>200) se presenta el fenómeno de fisión espontánea, esto es, el núcleo se divide espontáneamente en varios fragmentos. Por ejemplo, el uranio $238\left({}_{92}U^{238}\right)$ se puede fisionar espontáneamente en

$$\text{itrio } 98\left({}_{39}Y^{98}\right), \quad \text{yodo } 139\left({}_{53}I^{139}\right) \;\text{ y }\; \text{un neutrón } \left({}_{0}n^{1}\right)$$

esto se puede escribir como:

$$ {}_{92}U^{238} \quad \rightarrow \quad {}_{39}Y^{98} + {}_{53}I^{139} + {}_{0}n^{1}$$

Suponiendo que "justo" después de la fisión los núcleos ${}_{39}Y^{98}$ y ${}_{53}I^{139}$ tienen sus centros a una distancia de $12[F]$, estime la magnitud de la fuerza de repulsión eléctrica entre ellos.

Dado que la carga de un núcleo de número atómico *Z* es *Ze*, positiva, la magnitud de la fuerza eléctrica entre los núcleos ${}_{39}Y^{98}$ y ${}_{53}I^{139}$ está dada, aproximadamente, por:

+39e   +53e

|← 12[F] →|

$$F_{Y\to I} \simeq k_c \frac{\left|Q_Y\right|\cdot\left|Q_I\right|}{d^2} = k_c \frac{(39e)\cdot(53e)}{d^2}$$

$$\simeq 9{,}0\cdot 10^9 \cdot \frac{39\cdot 53\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(12\cdot 10^{-15}\right)^2}\left[N\frac{m^2}{C^2}\cdot\frac{C\cdot C}{m^2}\right]$$

$$\simeq 3{,}3\cdot 10^3\,[N]$$

Con el objeto de adquirir cierto sentido físico de lo que puede significar una fuerza de esa magnitud actuando sobre núcleos, estimemos la rapidez que alcanzarían tales núcleos en unos $10^{-22}\,[s]$, tiempo que emplea la luz en recorrer una distancia de 30[F]. Supongamos, para tal estimación, que la interacción nuclear hubiese dejado de actuar, que la fuerza coulombiana se mantuviese constante en ese tiempo y que los fragmentos tuviesen rapidez despreciable al separarse, entonces;

$$v_Y \simeq a_y \Delta t = \frac{F_{I\to Y}}{m_Y}\Delta t \qquad \text{y} \qquad v_I \simeq \frac{F_{Y\to I}}{m_I}\Delta t$$

y usando como valores aproximados de las masas

$$m_Y \simeq 98\,[u] \qquad \text{y} \qquad m_I \simeq 139\,[u]$$

Resulta:

$$v_Y \simeq \frac{3,3 \cdot 10^3 \,[N]}{98 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}\,[kg]} \cdot 10^{-22}\,[s] \simeq 1,98 \cdot 10^6\,[m/s]$$

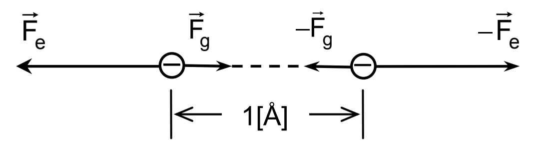
$$v_I \simeq \frac{3,3 \cdot 10^3 \,[N]}{139 \cdot 1,7 \cdot 10^{-27}\,[kg]} \cdot 10^{-22}\,[s] \simeq 1,40 \cdot 10^6\,[m/s]$$

de donde notamos que el orden de magnitud de estas rapideces corresponde a unos milésimos de la rapidez de propagación de la luz en el vacío.

- Suponga que dos electrones estuviesen en reposo a una distancia de 1[Å] . Compare la interacción *gravitacional* y la interacción *electrostática* entre ellos.

La masa y la carga del electrón son:
respectivamente:

$$m_e \simeq 9,1 \cdot 10^{-31}\,[kg]$$
$$q_e \simeq -1,6 \cdot 10^{-19}\,[C]$$



La magnitud de la fuerza de atracción gravitacional entre los electrones es:

$$F_g = G\frac{m_e \cdot m_e}{d^2} \simeq 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\left(9,1 \cdot 10^{-31}\right)^2}{\left(10^{-10}\right)^2}[N] \simeq 6, \cdot 10^{-51}\,[N]$$

La magnitud de la fuerza de repulsión electrostática entre los electrones es:

$$F_e = k_C \frac{|q_e| \cdot |q_e|}{d^2} \simeq 9,0 \cdot 10^9 \frac{\left(1,6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(10^{-10}\right)^2}[N] \simeq 2 \cdot 10^{-8}\,[N]$$

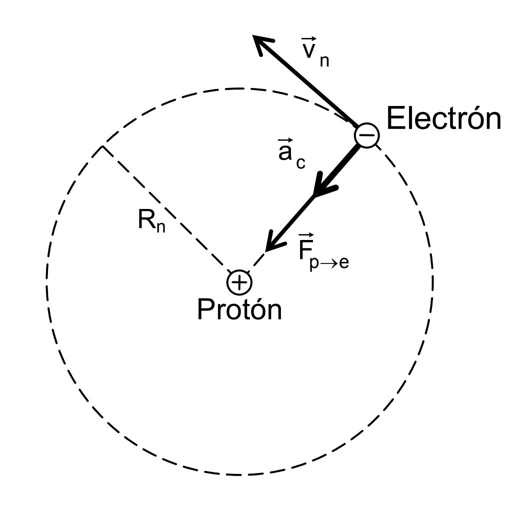
El cuociente entre las magnitudes de la fuerza gravitacional y la electrostática es:

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{6, \cdot 10^{-51}\,[N]}{2, \cdot 10^{-8}\,[N]} \sim 10^{-43}$$

Este resultado pone de manifiesto lo extremadamente "débil" que es la interacción gravitacional comparada con la interacción electrostática. Por tal razón la interacción gravitacional no influye en situaciones atómicas y nucleares.

Uno de los **modelos** más simplificados del átomo de hidrógeno es el ideado por Bohr. Supone que el electrón gira alrededor del núcleo, pudiendo describir sólo ciertas órbitas de radios determinados. Bohr postuló que para los radios R_n de tales órbitas debe cumplirse que $2\pi \cdot R_n \cdot m_e \cdot v_n = nh$ siendo m_e la masa del electrón, v_n la rapidez del electrón en la órbita de radio R_n, h la constante de Planck y n un entero positivo. Postuló además que para el electrón en cada una de esas órbitas rige la interacción coulombiana con el protón. Determine los valores posibles del radio de la órbita y la rapidez del electrón.

La fuerza de atracción eléctrica $\vec{F}_{p\to e}$ que el protón ejerce sobre el electrón produce la aceleración centrípeta $\vec{a}_c$ del electrón en órbita alrededor del protón, al que consideramos inmóvil. Entonces, usando la ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ obtenemos:



$$F_{p\to e} = m_e \cdot a_c$$

$$k_c \frac{|-e| \cdot e}{R_n^2} = m_e \cdot \frac{v_n^2}{R_n}$$

$$R_n \cdot v_n^2 = \frac{k_c \cdot e^2}{m_e}$$

Del postulado $2\pi R_n\, m_e\, v_n = nh$ escribimos:

$$R_n \cdot v_n = \frac{nh}{2\pi m_e}$$

Haciendo el cuociente de las ecuaciones para $R_n \cdot v_n^2$ y $R_n \cdot v_n$ resulta:

$$v_n = \frac{2\pi k_c \cdot e^2}{h} \cdot \frac{1}{n}$$

con lo cual:

$$R_n = \frac{h^2}{4\pi^2 \cdot k_c \cdot e^2 \cdot m_e} n^2$$

Usando los valores experimentales, aproximados:

$e \simeq 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,[C]$,	carga elemental
$m_e \simeq 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,[kg]$,	masa del electrón
$k_c \simeq 9{,}0 \cdot 10^{9}\,[N \cdot m^2/C^2]$,	constante de interacción coulombiana
$h \simeq 6{,}6 \cdot 10^{-34}\,[N \cdot m \cdot s]$,	constante de Planck

podemos calcular el menor radio (n = 1) de las órbitas del electrón en el modelo de Bohr:

$$R_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 \cdot k_c \cdot e^2 \cdot m_e}$$

$$\simeq \frac{\left(6,6 \cdot 10^{-34}\left[N \cdot m \cdot s\right]\right)^2}{4\pi^2 \cdot 9,0 \cdot 10^9 \left[N \cdot m^2 / C^2\right] \cdot \left(1,6 \cdot 10^{-19}\left[C\right]\right)^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}\left[kg\right]}$$

$$\simeq \frac{(6,6)^2 \cdot 10^{-68-9+38+31}}{4\pi \cdot 9,0 \cdot (1,6)^2 \cdot 9,1}\left[\frac{N^2 \cdot m^2 \cdot s^2}{N \cdot m^2 \cdot C^{-2} \cdot C^{+2} \cdot kg}\right]$$

$$\simeq \left(\frac{6,6}{2\pi \cdot 1,6}\right)^2 \cdot \frac{10^{-8}}{9,0 \cdot 9,1}\left[\frac{N \cdot s^2}{kg}\right]$$

$$\simeq 5,3 \cdot 10^{-11}\left[m\right] \simeq 0,53\left[Å\right]$$

este valor $R_1 \simeq 0,53$ [Å] nos informa del tamaño de un átomo de hidrógeno en su "estado fundamental".

Las expresiones obtenidas para los valores posibles del radio de la órbita y las correspondientes rapideces del electrón, permiten calcular las energías de los "estados permitidos" del átomo de hidrógeno y predecir el espectro de la luz emitida por él, que fue un objetivo de Bohr al construir su modelo atómico.

Ejercicios

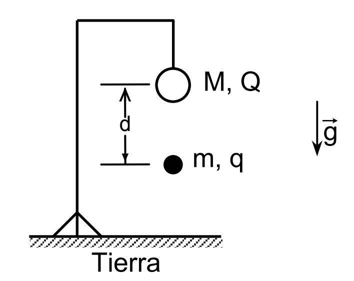
9-75) ¿Cuánto debería ser la separación entre los centros de dos esferas cargadas para que la magnitud de la fuerza coulombiana sea 1[N] si la carga neta en cada una de ellas fuera 1[C] ?

9-76) Determine el número de electrones en exceso que deben estar en la superficie de cada una de dos pequeñas esferas, cuya distancia es de 3[cm], para que la magnitud de la fuerza de repulsión eléctrica entre ellas sea de $5 \cdot 10^{-11}\left[N\right]$.

9-77) Cada una de dos pequeñas esferas está cargada positivamente. La suma de las cargas de ambas esferas totaliza $2,6 \cdot 10^{-8}\left[C\right]$. ¿Cuál es la carga de cada esfera si ellas se repelen con una fuerza de 3,0[dina] cuando la distancia entre sus centros es de 4,0[cm]?

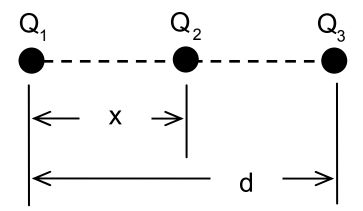
9-78) Un pequeño objeto con carga de -16 [nC] se coloca a 12[cm] de otro objeto con carga de 30[nC]. Calcule la magnitud, en dinas, de la fuerza coulombiana entre ellos.

9-79) Un cuerpo suspendido como se muestra en la figura adjunta tiene una carga Q negativa. Determine el valor y signo de la carga q de un cuerpo de masa m situado verticalmente debajo de Q a la distancia d para que no suba ni baje.



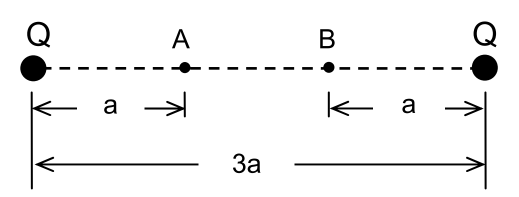
9-80) ¿Cómo y en cuánto debe alterarse la separación de dos objetos cargados para mantener la magnitud de la fuerza electrostática entre ellos constante, si la carga de uno de ellos se triplica y la carga del otro se reduce a la mitad?

9-81) Suponga que tres partículas eléctricamente cargadas están colocadas como se indica en la figura. La distancia *d* es constante. Las cargas de las partículas están relacionadas por $Q_2 = -Q_1$ y $Q_3 = 2Q_1$. Determine la posición de la partícula con carga Q_2 para que la fuerza electrostática resultante sobre ella sea nula.



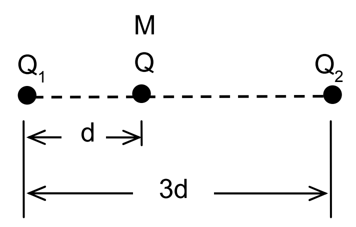
9-82) Dos esferas metálicas de 0,20[kg] de masa cada una, y con igual carga neta se hallan a cierta distancia entre sí. Calcule la carga de las esferas si a esa distancia la magnitud de la fuerza electrostática es un millón de veces mayor que la de la fuerza gravitacional entre ellas.

9-83) Dos cuerpos cuyas cargas Q son positivas e iguales están fijos a una distancia 3a. Un cuerpo con carga q experimenta una fuerza $\vec{F}_A$ al estar colocado en el punto A y una fuerza $\vec{F}_B$ en B . Exprese $\vec{F}_B$ en término de $\vec{F}_A$ cuando q es positiva y cuando es negativa.



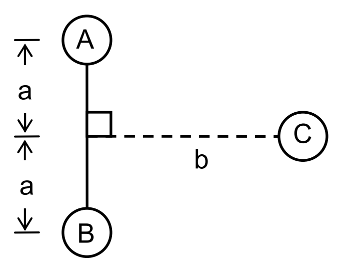
9-84) Considere dos partículas con cargas Q_1 y Q_2 situadas a una distancia dada. Discuta los signos que pueden tener Q_1 , Q_2 y una tercera carga Q_3 para que esta última tenga la posibilidad de quedar en equilibrio entre Q_1 y Q_2.

9-85) Dos partículas fijas a distancia 3d tienen cargas eléctricas $Q_1 = Ne$ y $Q_2 = 2Ne$, siendo N un entero positivo. Entre ellas se coloca otra partícula de masa M y carga eléctrica $Q = 3Ne$. Determine la aceleración (magnitud y dirección) de la partícula con carga Q en la posición indicada. ¿Cuál será la aceleración de esa partícula cuando esté a una distancia 2d de Q_1? ¿Dónde su aceleración será 0?



9-86) Se tienen dos pequeñas esferas con cargas positivas 4Q y Q respectivamente, separadas por una distancia a. ¿Dónde debería ponerse una tercera esferita y cuál debe ser el signo y el valor de su carga para que el sistema formado por las tres esferitas esté en equilibrio debido sólo a las fuerzas eléctricas?

9-87) Las tres esferitas A, B y C están fijas en las posiciones mostradas en la figura. La esfera C está positivamente cargada y las esferas A y B tienen cargas de igual valor absoluto. Determine la dirección de la fuerza eléctrica neta que actúa en la esfera C, cuando las cargas en A y B son ambas negativas, cuando son ambas positivas y cuando una es positiva y la otra es negativa.



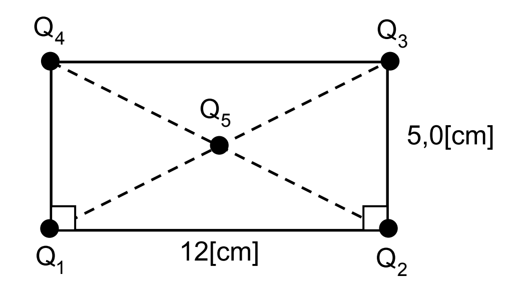
9-88) En la base de un triángulo equilátero de 2,0[cm] de lado hay tres partículas con cargas iguales a $1,6 \cdot 10^{-7}\left[C\right]$ cada una, situadas una en cada vértice y la tercera en el punto medio de la base. Determine la dirección y magnitud de la fuerza neta que actúa sobre una cuarta partícula con una carga de $3,2 \cdot 10^{-7}\left[C\right]$ y colocada en el tercer vértice, debida a la interacción eléctrica con las tres primeras partículas cargadas.

9-89) Las cargas indicadas en la figura adjunta tienen valores:

$$Q_1 = Q_2 = -3,9 \cdot 10^{-6}\left[C\right]$$

$$Q_3 = Q_4 = 1,7 \cdot 10^{-6}\left[C\right]$$

$$Q_5 = -3,2 \cdot 10^{-6}\left[C\right]$$



Calcule la magnitud y dirección de la fuerza neta que actúa sobre Q_5 debida a la interacción con las otras cuatro partículas cargadas.

9-90) Suponga que un electrón y un protón estuviesen en reposo a una distancia de 1[Å]. Compare la interacción gravitacional y la interacción electrostática entre ellos.

9-91) Calcule la fuerza de repulsión coulombiana entre los dos protones de una molécula de hidrógeno considerando que su separación es $0{,}74 \cdot 10^{-10}\left[m\right]$. Compárela, por cuociente, con la atracción gravitacional entre ellos.

9-92) El radium $\left({}_{88}Ra^{226}\right)$ decae radiactivamente en radón $\left({}_{86}Rn^{222}\right)$ emitiendo una partícula α $\left({}_{2}He^{4}\right)$. Calcule la fuerza de repulsión eléctrica entre el núcleo de Rn y la partícula α cuando están a $5 \cdot 10^{-11}\left[cm\right]$ de distancia y la correspondiente aceleración de la partícula α.

9-93) Una de las fisiones del uranio 235 inducida por neutrones es:

$${}_{0}n^{1} \;+\; {}_{92}U^{235} \;\rightarrow\; {}_{40}Zr^{99} \;+\; {}_{52}Te^{134} \;+\; 3\,{}_{0}n^{1}$$

Calcule aproximadamente la magnitud de la repulsión eléctrica entre los núcleos del circonio y del telurio inmediatamente después de la fisión.

9-94) La constante de Planck es $h = 6{,}626176 \cdot 10^{-34}\left[N \cdot m \cdot s\right]$. Exprese la dimensión de h en términos de las dimensiones de tiempo, longitud, masa y carga eléctrica.

9-95) Compruebe que según el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, la rapidez del electrón en la primera órbita $\left(n = 1\right)$ es aproximadamente $c/137$, siendo c la rapidez de propagación de la luz en vacío.

9-96) Calcule según los resultados del modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno el número de revoluciones por segundo que ejecutaría el electrón en torno al protón en la órbita más interna.

9-97) En el estudio del átomo de hidrógeno se obtienen las cantidades físicas

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot k_c \cdot e^2}{c \cdot h} \quad , \qquad E = \frac{-2\pi^2 \cdot k_c^2 \cdot m_e \cdot e^4}{h^2} \qquad y \qquad R = \frac{2\pi^2 \cdot k_c^2 \cdot m_e \cdot e^4}{c \cdot h^2}$$

donde m_e es la masa del electrón, e es el valor absoluto de la carga del electrón, k_c es la constante de interacción electrostática, h es la constante de Planck y c es la rapidez de propagación de la luz en el vacío. Determine las dimensiones de α, E y R. Calcule los valores de α, E y R usando el Sistema Internacional de Unidades.

Unidades de fuerza y de masa

A través del estudio realizado hemos ido introduciendo diversas cantidades físicas. A cada cantidad física le asociamos una correspondiente dimensión física como un símbolo que representa a la cantidad física independientemente de sus valores en casos particulares. Así, por ejemplo, la cantidad física tiempo tiene una dimensión única, bien determinada, la que simbolizamos por $\mathcal{T}$, la aceleración tiene una dimensión característica que anotamos $\dim(\text{aceleración}) = \mathcal{A}$. Se ha encontrado que es muy conveniente expresar las dimensiones de algunas cantidades físicas como combinación de las dimensiones de otras cantidades físicas, de este modo, decimos que $\dim(\text{rapidez}) = \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}^{-1}$. Esto nos lleva a agrupar las dimensiones en básicas y derivadas. La elección de las dimensiones básicas, en sí arbitraria, queda en parte condicionada por las características de algunas cantidades físicas que se presentan como naturalmente más simples o directas.

En Física se acostumbra a elegir como dimensiones básicas, entre otras, a las de tiempo, longitud y masa. En ingeniería, se usa a veces un sistema alternativo de unidades en el cual se escogen como fundamentales las dimensiones de tiempo, longitud y fuerza, pasando la masa a ser una dimensión derivada. Este sistema es llamado “Sistema Técnico de Unidades”.

Los dos sistemas se comparan en el siguiente diagrama.

	Sistema Físico		Sistema Técnico	
	Cantidad física	**Dimensión física**	**Cantidad física**	**Dimensión física**
BÁSICAS	tiempo	$\mathcal{T}$	tiempo	$\mathcal{T}$
	longitud	$\mathcal{L}$	longitud	$\mathcal{L}$
	masa	$\mathcal{M}$	fuerza	$\mathcal{F}$
DERIVADAS	fuerza	$\mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$	masa	$\mathcal{F}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{T}^{2}$
	velocidad	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$	velocidad	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-1}$
	aceleración	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$	aceleración	$\mathcal{L}\mathcal{T}^{-2}$
	densidad	$\mathcal{M}\mathcal{L}^{-3}$	densidad	$\mathcal{F}\mathcal{L}^{-4}\mathcal{T}^{2}$

Este cuadro, que es evidentemente incompleto, será ampliado cuando hablemos de manera especial de análisis de dimensiones de cantidades físicas.

Al usar conjuntos de unidades de medición en los que las unidades correspondientes a las cantidades físicas de tiempo, longitud y masa, se consideran independientes hablamos de *Sistemas Físicos de Unidades*. Análogamente, si las unidades que, en particular, se consideran independientes son las de tiempo, longitud y fuerza hablamos de *Sistemas Técnicos de Unidades*.

Sistemas Físicos de Unidades
- Métricos
  - MKS
  - CGS
- Inglés

Sistemas Técnicos de Unidades
- Métrico
- Inglés

Esta agrupación simplificada de conjuntos de unidades de medición es suficiente para nuestros propósitos actuales de trabajar con diversas unidades de medición de masa y fuerza.

Sistemas físicos métricos de unidades

Usando las unidades 1[m] , 1[kg] y 1[s] para expresar las mediciones de longitud, masa y tiempo, se configura el sistema llamado MKS, que forma parte del Sistema Internacional de Unidades (SI). En este sistema la unidad de fuerza es 1[N], de modo que si un cuerpo de 1[kg] de masa se mueve con una aceleración de 1[m/s^2] la magnitud de la fuerza neta que actúa sobre él es de 1[N]:

$$F = m \cdot a$$

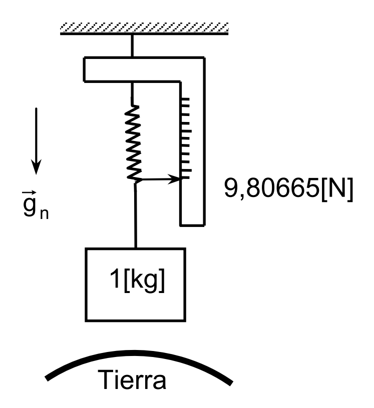
por tanto: $= 1[kg] \cdot 1[m/s^2] = 1[N]$

$$= 1[N] \triangleq 1[kg \cdot m/s^2]$$

$\vec{a}$ 1[m/s^2]

1[kg] $\vec{F}$ 1[N]

El peso de un cuerpo de 1[kg] de masa en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor "normal" $g_n = 9{,}80665\left[m/s^2\right]$, valor fijado por acuerdo internacional en 1901, es:

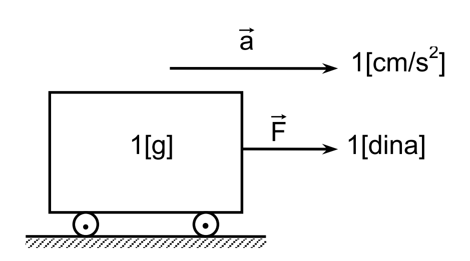


$$P_n = M \cdot g_n = 1\left[kg\right] \cdot 9{,}80665\left[m/s^2\right]$$

$$P_n = 9{,}80665\left[N\right]$$

Si se eligen las unidades 1[cm] , 1[g] y 1[s] para expresar las unidades de longitud, masa y tiempo respectivamente, resulta el sistema CGS. En este sistema la unidad de fuerza es 1[dina].

Tenemos las equivalencias:



$$1\left[dina\right] \triangleq 1\left[g \cdot cm/s^2\right]$$

$$1\left[dina\right] \triangleq 10^{-5}\left[N\right]$$

Sistema físico de unidades inglesas

Toma como base las unidades de tiempo, longitud y masa:

1[s] , 1[ft] y 1[lb]

Usa como unidad de fuerza:

Un poundal ..... 1[pdl]

definida, de acuerdo a la ley $F = m \cdot a$, por:

$$1\left[pdl\right] = 1\left[lb\right] \cdot 1\left[ft/s^2\right]$$

$$\triangleq 1\left[lb \cdot ft/s^2\right]$$

Para obtener la equivalencia entre esta unidad inglesa de fuerza y la unidad 1[N] del sistema métrico, recordamos las equivalencias:

$$1\left[ft\right] \triangleq 0{,}3048\left[m\right] \qquad y \qquad 1\left[lb\right] \triangleq 0{,}45359237\left[kg\right]$$

y con las cuales resulta:

$$1[\text{pdl}] \triangleq 1\left[\text{lb}\cdot\text{ft}/\text{s}^2\right]\cdot\frac{0{,}4536[\text{kg}]}{1[\text{lb}]}\cdot\frac{0{,}3048[\text{m}]}{1[\text{ft}]}$$

$$\triangleq 0{,}4536\cdot 0{,}3048\left[\text{kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2\right]$$

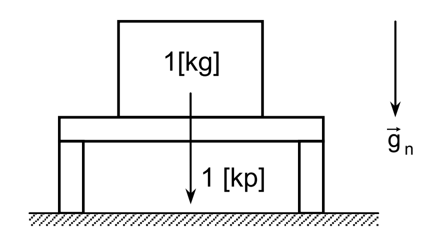
$$1[\text{pdl}] \triangleq 0{,}1383[\text{N}]$$

Sistema técnico métrico de unidades

En este sistema se escogen como unidades básicas 1[s] , 1[m] y 1[kp] correspondiente a las cantidades físicas tiempo, longitud y fuerza, respectivamente.

Un kilopond . . . . . 1[kp]

El kilopond se define como la fuerza que ejerce el "kilogramo patrón" sobre su apoyo en un lugar de "aceleración de gravedad normal".



Para esta unidad de fuerza se han usado también los nombres y símbolos siguientes:

Un kilogramo fuerza . . . . . 1[kg-f]

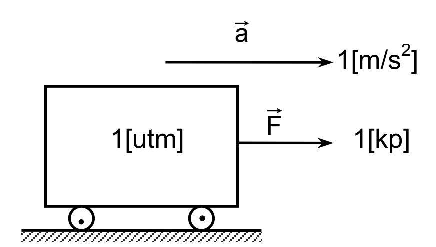
Un kilogramo peso . . . . . 1[kg-p]

El kilogramo fuerza o kilogramo peso en algunos libros se simboliza $1\left[\overrightarrow{\text{kg}}\right]$.

La correspondiente unidad de masa llamada:

unidad técnica de masa . . . . 1[utm]

se introduce de modo tal que al aplicar una fuerza neta de 1[kp] a un cuerpo de 1[utm] de masa resulte una aceleración de 1[m/s^2] , esto es:



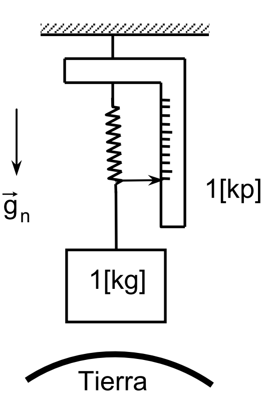
$$1[\text{kp}] \triangleq 1[\text{utm}]\cdot 1\left[\text{m}/\text{s}^2\right]$$

$$1[\text{utm}] \triangleq 1\left[\text{kp}/\left(\text{m}/\text{s}^2\right)\right]$$

Para la unidad 1[utm] se ha propuesto el nombre 1[hyl], de la palabra griega $\ddot{\upsilon}\lambda\eta$ (hile) para materia.

La unidad de fuerza 1[kp] corresponde, por definición, al peso de un cuerpo de 1[kg] de masa en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor normal. Esto nos permite establecer su equivalencia con la unidad 1[N]:

$$1[\text{kp}] \triangleq 1[\text{kg}]\cdot 9{,}80665[\text{m/s}^2]$$
$$\triangleq 9{,}80665[\text{N}]$$
$$\widehat{=} 9{,}81[\text{N}]$$

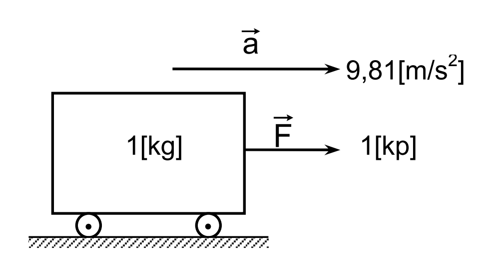


y, por tanto:

$$1[\text{utm}] \triangleq \frac{1[\text{kp}]}{1[\text{m/s}^2]} \triangleq \frac{9{,}80665[\text{N}]}{1[\text{m/s}^2]}$$
$$\triangleq 9{,}80665[\text{kg}]$$
$$\widehat{=} 9{,}81[\text{kg}]$$

Establecemos, también, que al aplicar una fuerza neta de 1[kp] de magnitud a un cuerpo cuya masa mide 1[kg] , éste adquiere una aceleración de magnitud:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1[\text{kp}]}{1[\text{kg}]} \triangleq \frac{9{,}80665[\text{N}]}{1[\text{kg}]}$$
$$\triangleq 9{,}80665[\text{m/s}^2]$$
$$\widehat{=} 9{,}81[\text{m/s}^2]$$



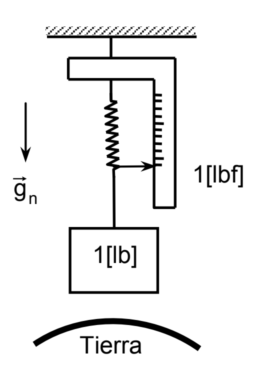
Sistema técnico de unidades inglesas

Como sistema técnico de unidades de medición tiene entre sus dimensiones básicas las de tiempo, longitud y fuerza. Las correspondientes unidades son: 1[s] , 1[ft] y 1[lbf].

La unidad de fuerza:

Una libra fuerza . . . . . 1[lbf]

se define como el **peso** de un cuerpo de 1[lb] de masa en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor normal g_n .



El valor normal g_n de la aceleración de gravedad expresada en [ft/s²] es:

$$g_n = 9{,}80665\left[m/s^2\right]$$
$$\triangleq 9{,}80665\left[m/s^2\right]\cdot\frac{1\left[ft\right]}{0{,}3048\left[m\right]}$$
$$\triangleq 32{,}17405\left[ft/s^2\right]$$

La unidad de masa en este sistema, llamada 1[slug] , se elige de modo que al aplicar una fuerza neta de 1[lbf] a un cuerpo de masa 1[slug] éste adquiera la aceleración de 1[ft/s²]:

$$1\left[lbf\right] \triangleq 1\left[slug\right]\cdot 1\left[ft/s^2\right]$$
$$1\left[slug\right] \triangleq 1\left[lbf/\left(ft/s^2\right)\right]$$

Algunas equivalencias entre las unidades 1[lbf] y 1[slug] con las correspondientes unidades en otros sistemas son:

$$1\left[lbf\right] \triangleq 1\left[lb\right]\cdot 32{,}17405\left[ft/s^2\right] \triangleq 32{,}17405\left[pdl\right]$$
$$\hat{\approx}\ 0{,}4536\left[kg\right]\cdot 9{,}80665\left[m/s^2\right] \triangleq 4{,}448\left[N\right]$$
$$\triangleq 4{,}448\left[N\right]\cdot\frac{1\left[kp\right]}{9{,}80665\left[N\right]} \triangleq 0{,}4536\left[kp\right]$$
$$1\left[slug\right] \triangleq \frac{1\left[lbf\right]}{1\left[ft/s^2\right]} \triangleq \frac{32{,}17405\left[pdl\right]}{1\left[ft/s^2\right]} \triangleq 32{,}17405\left[lb\right]$$
$$\hat{\approx}\ \frac{4{,}448\,[N]}{0{,}3048\,[m/s^2]}\ \hat{\approx}\ 14{,}59\,[kg]$$

Para la aceleración producida por la fuerza de 1[lbf] actuando sobre un cuerpo de 1[lb] de masa tenemos:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1\left[lbf\right]}{1\left[lb\right]}$$
$$\triangleq \frac{32{,}17405\left[pdl\right]}{1\left[lb\right]}$$
$$\triangleq 32{,}17405\left[ft/s^2\right]$$

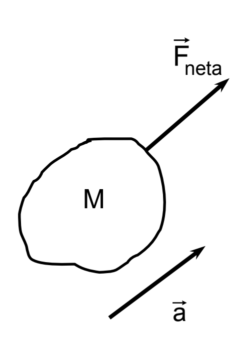
Ejemplos

- Un cuerpo pesa 32,7[kp] en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 983[cm/s²]. Calcule la aceleración que adquiere el cuerpo, en [m/s²], cuando se aplica sobre él una fuerza neta de 23,8[N].

$$P = 32{,}7[\text{kp}] \triangleq 32{,}7[\text{kp}] \cdot \frac{9{,}81[\text{N}]}{1[\text{kp}]} = 320{,}787[\text{N}]$$

$$M = \frac{P}{g} = \frac{320{,}787[\text{N}]}{9{,}83[\text{m/s}^2]} \triangleq 32{,}6[\text{kg}]$$

$$a = \frac{F_{neta}}{M} = \frac{23{,}8[\text{N}]}{32{,}6[\text{kg}]} \triangleq 0{,}729[\text{m/s}^2]$$



- La masa M de un cuerpo se puede expresar por:

$$M = M_T[\text{utm}] \triangleq M_F[\text{kg}]$$

Determinemos la relación entre los números de medición M_T y M_F.

Usando la equivalencia $1[\text{utm}] \triangleq 9{,}81[\text{kg}]$ resulta:

$$M = M_T[\text{utm}] \triangleq M_T \cdot 1[\text{utm}] \triangleq M_T \cdot 9{,}81[\text{kg}] \triangleq M_F[\text{kg}]$$

y por tanto:

$$M_F = 9{,}81 M_T$$

es la relación entre los respectivos números de medición para la masa en los sistemas métricos físico y técnico.

- Se define **peso específico** como el cuociente entre el peso y el volumen de un objeto:

$$\gamma = P/V\ .$$

La densidad de un objeto es 8,75[kg/dm³]. Calcule su peso específico, en [N/dm³] y en [kp/dm³], en un lugar en que la aceleración de gravedad tiene el valor normal.

$$\gamma = \frac{P}{V} = \frac{M \cdot g}{V} = \rho \cdot g = 8{,}75[\text{kg/dm}^3] \cdot 9{,}81[\text{m/s}^2]$$

$$\triangleq 8{,}75 \cdot 9{,}81[\text{N/dm}^3] \simeq 85{,}8[\text{N/dm}^3]$$

$$\triangleq 8{,}75 \cdot 9{,}81[\text{N/dm}^3] \cdot \frac{1[\text{kp}]}{9{,}81[\text{N}]} \triangleq 8{,}75[\text{kp/dm}^3]$$

Observamos que el número de medición para el peso específico γ en [kp/dm^3] es igual al número de medición de la densidad ρ en [kg/dm^3] en un lugar cuya aceleración de gravedad tiene valor normal.

- La masa de un cuerpo es de 2,6[lb]. Calculemos su peso, en [pdl] y en [lbf], en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 853[cm/s^2].

Expresando la masa en [lb] y la aceleración en [ft /s^2], resulta la fuerza en [pdl].
Por tanto:

$$\begin{aligned} P &= m\,g \\ &= 2{,}6\left[\text{lb}\right]\cdot 853\left[\text{cm}/\text{s}^2\right]\cdot\frac{1\left[\text{ft}\right]}{30{,}48\left[\text{cm}\right]} \\ &\hat{\simeq}\ 73\left[\text{pdl}\right] \end{aligned}$$

Recordando la equivalencia 1[lbf] $\hat{\simeq}$ 32,17[pdl], resulta:

$$P = 73\left[\text{pdl}\right]\ \hat{\simeq}\ 73\left[\text{pdl}\right]\cdot\frac{1\left[\text{lbf}\right]}{32{,}17\left[\text{pdl}\right]}\ \simeq\ 2{,}3\left[\text{lbf}\right]$$

- El valor de cierta cantidad física es $P = 1{,}7\cdot 10^5\left[\text{N}/\text{m}^2\right]$. Expresemos este valor en "pound per square inch" ([psi]).

Encontremos primero la equivalencia entre las unidades:

$$1\left[\text{N}/\text{m}^2\right] \qquad \text{y} \qquad 1\left[\text{psi}\right]\ \hat{=}\ 1\left[\text{lbf}/\text{in}^2\right]$$

esto es:

$$\begin{aligned} 1\left[\text{N}/\text{m}^2\right] &\ \hat{=}\ \frac{1\left[\text{N}\right]}{1\left[\text{m}^2\right]}\cdot\frac{1\left[\text{lbf}\right]}{4{,}448\left[\text{N}\right]}\cdot\left(\frac{1\left[\text{m}\right]}{10^2\left[\text{cm}\right]}\right)^2\cdot\left(\frac{1\left[\text{cm}\right]}{2{,}54\left[\text{in}\right]}\right)^2 \\ &\ \hat{=}\ \frac{1}{4{,}448\cdot 10^4\cdot\left(2{,}54\right)^2}\left[\text{lbf}/\text{in}^2\right] \\ &\ \simeq\ 3{,}485\,10^{-6}\left[\text{lbf}/\text{in}^2\right] \end{aligned}$$

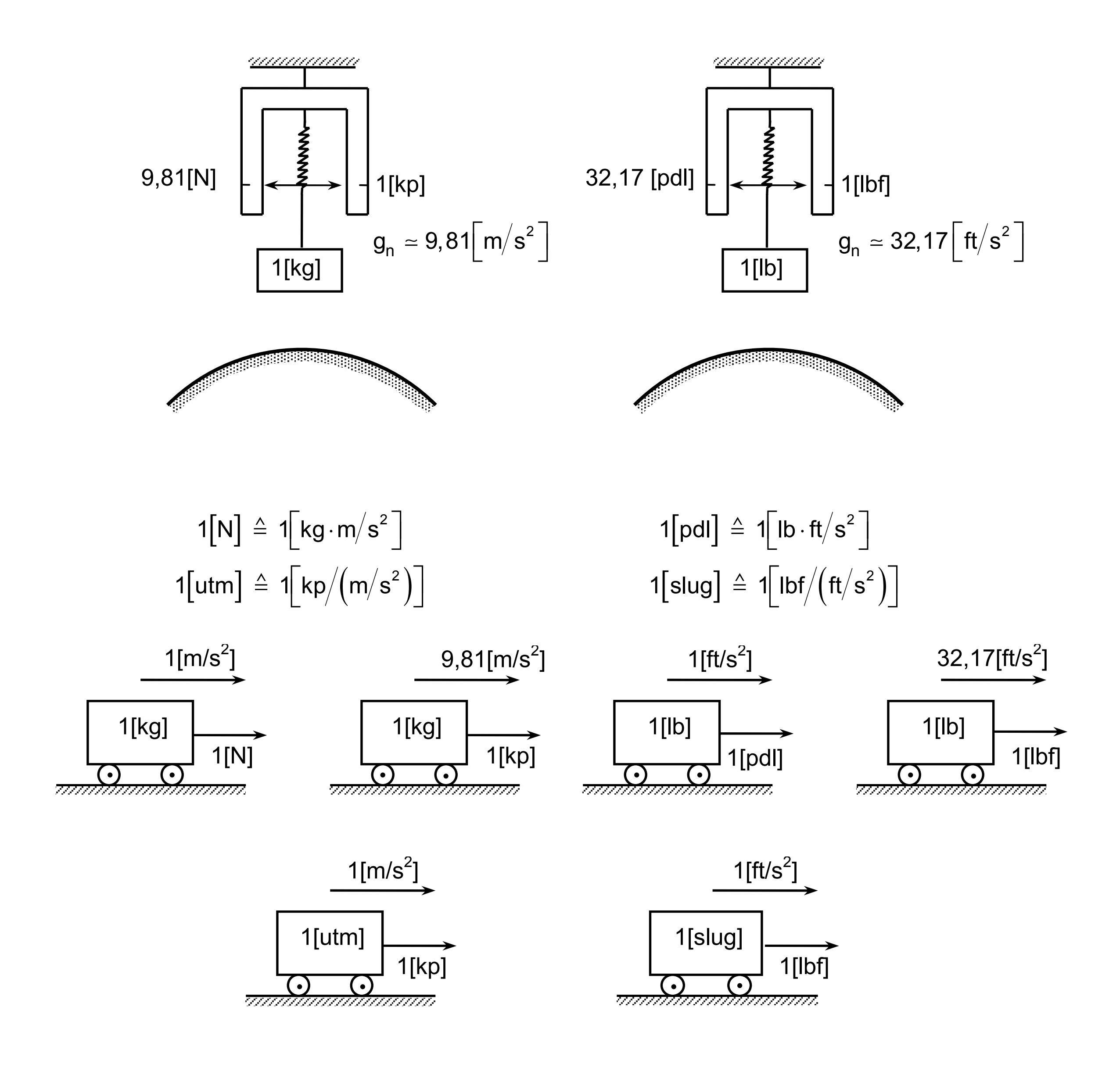
Entonces:

$$\begin{aligned} P &= 1{,}7\cdot 10^5\left[\text{N}/\text{m}^2\right]\ \hat{=}\ 1{,}7\cdot 10^5\cdot 3{,}485\cdot 10^{-6}\left[\text{lbf}/\text{in}^2\right] \\ &\hat{\simeq}\ 0{,}59\left[\text{psi}\right] \end{aligned}$$

Resumen de unidades de fuerza, masa y aceleración

El cuadro resumen de los sistemas de unidades que se presenta a continuación permite tener una visión de conjunto de las unidades de tiempo, longitud, masa y fuerza, explicadas hasta el momento.

	Sistemas Métricos		**Sistemas Ingleses**	
	Físico	Técnico	Físico	Técnico
Tiempo	1 [s]	1 [s]	1 [s]	1 [s]
Longitud	1 [m]	1 [m]	1 [ft]	1 [ft]
Masa	1 [kg]	1 [utm]	1 [lb]	1 [slug]
Fuerza	1 [N]	1 [kp]	1 [pdl]	1 [lbf]



$$g_n \simeq 9{,}81\left[m/s^2\right] \qquad g_n \simeq 32{,}17\left[ft/s^2\right]$$

$$1\left[kp\right] \hat{=} 9{,}81\left[N\right] \qquad 1\left[lbf\right] \hat{=} 32{,}17\left[pdl\right]$$

$$1\left[utm\right] \hat{=} 9{,}81\left[kg\right] \qquad 1\left[slug\right] \hat{=} 32{,}17\left[lb\right]$$

Ejercicios

9-98) Complete las equivalencias propuestas:

1,4 [kp]	≙	[N]	4,3 [kp]	≙	[pdl]
3,8 [N]	≙	[pdl]	12,5 [lbf]	≙	[kp]
23,9 [pdl]	≙	[lbf]	16,9 [N]	≙	[lbf]
97,4 [slug]	≙	[kg]	725 [lb]	≙	[utm]
3,6 [utm]	≙	[kg]	0,42 [kg]	≙	[slug]

9-99) Un cuerpo se encuentra en un plano horizontal liso (roce despreciable) en un lugar de aceleración de gravedad normal; entonces si

su masa es:	**y la fuerza aplicada es:**	**, la aceleración es:**
20 [kg]	16 [kp]	[m/s^2]
3,8 [utm]	$4{,}5 \cdot 10^7$ [dina]	[m/s^2]
8,5 [utm]	1,6 [kp]	[m/s^2]
12 [lb]	2,3 [lbf]	[ft/s^2]
4,6 [slug]	57 [pdl]	[ft/s^2]

su peso es:	**y la fuerza aplicada es:**	**, la aceleración es:**
40 [kp]	12 [kp]	[m/s^2]
1,8 [kp]	17 [N]	[m/s^2]
7,2 [lbf]	89 [lbf]	[ft/s^2]

9-100) Un objeto tiene una masa de 14,7[g]. Calcular su peso, en [kp], para un lugar en que la aceleración de gravedad es 9,73[m/s^2].

9-101) Una cantidad física vale 600[kp/cm^2]. Calcule su valor en [lbf/in^2].

9-102) Exprese la constante de gravitación universal

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\left[N \cdot m^2 / kg^2\right] \text{ en } \left[lbf \cdot ft^2 / slug^2\right]$$

9-103) La aceleración de gravedad en cierto lugar vale 9,72[m/s^2]. Exprese este valor en [N/kg] y en [kp/kg].

9-104) ¿Cuál es la masa, en [slug], de un objeto que pesa 175[lbf] al nivel del mar y a 30° de latitud?

9-105) Calcule la fuerza, en [lbf], necesaria para acelerar una masa de 8,60[kg] en 714[yd/min^2] .

9-106) Un cuerpo pesa 500[N] en un lugar en que la aceleración de gravedad vale 32,0[ft/s^2]. Calcule la aceleración que adquiere tal cuerpo, en [in/min^2], al aplicarle una fuerza neta de 40,0[kp].

9-107) Un objeto sobre el que actúa una fuerza neta de 220[dina] adquiere una aceleración 15,0[in/s^2]. ¿Cuál es el peso de ese objeto, en [kp] , en un lugar con $g = 32{,}1\left[\text{ft}/\text{s}^2\right]$?

9-108) Una cantidad física tiene el valor $17\left[\text{dina}\cdot\text{s}/\text{cm}^2\right]$. ¿Cuál es el valor correspondiente en la unidad $\left[\text{pdl}\cdot\text{min}/\text{ft}^2\right]$?

9-109) El cuociente entre la fuerza de resistencia D en [lbf] y la rapidez v en [mile/h], para cierto tipo de aviones a reacción se calcula según la fórmula:

$$\frac{D}{v} = 0{,}0667\,\frac{C}{B}\cdot\left(A^3\cdot P^2\right)^{1/4}$$

donde B es la envergadura de las alas en [ft], C es un coeficiente adimensional, P es el peso del avión en [lbf] y A es un "área equivalente" en [ft^2] ,obteniéndose el resultado en [lbf/(mile/h)] . Hay que adaptar esta fórmula al sistema técnico de medición de tal manera que, introduciendo B en [m], A en [m^2] y P en [kp], resulte D/v en [kp/(km/h)] .

9-110) Una constante física tiene el valor $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\left[N/\left(m\cdot s\cdot K^4\right)\right]$. Calcule el valor de la cantidad física $I = \sigma\cdot T^4$ cuando la temperatura vale 1350[°F]; exprese el resultado en $\left[\text{dina}/\left(\text{cm}\cdot\text{s}\right)\right]$.

9-111) En ciertas situaciones una de las fuerzas que actúa sobre un cuerpo se expresa por $F = b\cdot v^3$ siendo v su rapidez. Exprese la dimensión de b en términos de las dimensiones de tiempo, longitud y masa.

9-112) En determinadas condiciones la "fuerza por unidad de área" en una burbuja de radio R está dada por la ecuación $P = 4\beta R^{-1}$. Determine la dimensión de la constante β.

9-113) La fuerza de roce sobre un líquido que fluye por un tubo está determinada, en ciertos casos, por la fórmula: $f = \alpha\,\pi\,\ell\,d v^r$ en que α es una constante, d el diámetro, ℓ la longitud del tubo, v la rapidez del líquido y r un número adimensional. ¿Qué dimensión tiene α?

9-114) Suponga que la fuerza de resistencia R sobre un disco que se mueve en el aire depende de un coeficiente adimensional ξ, del área A y de la rapidez v del disco, y de la densidad ρ del aire, según la ecuación $R = \xi A^r v^s \rho^t$. Determine los valores de los exponentes r, s, t.

Créditos de imágenes

1.- Portada: diseño por Luis Bastias.
2.- Pág xiii: Busto Federico Santa María, fotografiado por Nicolás Porras.
3.- Pág xv: Edificio Casa Central USM, foto institucional.
4.- Pág xix: a) foto superior, alumnas en el laboratorio, fotografía por Wladimir Ibáñez.
    b) foro inferior, Galileo, grabado por Samuel Sartain, según H. Wyatt.
    http://ihm.nlm.nih.gov/images/B12569
5.- Pág xx Copérnico, autor desconocido. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Copernicus.jpg#file
6.- Pág xxi, Registro de Galileo de las lunas de Júpiter, gentileza de Mr. Thomas Pile.
    http://viking.coe.uh.edu/~tpile/portfolio/CUIN%207316/astronomy/jupiter.html
7.- Pág xxiii a) izquieda. Isaac Newton, grabado en madera, a partir de un retrato del siglo XVII por Kneller.
    http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isaac_Newton_woodcut,_frontispiece_to_Mach.jpg
    b) Derecha Einstein en Berna, por Lucien Chavan.
    NASA's "Astronomy Picture fo the Day". http://apod.nasa.gov/apod/ap951219.html
8.- xxiv Alumnos en sala de estudio, gentileza de Celín Mora.
9.- Pág 1 "Centro comercial", fotografía por Luis Bastías.
10.- Pág 87 "Renacuajos" , dibujo autor desconocido.
    http://es.wikipedia.org/wiki/Metamorfosis_%28biolog%C3%ADa%29
11.- Pág 114 "Manos" fotografía por Gonzalo Fuster.
12.- Pág 215 "Bananas" fotografía por Luis Bastías.
13.- Pág 221 "Pesas" fotografía por Luis Bastías.
14.- Pág 263 "Niña con termómetro" fotografía por Luis Bastías.
15.- Pág 303 "Levantador de pesas" fotografía por Luis Bastías.

Conceptos y Magnitudes en Física

Este texto fue elaborado para reforzar y nivelar los conocimientos en Física de los alumnos entrantes por primera vez a la USM con el fin de que adquieran una base sólida para afrontar sus estudios de Física. Se trata de que los alumnos lleguen a ser capaces de construir modelos físicos a partir de situaciones simples. Esos modelos ayudarán a los estudiantes a adquirir las habilidades necesarias para resolver problemas físicos. Sólo se emplea las matemáticas desarrolladas en la Educación Media. Debido a que es imperioso tener conocimientos de vectores, se dedica un capítulo a ese tema.

Este libro puede ser además de gran utilidad para el profesor de Física de la Educación Media. Aquí podrá encontrar metodologías para clarificar los conceptos y un gran número de problemas, tanto resueltos como propuestos, de variados niveles de dificultad.

Luciano Laroze

Nació en 1935. Ingresó muy joven a la Escuela de Artes y Oficios de la Universidad Técnica Federico Santa María, titulándose de Ingeniero Eléctrico en 1959.
Fue profesor de la UTFSM desde 1961. Se doctoró en Física Nuclear en 1969 en el Instituto Politécnico de Rensselaer, Estados Unidos. Gran parte de su trabajo en la UTFSM estuvo dedicado a la labor educativa en el pregrado, tanto en las carreras de ingeniería como en la licenciatura de Física.
Fue el gran artífice del curso de Conceptos y Magnitudes en Física y del libro que le sirve de texto.
Falleció en el año 2006 en plena actividad docente.

Nicolás Porras

Nacido en Valparaíso en 1927. Se tituló de Profesor de Estado en Matemáticas y Física en la Universidad de Chile. Trabajó 15 años en la Educación Media. Durante casi 25 años se ha dedicado con entusiasmo a formar jóvenes en la Universidad Técnica Federico Santa María.
Colaboró directamente en la creación del curso Conceptos y Magnitudes en Física y del Programa de Nivelación para los alumnos más débiles.
Actualmente es asesor pedagógico en el Departamento de Física de la UTFSM.

Gonzalo Fuster

Nació en Los Andes en 1951. Se tituló de Ingeniero Civil Químico en la Universidad Católica de Valparaíso, y luego obtuvo su doctorado en Física en la Universidad Estatal de Louisiana, en Estados Unidos, en 1987.
Ha enseñado Física en la Universidad Técnica Federico Santa María desde 1975.
Actualmente está dedicado a introducir metodologías de clase activa en las asignaturas de Física del ciclo básico de las carreras de Ingeniería.

ISBN-13: 978-956-7051-24-3
9 789567 051243

